Introdução às álgebras hipercíclicas

GdT - Análise Funcional

Fernando Costa Jr.

Departamento de matemática
Universidade Federal da Paraíba

27/09 e 02/10 de 2024

Dinâmica linear e hiperciclicidade

Contexto geral dessa apresentação:

- X é um espaço de Banach ou Fréchet separável
- $T : X \to X$ é uma transformação linear contínua (= operador)
- $\mathcal{L}(X) =$ conjunto desses operadores

A **órbita** de um vetor $x \in X$ é o conjunto $Orb(x,T) := \{T^n x : n \geq 0\}$. Se x tem órbita dense, dizemos que x é **hipercíclico** para T. Neste caso dizemos que T é um **operador hipercíclico**.

Notação: $HC(T) = \{x \in X : x \text{ é hipercíclico para } T\}$

Transitividade topológica

Definição: T é dito **topologicamente transitivo** quando satisfaz: para todos $U, V \subset X$ abertos não-vazios, podemos encontrar $u \in U$ e $N \in \mathbb{N}$ tais que $T^N u \in V$.

Teorema (da transitividade de Birkhoff)

T é topologicamente transitivo se, e somente se, é hipercíclico. Em caso afirmativo, $HC(T)$ é um conjunto comagro.

Prova.

Vamos provar a ida. Seja $(V_k)_k$ uma base de abertos para a topologia de X. Para cada $k \in \mathbb{N}$, defina

$$G(k) = \{u \in X : \exists N \in \mathbb{N} \text{ tal que } T^N u \in V_k\}.$$

Segue da continuidade de T que cada $G(k)$ é aberto. Além disso, pela hipótese, cada $G(k)$ é denso. Com efeito, dado $U \subset X$ aberto qualquer, aplique a hipótese ao par U, V_k para encontrar $u \in U$ e $N \in \mathbb{N}$ tal que $T^N u \in V_k$. Por definição, segue que $u \in G(k)$. Logo, $G(k) \cap U \neq \varnothing$, donde $G(k)$ é denso.

Transitividade topológica

Agora, aplicando o Teorema de Baire à família de abertos densos $\big(G(k)\big)_k$, segue que o conjunto

$$G := \bigcap_{k=1}^{\infty} G(k)$$

é comagro. Finalmente, para $u \in G$ qualquer, vejamos que $u \in HC(T)$. Mostraremos que $\operatorname{orb}(x, T)$ é densa em X. Dado $V \subset X$ um aberto arbitrário, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $V_k \subset V$. Como $u \in G \subset G(k)$, segue que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $T^N u \in V_k \subset V$, isto é, $\operatorname{orb}(x, T) \cap V \neq \varnothing$, donde $\operatorname{orb}(x, T)$ é densa. $\square$

Lineabillidade, Espaçabilidade e algebrabilidade

Motivação : Procura por estruturas lineares em um ambiente essencialmente não-linear.

- "Conjectura" de Ampère (1806) sobre $C^0([0,1],\mathbb{R})$.
- Monstro de Weierstrass (1872):

$$W(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \cos(b^k \pi x), \quad \text{où} \;\; a \in]0,1[\,,\; b \in 2\mathbb{Z}+1,\; ab > 1+\tfrac{2\pi}{2}.$$

- Banach (1931): "o subconjunto de $C^0([0,1],\mathbb{R})$ das funções deriváveis em algum ponto é magro".
- V. I. Gurariy (1991): existe um subespaço $X \subset C^0([0,1],\mathbb{R})$ tal que $\dim X = +\infty$ e toda $f \in X\backslash\{0\}$ não é derivável em ponto algum.
- V. Fonf, V. I. Gurariy, V. Kadec (1999): podemos encontrar um tal espaço fechado.
- F. Bayart, L. Quarta (2007): existe uma álgebra infinitamente gerada de funções não deriváveis em ponto algum.

Lineabillidade, Espaçabilidade e algebrabilidade

Lineabilidade / Espaçabilidade : R. M. Aron, V. I. Gurariy, J. B. Seoane-Sepúlveda (2005).

Algebrabilidade : R. M. Aron, D. Pérez-García, and J. B. Seoane-Sepúlveda (2006).

