

Chapitre 3 : sous-espaces vectoriels de \mathbb{K}^n

Dans tout le chapitre le symbole \mathbb{K} désigne indifféremment l'ensemble \mathbb{R} des nombres réels ou l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes.

1 Définitions et premières propriétés

1.1 Définitions, exemples

On va définir la notion d'espace vectoriel. Dans ce qui suit, il faut penser que E désigne \mathbb{R}^n (par exemple lorsque $n = 2$, \mathbb{R}^2 n'est rien d'autre que le plan euclidien) ou \mathbb{C}^n .

Définition 1. Un espace vectoriel sur \mathbb{K} est un triplet $(E, +, \cdot)$ dans lequel

- (i) E est un ensemble non vide dont les éléments sont appelés vecteurs,
- (ii) $+$ est une loi de composition interne sur E telle que $(E, +)$ soit un groupe abélien dont l'élément neutre est noté 0 et l'inverse de x est noté $-x$: Ceci signifie que l'on peut additionner deux vecteurs : $x \in E, y \in E \Rightarrow x + y \in E$; si $y = 0$, $x + 0 = x$; $x + (-x) = (-x) + x = 0$.
- (iii) \cdot est une application de $\mathbb{K} \times E$ dans E , appelée produit externe, vérifiant
 - a) $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x \quad \forall (\lambda, \mu, x) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K} \times E$ (distributivité du produit externe par rapport à la l'addition des scalaires),
 - b) $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y \quad \forall (\lambda, x, y) \in \mathbb{K} \times E \times E$ (distributivité du produit externe par rapport à la l'addition des vecteurs),
 - c) $\lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda\mu) \cdot x \quad \forall (\lambda, \mu, x) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K} \times E$ (associativité mixte),
 - d) $1 \cdot x = x \quad \forall x \in E$ (1 est neutre pour le produit externe).

Le $+$ est la loi d'addition sur les vecteurs (par exemple $(1, 2) + (2, 3) = (3, 5)$ dans \mathbb{R}^2 et le \cdot est la loi de multiplication par un scalaire (dans \mathbb{R}^2 , $2(4, 2) = (8, 4)$ et on ne note plus le \cdot). Cette définition est le point de départ pour définir les objets et les notions usuelles d'algèbre linéaire. Ceci revient aux 8 axiomes suivants (les 4 premiers portant sur la nature de E , et les 4 suivants sur la loi externe) :

1. $\forall x, y \in E, x + y = y + x$
2. $\forall x, y, z \in E, x + (y + z) = (x + y) + z$
3. $\forall x \in E, x + 0 = x$ (existence de l'élément neutre dans E)
4. $\forall x \in E, x + (-x) = 0$ (existence d'un symétrique)
5. $\forall x \in E, 1 \cdot x = x$
6. $\forall \alpha, \beta \in K, \forall x, y \in E, \alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha\beta) \cdot x$
7. $\forall \alpha \in K, \forall x, y \in E, \alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$
8. $\forall \alpha, \beta \in K, (\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$

Néanmoins, on pourra essentiellement retenir dans ce cours la **définition suivante** (plus succincte).

Définition 2. 1. On appelle scalaire tout élément de \mathbb{K} et vecteur tout n -uplet $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$.
Le vecteur nul $(0, \dots, 0)$ est noté 0 .

2. La somme de deux vecteurs $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ est définie par $x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$.
3. Le produit d'un vecteur $x = (x_1, \dots, x_n)$ par un scalaire λ est défini par $\lambda x = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$.
4. L'ensemble \mathbb{K}^n de tous les vecteurs, muni des deux opérations ci-dessus, est appelé espace vectoriel.

Pour identifier si un ensemble F est un espace vectoriel, en pratique, on revient rarement à la définition avec les 8 axiomes. On cherche plutôt à montrer que F est un sous-espace vectoriel d'un certain espace vectoriel plus grand (déjà identifié).

Définition 3. Un ensemble $F \subset \mathbb{K}^n$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{K}^n si

1. $0 \in F$,
2. $\forall x, y \in F, x + y \in F$,
3. $\forall x \in F, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda x \in F$.