Um subconjunto L de um espaço vetorial X é:

- **lineável** quando $L \cup \{0\}$ contém um subespaço de dimensão infinita;
- **espaçável** quando $L \cup \{0\}$ contém um subespaço *fechado* de dimensão infinita (def. válida quando X é um evt);
- **algebrável** quando $L \cup \{0\}$ contém uma álgebra não-finitamente gerada (def. válida quando X é uma álgebra topológica).

Subespaços hipercíclicos

O que dizer de $L = HC(T)$ quando T é hipercíclico?

Teorema (de Herrero-Bourdon)

Se $x \in HC(T)$, então $\{P(T)x : P \text{ polinômio}\}$ é um subespaço denso de pontos de $HC(T) \cup \{0\}$.

Em particular, se T é hipercíclico, então $HC(T)$ é denso-lineável.

Em Dinâmica Linear, o conceito de espaçabilidade para $L = HC(T)$ dá origem à noção de **subespaço hipercíclico**.

Álgebras hipercíclicas

Daqui por diante, suponhamos que X também tenha a estrutura de álgebra topológica. A noção de **álgebra hipercíclica** vem de uma formulação mais modesta: é qualquer sub-álgebra de X contida em $HC(T) \cup \{0\}$ (pouco importa o número de geradores).

Notação: dado $u \in X$, o conjunto

$$A(u) = \{P(u) : P \in \mathbb{C}[X], P(0) = 0\}$$

é denominado **sub-álgebra gerada por** u.

Primeiros resultados:

- Aron, Conejero, Peris e Seoane-Sepúlveda (2007): nenhuma translação $\tau_a : f(\cdot) \mapsto f(\cdot + a)$ sobre $H(\mathbb{C})$ admite uma álgebra hipercíclica.
- Bayart e Matheron (2009), Shkarin (2010): $D : f \mapsto f'$ sobre $H(\mathbb{C})$ admite uma álgebra hipercíclica.

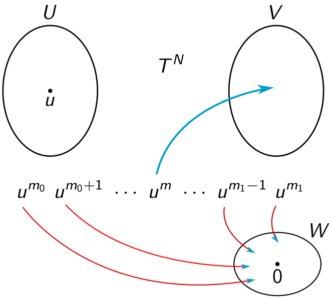
O método de Bayart e Matheron

Critério A (Bayart, FCJ, Papathanasiou (2021))

Suponha que, para todos $m_0 \leq m_1$ em $\mathbb{N}$ e todos $U, V, W \subset X$ abertos não-vazios, com $0 \in W$, podemos escolher $m \in [\![m_0, m_1]\!]$ e encontrar $u \in U$ e $N \in \mathbb{N}$ tais que

$$\begin{cases} T^N(u^m) \in V \\ T^N(u^n) \in W, \quad \text{for } n = [\![m_0, m_1]\!] \backslash \{m\}. \end{cases}$$

Então existe um subconjunto comagro $G \subset X$ tal que cada $u \in G$ gera uma álgebra hipercíclica para T.



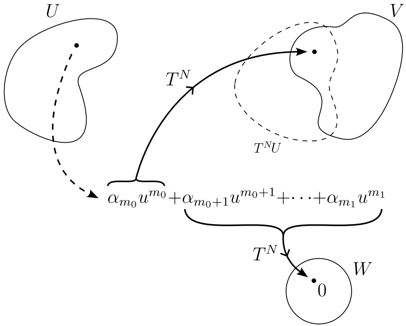
O método de Bayart e Matheron: caso particular

Critério B (Bayart, FCJ, Papathanasiou (2021))

Suponha que, para todos $m_0 \leq m_1$ em $\mathbb{N}$ e todos $U, V, W \subset X$ abertos não-vazios, com $0 \in W$, podemos encontrar $u \in U$ e $N \in \mathbb{N}$ tais que

$$(E) \quad \begin{cases} T^N(u^{m_0}) \in V \\ T^N(u^n) \in W, \quad \text{for } n \in \{m_0+1, \dots, m_1\}. \end{cases}$$

Então existe um subconjunto comagro $G \subset X$ tal que cada $u \in G$ gera uma álgebra hipercíclica para T.



Prova.