Notons que si F est un sous-espace vectoriel de \mathbb{K}^n , alors F est aussi un espace vectoriel sur \mathbb{K} .

Proposition 1. L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène d'inconnue $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{K}^n .

(à vérifier à la main en utilisant les notations matricielles).

Proposition 2. Si F et G sont des sous-espaces vectoriels de \mathbb{K}^n , alors $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{K}^n .

(à vérifier à la main).

Remarque 1. Attention, ce n'est pas vrai pour $F \cup G$.

Exercice 4. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de \mathbb{K}^n . Montrer que $F \cup G$ est un sous espace vectoriel de \mathbb{K}^n si et seulement si $F \cup G$ ou $G \cup F$.

1.2 Combinaisons linéaires

Définition 4. Soient x et y des vecteurs non nuls. On dit que x et y sont colinéaires s'il existe un scalaire λ tel que $y = \lambda x$.

Définition 5. Soient y, x_1, \dots, x_m des vecteurs. On dit que y est combinaison linéaire de x_1, \dots, x_m s'il existe des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ tels que

$$y = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_m x_m.$$

Proposition 3. Soient v_1, \dots, v_m des vecteurs. L'ensemble des vecteurs qui sont combinaisons linéaires de v_1, \dots, v_m est un sous-espace vectoriel de \mathbb{K}^n . Il est appelé sous-espace vectoriel engendré par v_1, \dots, v_m et est noté $\text{Vect}(v_1, \dots, v_m)$:

$$\text{Vect}(v_1, \dots, v_m) = \left\{ \sum_{j=1}^m \lambda_j v_j ; \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{K} \right\}.$$

(on vérifie aisément qu'il s'agit d'un sev de \mathbb{K}^m).

Méthodologie pour de nombreux exercices. De nombreux exercices demandent de passer de famille génératrice à un système d'équations cartésiennes. Autrement dit, étant donné un sous-espace vectoriel F de \mathbb{R}^n qui s'écrit :

$$F = \text{Vect}(v_1, \dots, v_m), \tag{1}$$

on demande d'écrire F comme intersection d'hyperplans, c.a.d., on demande de trouver $p \in \mathbb{N}^*$ et $A = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq n}$ tels que l'on ait :

$$x \in F \iff \begin{cases} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n = 0, \\ \vdots \\ a_{p,1}x_1 + \cdots + a_{p,n}x_n = 0. \end{cases} \quad (2)$$

L'écriture de F sous la forme (2) s'appelle équation cartésienne de F . Ainsi, on dispose de deux écritures pour les éléments de F : l'écriture cartésienne donnée par (2) et l'écriture dans le sous-espace vectoriel engendré par (v_1, \dots, v_m) où

$$x \in F \iff \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p, x = \sum_{j=1}^p \lambda_j v_j \quad (3)$$

Pour trouver un tel système donné par (2), on est amené à résoudre un système linéaire dont les inconnues sont les λ_j . Résoudre ce système "élimine" les paramètres et conduit à un système d'équations cartésiennes pour F . Plutôt que d'écrire la méthode générale, on fera quelques exercices standards dans \mathbb{R}^3 ou \mathbb{R}^4 .

Exercice 5. Soit $a = (2, -1, 1)$ et $b = (1, 0, 1)$. Montrer qu'une équation cartésienne de $\text{Vect}(a, b)$ est $x + y - z = 0$.

On peut aussi s'intéresser à la questions réciproque, c.a.d., étant donnée un système d'équations cartésiennes de F comme (2), on cherche à trouver une base de F , $\{v_1, \dots, v_m\}$ telle que tout vecteur $x \in F$ se décompose de manière unique sur $\{v_1, \dots, v_m\}$ (voir (3)). Pour cela, on peut échelonner le système (2), trouver les inconnues principales et non principales, et en déduire une base de F (dont la dimension est le nombre d'inconnues non principales).

1.3 Somme de sous-espaces vectoriels

Définition 6. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de \mathbb{K}^n . La somme de F et G est l'ensemble

$$F + G = \{x + y, x \in F, y \in G\}.$$

Proposition 4. La somme de deux sous-espaces vectoriels de \mathbb{K}^n est un sous-espace vectoriel de \mathbb{K}^n .

(vérifier à la main).

Proposition 5. Soient $v_1, \dots, v_m, w_1, \dots, w_p$ des vecteurs. On a

$$\text{Vect}(v_1, \dots, v_m) + \text{Vect}(w_1, \dots, w_p) = \text{Vect}(v_1, \dots, v_m, w_1, \dots, w_p).$$

(vérifier à la main).

Définition 7. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de \mathbb{K}^n tels que $F \cap G = \{0\}$. La somme de F et G est alors dite directe et est notée $F \oplus G$. Si $F \oplus G = \mathbb{K}^n$, on dit que F et G sont supplémentaires, ou que F (resp. G) est un supplémentaire de G (resp. F).

Proposition 6. Soient F, G, H trois sous-espaces vectoriels de \mathbb{K}^n tels que $H = F \oplus G$. Alors tout vecteur de H se décompose de manière unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G .

(l'unicité provient de la somme directe de F et G).

2 Familles libres, familles génératrices, bases

2.1 Familles libres

Définition 8. (i) Une famille (v_1, \dots, v_m) de vecteurs est dite **libre** si pour toute famille $(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ de scalaires

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m = 0 \implies \lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0.$$

On dit aussi que les vecteurs v_1, \dots, v_m sont **linéairement indépendants**.

(ii) Une famille qui n'est pas libre est dite **liée**.

Proposition 7. Une famille est liée si et seulement si l'un au moins de ses vecteurs est combinaison linéaire des autres.

Remarque 2. 1. Un vecteur forme une famille liée si et seulement si c'est le vecteur nul.

2. Deux vecteurs non nuls forment une famille liée si et seulement si ils sont colinéaires.

Proposition 8. Soit (v_1, \dots, v_m) une famille libre. Alors

- aucun des v_i n'est nul ;
- les v_i sont deux à deux non colinéaires ;
- toute sous-famille de (v_1, \dots, v_m) est libre.

Proposition 9. Soit (v_1, \dots, v_m) une famille libre et y un vecteur. Alors y est combinaison linéaire de v_1, \dots, v_m si et seulement si la famille (v_1, \dots, v_m, y) est liée.

Démonstration. En effet, y est combinaison linéaire de v_1, \dots, v_m si et seulement si y s'écrit $y = \sum_{k=1}^m \lambda_k v_k$ où $\lambda_k \in \mathbb{K}$. \square

2.2 Familles génératrices

Définition 9. Soit F un sous-espace vectoriel de \mathbb{K}^n . Une famille (v_1, \dots, v_m) de vecteurs est dite **génératrice** de F si $\text{Vect}(v_1, \dots, v_m) = F$.

Exemple : (i) Les vecteurs (e_1, \dots, e_n) définis par $e_i = (e_i^1, \dots, e_i^n)$, $e_i^j = 1$ si $i = j$, $e_i^j = 0$ si $i \neq j$, forment une famille génératrice de \mathbb{K}^n (penser à $(1, 0)$ et $(0, 1)$ dans \mathbb{R}^2 ; à $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, et $(0, 0, 1)$ dans \mathbb{R}^3).

(ii) Donner une famille génératrice du sev $F := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x = 0\}$.

Le prochain résultat appelé aussi **lemme de Steinitz** est fondamental pour la suite (pour montrer que toutes les bases en dimension finie ont même cardinal)

Proposition 10. Soit F un sous-espace vectoriel de \mathbb{K}^n . Si (v_1, \dots, v_m) est une famille génératrice de F , alors toute famille de $m + 1$ vecteurs de F est liée.