Seja $(V_k)_k$ uma base de abertos para a topologia de X. Para todos $m_0, m_1, s, k \in \mathbb{N}$, com $m_0 \leq m_1$, definimos os conjuntos

$$E(m_0, m_1, s) = \left\{ \sum_{k=m_0}^{m_1} \hat{P}(k) z^k \in \mathbb{C}[z] : \hat{P}(m_0) = 1, \max_{m_0 \leq m \leq m_1} |\hat{P}(m)| \leq s \right\},$$

$$G(m_0, m_1, s, k) = \{u \in X : \forall P \in E(m_0, m_1, s), \exists N \geq 1, T^N P(u) \in V_k\}.$$

Então cada $G(m_0, m_1, s, k)$ é aberto pela continuidade das aplicações $(u, P) \mapsto T^N P(u)$. Mostremos que cada $G(m_0, m_1, s, k)$ é denso. Seja $U \subset X$ um aberto não-vazio qualquer. Fixemos $V \subset V_k$ aberto não vazio e W uma *bola*[1] aberta centrada na origem e de raio suficientemente pequeno de modo que

$$V + \underbrace{sW + \cdots + sW}_{m_1 - m_0 \text{ vezes}} \subset V_k.$$

Aplicamos a hipótese com m_0, m_1, U, V, W e obtemos $u \in U$ e $N \in \mathbb{N}$ tais que vale (E). Vamos verificar que $u \in G(m_0, m_1, s, k)$.

[1]Num contexto geral: uma vizinhança balanceada (bem pequena) da origem.

Seja $P \in E(m_0, m_1, s)$. Temos

$$\begin{aligned}
T^N P(u) &= T^N\big(\underbrace{\hat{P}(m_0)}_{=1} u^{m_0} + \cdots + \hat{P}(m_1) u^{m_1}\big) \\
&= \underbrace{T^N u^{m_0}}_{\in V} + \hat{P}(m_0+1)\underbrace{T^N u^{m_0+1}}_{\in W} + \cdots + \hat{P}(m_1)\underbrace{T^N u^{m_1}}_{\in W}
\end{aligned}$$

$$\implies T^N P(u) \in V_k$$
$$\implies u \in G(m_0, m_1, s, k)$$
$$\implies G(m_0, m_1, s, k) \cap U \neq \varnothing$$

Portanto, $G(m_0, m_1, s, k)$ é denso. Aplicando o Teorema de Baire, concluímos que

$$G = \bigcap_{\substack{m_0 \leq m_1,\\ s,k \in \mathbb{N}}} G(m_0, m_1, s, k)$$

é comagro. Finalmente, mostraremos que, para qualquer $u \in G$, a subálgebra gerada $A(u)$ satisfaz $A(u) \subset HC(T) \cup \{0\}$.

Seja $P(u)$ um elemento qualquer de $A(u)$, onde $P \in \mathbb{K}[z]$ satisfaz $P(0) = 0$. Dado $U \subset X$ aberto não-vazio arbitrário, queremos mostrar que $\operatorname{orb}(P(u), T) \cap U \neq \varnothing$. Podemos escrever

$$P(z) = \hat{P}(m_0)u^{m_0} + \cdots + \hat{P}(m_1)u^{m_1}$$

para certos $m_0, m_1 \in \mathbb{N}$, com $m_0 \leq m_1$ e $\hat{P}(m_0) \neq 0$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $\hat{P}(m_0) = 1$. Fixemos $s \in \mathbb{N}$ tal que $\sup_{m_0 \leq m \leq m_1} |\hat{P}(m)| \leq s$. Finalmente, seja $k \in \mathbb{N}$ tal que $V_k \subset U$. Como $u \in G \subset G(m_0, m_1, s, k)$, segue da definição que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $T^N P(u) \in U$, o que completa a prova. $\square$

Aplicação 1 - Operadores de Rolewicz

Considere a álgebra de Banach $(c_0, \|\cdot\|_\infty, *)$, onde

- $c_0 := \left\{(x_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0\right\}$
- $\|(x_n)\|_\infty := \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$
- $(x_n)_n * (y_n)_n := (x_n y_n)_n$.

Notações: $z^{1/n}$ denota a raiz n-ésima principal de $z \in \mathbb{C}$;
$u^r := (x_n^r)_n, \forall\, r \in \mathbb{Q}, \forall\, u = (x_n)_n \in c_0$.

Teorema (Bayart, FCJ, Papathanasiou (2021))

Seja $T = \lambda B$ o operador de Rolewicz, onde $\lambda \in \mathbb{N}$ e $B : c_0 \to c_0$ é o shift para trás $B(x_1, x_2, \dots) := (x_2, x_3, \dots)$. Então T admite uma álgebra hipercíclica se, e somente se, $|\lambda| > 1$.

Prova.

Sejam $m_0 \leq m_1$ em $\mathbb{N}$ e $U, V, W \subset X$ abertos não vazios, com $0 \in W$. Tomemos $x \in U \cap c_{00}$ e $y \in V \cap c_{00}$, digamos

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_{N_0}, 0, \dots) \quad \text{e} \quad y = (y_1, y_2, \dots, y_{N_0}, 0, \dots)$$

para algum $N_0 \in \mathbb{N}$. Para $N > N_0$ suficientemente grande, definimos

$$\begin{aligned} u = u(N) &= x + \frac{1}{\lambda^{N/m_0}} F^N y^{1/m_0} \\ &= (x_1, x_2, \dots, x_{N_0}, 0, \dots) + \frac{1}{\lambda^{N/m_0}} (0, \overset{N}{\dots}, 0, y_1^{1/m_0}, \dots, y_{N_0}^{1/m_0}, 0, \dots), \end{aligned}$$

onde $F : c_0 \to c_0$ é o shift para frente $F(x_1, x_2, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots)$. Então

$$\|u - x\|_\infty = \frac{1}{|\lambda|^{N/m_0}} \|F^N y^{1/m_0}\|_\infty = |\lambda|^{N/m_0} \|y\|_\infty^{1/m_0} \xrightarrow{N \to +\infty} 0.$$

Portanto, temos $u \in U$ para todo N é suficientemente grande.

Agora, se $m_0 \leq m \leq m_1$, temos

$$u^m = \underbrace{(x_1^m, x_2^m, \dots, x_{N_0}^m, 0, \dots)}_{\in \ker(B^N)} + \frac{1}{\lambda^{N\frac{m}{m_0}}}(0, \overset{N}{\dots}, 0, y_1^{\frac{m}{m_0}}, \dots, y_{N_0}^{\frac{m}{m_0}}, 0, \dots).$$

No caso $m = m_0$,

$$u^{m_0} = (x_1^{m_0}, x_2^{m_0}, \dots, x_{N_0}^{m_0}, 0, \dots) + \frac{1}{\lambda^N}(0, \overset{N}{\dots}, 0, y_1, \dots, y_{N_0}, 0, \dots)$$

$$\implies T^N u^{m_0} = (\lambda B)^N u^{m_0} = \lambda^N B^N \frac{1}{\lambda^N}(0, \overset{N}{\dots}, 0, y_1, \dots, y_{N_0}, 0, \dots) = y \in V.$$

Por fim, para $m \in \{m_0 + 1, \dots, m_1\}$, como $\frac{m}{m_0} > 1$, temos

$$\begin{aligned} T^N u^m &= \lambda^N B^N \frac{1}{\lambda^{N\frac{m}{m_0}}}(0, \overset{N}{\dots}, 0, y_1^{\frac{m}{m_0}}, \dots, y_{N_0}^{\frac{m}{m_0}}, 0, \dots) \\ &= \frac{1}{\lambda^{N\left(\frac{m}{m_0}-1\right)}}(y_1^{\frac{m}{m_0}}, \dots, y_{N_0}^{\frac{m}{m_0}}, 0, \dots) \xrightarrow{N\to+\infty} 0, \end{aligned}$$

donde teremos $T^N u^m \in W$ para todo N suficientemente grande. O resultado segue do Critério B. □

Aplicação 2 - Operadores de convolução

Vejamos algumas definições.

- Espaço das funções inteiras: $H(\mathbb{C}) = \{f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : f \text{ holomorfa}\}$
- $H(\mathbb{C})$ é um espaço de Fréchet com a sequência de seminormas $(\|\cdot\|_n)_n$ dada por $\|f\|_n = \sup_{|z|\leq n} |f(z)|$.
- $H(\mathbb{C})$ é uma álgebra de Fréchet com o produto $* : H(\mathbb{C}) \times H(\mathbb{C}) \to H(\mathbb{C})$ dado por $f * g : x \mapsto f(x)g(x)$.