Démonstration. Par récurrence sur $m \geq 1$. On vérifie facilement que c'est vrai pour $m = 1$. On suppose le résultat vrai jusqu'au rang $m - 1$ (avec $m \geq 2$). Prenons alors (w_1, \dots, w_{m+1}) une famille de $m + 1$ vecteurs de F . Il vient :

$$\forall 1 \leq i \leq m + 1, \exists (\lambda_{i,1}, \dots, \lambda_{i,m}) \in \mathbb{K}^m, w_i = \sum_{k=1}^m \lambda_{i,k} v_k.$$

Si pour tout $1 \leq i \leq m + 1$ on a $\lambda_{i,m} = 0$ alors les vecteurs $(w_i)_{1 \leq i \leq m}$ se décomposent sur les $m - 1$ vecteurs v_1, \dots, v_{m-1} . Ainsi, $(w_i)_{1 \leq i \leq m}$ est liée et à fortiori $(w_i)_{1 \leq i \leq m+1}$.

Sinon, il existe $1 \leq i \leq m + 1$ tel que $\lambda_{i,m} \neq 0$. On suppose $i = m + 1$ quitte à réindexer. Posons

$$\tilde{w}_i = w_i - \frac{\lambda_{i,m}}{\lambda_{m+1,m}} w_{m+1}, \quad 1 \leq i \leq m$$

Ces m vecteurs se décomposent uniquement sur $\{v_1, \dots, v_{m-1}\}$ (par construction). Ainsi, la nouvelle famille $(\tilde{w}_i)_{1 \leq i \leq m}$ est liée. En utilisant la définition de \tilde{w}_i , il vient que la famille $(w_i)_{1 \leq i \leq m+1}$ est bien liée. \square

Corollaire 11. (i) Toute famille d'au moins $n + 1$ vecteurs de \mathbb{K}^n est liée.
(ii) Toute famille libre de \mathbb{K}^n est de cardinal inférieur ou égal à n .

Démonstration. Pour (i), on remarque que les n vecteurs $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ forment une famille génératrice de \mathbb{K}^n ce qui permet d'appliquer le résultat précédent. Le point (ii) est une conséquence de (i) (par l'absurde). \square

2.3 Bases

Définition 10. Soit F un sous-espace vectoriel de \mathbb{K}^n . On dit qu'une famille (v_1, \dots, v_m) de vecteurs est une base de F si c'est une famille libre et génératrice.

Théorème 12 (théorème de la base incomplète). Soit F un sous-espace vectoriel de \mathbb{K}^n non réduit à $\{0\}$. Soient (v_1, \dots, v_m) et (w_1, \dots, w_p) deux familles de vecteurs de F respectivement libre et génératrice. On peut compléter (v_1, \dots, v_m) par des vecteurs de (w_1, \dots, w_p) pour obtenir une base de F .

Démonstration. C'est une conséquence du lemme de Steinitz (plus précisément du corollaire 11). On construit la base en considérant une sous-famille libre \mathcal{F} de $\{v_1, \dots, v_m, w_1, \dots, w_p\}$ contenant la sous-famille $\{v_1, \dots, v_m\}$ et de cardinal maximal. Appelons

$$\{v_1, \dots, v_m, w_{i_1}, \dots, w_{i_p}\}$$

une telle famille de cardinal $m + p$ avec $p \in \mathbb{N}$. Par maximalité, pour tout $j \notin \{i_1, \dots, i_p\}$, la famille

$$\{v_1, \dots, v_m, w_{i_1}, \dots, w_{i_p}, w_j\}$$

est liée et donc w_j pour $j \notin \{i_1, \dots, i_p\}$ est combinaison linéaire des vecteurs $v_1, \dots, v_m, w_{i_1}, \dots, w_{i_p}$. Comme tout vecteur x se décompose sur $(w_k)_{1 \leq k \leq n}$, on a :

$$x = \sum x_{i_k} w_{i_k} + \sum_{j \neq i_k} x_j w_j.$$

On en déduit que $\{v_1, \dots, v_m, w_{i_1}, \dots, w_{i_p}\}$ est bien génératrice. Etant aussi libre, c'est une base de \mathbb{K}^n . \square

Théorème 13. Tout sous-espace vectoriel F de \mathbb{K}^n non réduit à $\{0\}$ admet une base.