Se $\phi \in H(\mathbb{C})$ é de *tipo exponencial* (i.e. $|\phi(z)| \leq Ae^{B|z|}$ para certas constantes $A, B > 0$), pode-se definir o operador $\phi(D)$, composição de ϕ com $D : f \mapsto f'$. Um operador da forma $\phi(D)$ é denominado *operadores de convolução induzido por* ϕ.

Proposição

Se $\phi(z) = ae^b$ para certas constantes $a, b \in \mathbb{C}$, então $\phi(D) = a\tau_b$.

Corolário

Se ϕ é múltipla de uma exponencial, então $\phi(D)$ não admite álgebra hipercíclica.

Breve histórico

- Aron et al. (2007) perguntam: D tem álgebra hipercíclica?
- Bayart & Matheron (2009) e Shkarin (2010) respondem: bien sûr.
- Bès, Conejero, Papathanasiou (2017): $P(D)$ também, se $P(0) = 0$.
- Bès, Conejero, Papathanasiou (2018):
  - $P(D)$ também, se $|P(0)| < 1$
  - $\cos(D)$ também, e alguns $\phi(D)$ com $|\phi(0)| < 1$.
- Bayart (2019):
  - todo $\phi(D)$ com $|\phi(0)| < 1$
  - vários $\phi(D)$ com $|\phi(0)| = 1$.
- Bayart, FC, Papathanasiou (2021): algumas $\phi(D)$ com $|\phi(0)| > 1$

Bayart descobriu um dos pontos chaves

Lema (Bayart (2019))

Suponha que $\phi \in H(\mathbb{C})$ *não seja múltipla de uma exponencial. Seja* $w_0 \in \mathbb{C}$ *tal que* $\phi(w_0) \neq 0$. *Então, para todo* $\delta > 0$, *existem* $w_1, w_2 \in B(w_0, \delta)$, *com* $w_1 \neq w_2$, *tais que* $t \mapsto \log \left|(tw_1 + (1-t)w_2\right|$ *é estritamente convexa.*

Alguns fatos úteis sobre o espectro dos operadores de convolução.

- Para cada $\lambda \in \mathbb{C}$, definimos $E(\lambda) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ por $E(\lambda)(z) = e^{\lambda z}$.
- Temos $E(\lambda) \in H(\mathbb{C})$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$.
- Se $\Lambda \subset \mathbb{C}$ possui um ponto de acumulação, então o subespaço $\mathrm{span}\{E(\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$ é denso em $H(\mathbb{C})$.
- Se $T = \phi(D)$, então, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$, vale $TE(\lambda) = \phi(\lambda)E(\lambda)$.
- Para todos $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, vale $E(\lambda + \mu) = E(\lambda)E(\mu)$.

Com isso podemos provar o seguinte.

Teorema (Bayart, FC, Papathanasiou (2021))

Seja ϕ uma função inteira de tipo exponencial que não é múltipla de uma exponencial, e satisfazendo o seguinte: para todos $m_0 \leq m_1$, existem $a, b \in \mathbb{C}$ tais que $|\phi(m_0 b)| > 1$ e $|\phi(db + (m - d)a)| < 1$ para todo $m \in \{m_0, \ldots, m_1\}$ e $d \in \{0, 1, \ldots, m\}$ com $(m, d) \neq (m_0, m_0)$. Então $T = \phi(D)$ admite uma álgebra hipercíclica.

Na prova do Teorema acima, utilizaremos as notações abaixo.

- $I_p = \{1, \ldots, p\}$
- $\mathbf{j} \in I_p^d, \mathbf{j} = (j_1, \ldots, j_d)$
- $a_{\mathbf{j}} = a_{j_1} \cdots a_{j_d}$
- Convenção: se $d = 0$, então $a_{\mathbf{j}} = 1$.

Prova

Aplicaremos o Critério B. Sejam $U, V, W \subset X$ abertos não vazios, com $0 \in W$, e sejam $m_0 \leq m_1$ em $\mathbb{N}$. Pela hipótese, existem $a, b \in \mathbb{C}$ tais que valem as desigualdades. Sejam $w_0 = m_0 b$ e $\delta > 0$ pequeno o suficiente de modo que

(1) $|\phi| > 1$ em $B(w_0, \delta)$

(2) Para todos $n \in \{m_0, \ldots, m_1\}$ e $d \in \{0, 1, \ldots, m\}$, com $(m, d) \neq (m_0, m_0)$, e para todos $\lambda_1, \ldots, \lambda_d \in B(w_0, \delta)$ e $\gamma_1, \ldots, \gamma_{m-d} \in B(a, \delta)$, vale

$$\left|\phi\left(\frac{\lambda_1 + \cdots + \lambda_d}{m_0} + \gamma_1 + \cdots + \gamma_{m-d}\right)\right| < 1.$$

A condição (2) é possível porque

$$\frac{\lambda_1 + \cdots + \lambda_d}{m_0} + \gamma_1 + \cdots + \gamma_{m-d} = db + (m-d)a + z,$$

onde z é uma pequena perturbação controlada por δ.
Como $\phi(w_0) \neq 0$, o lema nos dá $w_1 \neq w_2 \in B(w_0, \delta)$ tais que

(3) $t \mapsto \log\left|\phi(tw_1 + (1-t)w_2)\right|$ é **estritamente** convexa.

Agora, como $B(a,\delta)$ e $[w_1,w_2]$ têm pontos de acumulação, sabemos que $\text{span}\{E(\gamma) : \gamma \in B(a,\delta)\}$ e $\text{span}\{E(\lambda) : \lambda \in [w_1,w_2]\}$ são densos em $H(\mathbb{C})$. Assim, existem $a_1,\ldots,a_p,b_1,\ldots,b_q \in \mathbb{C}$, $\gamma_1,\ldots,\gamma_p \in B(a,\delta)$ e $\lambda_1,\ldots,\lambda_p \in [w_1,w_2]$ tais que

$$\sum_{l=1}^{p} a_l E(\gamma_l) \in U \quad \text{e} \quad \sum_{j=1}^{q} b_j E(\lambda_j) \in V.$$

Para $N \in \mathbb{N}$ bem grande e $j \in \{1,\ldots,q\}$, seja $c_j := c_j(N)$ dado por

$$c_j = \frac{b_j^{1/m_0}}{\phi(\lambda_j)^{N/m_0}}.$$

Note que, de (1), temos $c_j = c_j(N) \to 0$ quando $N \to +\infty$. Definindo

$$u := u(N) = \sum_{l=1}^{p} a_l E(\gamma_l) + \sum_{j=1}^{q} c_j E\Big(\frac{\lambda_j}{m_0}\Big),$$

teremos que $u \in U$ para todo N suficientemente grande.

Nosso objetivo é mostrar que, para todo N é suficientemente grande, $u = u(N)$ satisfaz

$$\begin{cases} T^N u^{m_0} \in V, \\ T^N u^m \in W, \quad \text{para } m \in \{m_0+1, \ldots, m_1\}. \end{cases}$$

Então precisamos estudar as potências de u. A fórmula multinomial nos dá

$$u^m = \sum_{d=0}^{m} \sum_{\substack{\mathbf{l} \in I_p^{m-d} \\ \mathbf{j} \in I_q^d}} \alpha(\mathbf{l}, \mathbf{j}, d, m) a_{\mathbf{l}} c_{\mathbf{j}} E\left(\gamma_{l_1} + \cdots + \gamma_{l_{m-d}} + \frac{\lambda_{j_1} + \cdots + \lambda_{j_d}}{m_0}\right).$$

Aplicando T^N a u^m, usando linearidade e autovetores/autovalores, vemos que é preciso estudar o comportamento, com $N \to +\infty$, dos termos

$$c_{\mathbf{j}}(N)\left[\phi\left(\gamma_{l_1} + \cdots + \gamma_{l_{n-d}} + \frac{\lambda_{j_1} + \cdots + \lambda_{j_d}}{m}\right)\right]^N. \qquad (\star)$$

Para $m \neq m_0$, usando (2) e $c_j \to 0$, segue que $(\star) \to 0$ quando $N \to +\infty$. Logo, teremos $T^N(u^m) \in W$ para $m \in \{m_0 + 1, \dots, m_1\}$ se N é suficientemente grande.
Resta estudarmos o caso $m = m_0$. Temos

$$u^{m_0} = \underbrace{\sum_{d=0}^{m_0-1} \sum_{\substack{\mathbf{l} \in I_p^{m_0-d} \\ \mathbf{j} \in I_q^d}} \alpha(\mathbf{l}, \mathbf{j}, d, m_0) a_{\mathbf{l}} c_{\mathbf{j}} E\left(\gamma_{l_1} + \cdots + \gamma_{l_{m_0-d}} + \frac{\lambda_{j_1} + \cdots + \lambda_{j_d}}{m_0} \right)}_{=: v_1}$$

$$+ \underbrace{\sum_{\mathbf{j} \in I_q^{m_0} \setminus D_q} \alpha(\mathbf{j}, m_0) c_{\mathbf{j}} E\left(\frac{\lambda_{j_1} + \cdots + \lambda_{j_{m_0}}}{m_0} \right)}_{=: v_2}$$

$$+ \underbrace{\sum_{j=1}^{q} c_j^{m_0} E(\lambda_j)}_{=: v_3} =: v_1 + v_2 + v_3,$$

onde D_q é a diagonal de I_q^m, isto é, o conjunto das m-uplas $(j, ..., j)$ com $1 \leq j \leq q$.

Pelo mesmo argumento anterior, temos $T^N(v_1) \to 0$ quando $N \to \infty$. Mais ainda, como $t \in [0,1] \mapsto \log|\phi(tw_1 + (1-t)w_2)|$ é estritamente convexa, temos

$$\left|\phi\left(\frac{\lambda_{j_1} + \cdots + \lambda_{j_m}}{m}\right)\right| < |\phi(\lambda_{j_1})|^{1/m} \cdots |\phi(\lambda_{j_m})|^{1/m}.$$

Daí, concluímos que

$$\begin{aligned}
&|c_{\mathbf{j}}(N)| \cdot \left|\phi\left(\frac{\lambda_{j_1} + \cdots + \lambda_{j_m}}{m}\right)\right|^N \\
&\quad = \left|\frac{b_{\mathbf{j}}^{1/m}}{|\phi(\lambda_{j_1})|^{N/m} \cdots |\phi(\lambda_{j_n})|^{N/m}}\right| \cdot \left|\phi\left(\frac{\lambda_{j_1} + \cdots + \lambda_{j_m}}{m}\right)\right|^N \\
&\quad = |b_{\mathbf{j}}^{1/m}| \cdot \Bigg(\underbrace{\frac{\left|\phi\left(\frac{\lambda_{j_1} + \cdots + \lambda_{j_m}}{m}\right)\right|}{|\phi(\lambda_{j_1})|^{1/m} \cdots |\phi(\lambda_{j_m})|^{1/m}}}_{<1}\Bigg)^N \longrightarrow 0 \ \text{ as } \ N \to \infty,
\end{aligned}$$

o que mostra que $T^N(v_2) \to 0$ quando $N \to \infty$.

Finalmente, pela definição de c_j, $j = 1, ..., q$, temos

$$T^N v_3 = \sum_{j=1}^{q} b_j E(\lambda_j) \in V$$

para todo $N \in \mathbb{N}$. Isto completa a prova. $\square$

Corolário

Seja $\phi \in H(\mathbb{C})$ de tipo exponencial que não seja múltipla de uma exponencial. Suponha que $|\phi(0)| > 1$ e que exista $w \in \mathbb{C}$ tal que $|\phi(tw)| \to 0$ quando $t \to +\infty$. Então $\phi(D)$ admite uma álgebra hipercíclica.

Exemplo

Seja $P \in \mathbb{C}[z]$ não-constante tal que $|P(0)| > 1$. Se $\phi(z) = P(z)e^z$, então $\phi(D)$ admite uma álgebra hipercíclica.

Problema

Se $P(z) = 2 + z$, então $P(0) = 2 > 0$ mas não existe direção $w \in \mathbb{C}$ tal que $P(tw) \xrightarrow{t \to +\infty} 0$. E agora José???

Perspectivas

- Aplicação em outros contextos ($T_f : L^p(X) \to L^p(X)$ par example?)
- Generalização dos contextos atuais
- Mudança de perspectiva/técnica