Démonstration. Soit $\{v_1, \dots, v_m\}$ une famille libre de l'espace F et de cardinal maximal et soit $v \in F$. La famille $\{v_1, \dots, v_m, v\}$ de F n'est pas libre par maximalité. Ainsi, v se décompose sur $\{v_1, \dots, v_m\}$ qui est libre et génératrice et est donc une base. \square

Exemple. Soit dans \mathbb{K}^n , $e_i := (0, \dots, 1, \dots, 0)$ où le 1 est à la i -ième position. La famille (e_1, \dots, e_n) est une base de \mathbb{K}^n , dite **base canonique** :

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, \dots, 0, 0) \\ e_2 &= (0, 1, \dots, 0, 0) \\ &\vdots \\ e_{n-1} &= (0, 0, \dots, 1, 0) \\ e_n &= (0, 0, \dots, 0, 1) \end{aligned}$$

Proposition 14. Soit F un sous-espace vectoriel de \mathbb{K}^n et (v_1, \dots, v_m) une base de F . Tout vecteur x de F se décompose de manière unique sous la forme

$$x = t_1 v_1 + \dots + t_m v_m, \quad t_i \in \mathbb{K}, \quad 1 \leq i \leq m.$$

Les scalaires t_1, \dots, t_m sont appelés coordonnées de x dans la base (v_1, \dots, v_m) .

3 Dimension

3.1 Définitions

Théorème 15. Soit F un sous-espace vectoriel de \mathbb{K}^n non réduit à $\{0\}$. Toutes les bases de F comportent le même nombre de vecteurs.

Démonstration. Si on prend deux bases \mathcal{E} et \mathcal{E}' , on considère la première comme système générateur et la seconde comme famille libre. Il vient alors que $\text{card}(\mathcal{E}') \leq \text{card}(\mathcal{E})$. On a aussi l'autre inégalité en inversant les rôles des deux familles. \square

Définition 11. Soit F un sous-espace vectoriel de \mathbb{K}^n non réduit à $\{0\}$. On appelle dimension de F , notée $\dim F$ le nombre de vecteurs de toute base de F . Par convention, $\dim\{0\} = 0$.

L'espace vectoriel $\{0\}$ ne possède aucune base car il n'y a pas de famille libre dans cet espace car $1 \cdot 0 = 0$, donc le vecteur nul $\{0\}$ est lié. La dimension d'un sous-espace vectoriel F de \mathbb{K}^n non réduit à $\{0\}$ est intuitivement le nombre de paramètres libres dont dépend un vecteur de F (ce nombre étant indépendant du nombre de composantes des vecteurs de \mathbb{K}^n qui est n).

Proposition 16. On a $\dim \mathbb{K}^n = n$ et $\dim F \leq n$ pour tout sous-espace vectoriel F de \mathbb{K}^n .

Définition 12. Soit F un sous-espace vectoriel de \mathbb{K}^n . Si $\dim F = 1$, on dit que F est une droite vectorielle. Si $\dim F = 2$, on dit que F est un plan vectoriel. Si $\dim F = n - 1$, on dit que F est un hyperplan.

3.2 Propriétés

La propriété ci-dessous est fondamentale dans de nombreux exercices pour montrer que deux sev sont égaux : plutôt que de montrer une double inclusion, une seule suffit + un argument de dimension !

Proposition 17. Soit F, G deux sev de \mathbb{K}^n . Alors :

$$F \subset G \text{ et } \dim(F) = \dim(G) \Rightarrow F = G.$$

Démonstration. Soit $\{v_1, \dots, v_m\}$ une base de F . Comme $F \subset G$, on complète cette famille en une base de G notée $\{v_1, \dots, v_m, w_1, \dots, w_p\}$ où chaque $w_i \in G$, $1 \leq i \leq p$. Comme $\dim(F) = \dim(G)$, seuls les vecteurs v_1, \dots, v_m suffisent pour avoir une base de G (sinon on aurait $\dim(G) > \dim(F)$). Ainsi, $\{v_1, \dots, v_m\}$ qui est une base de F est aussi une base de G , donc $F = G$. \square

Proposition 18. Soit F un sous-espace vectoriel de \mathbb{K}^n tel que $\dim F = m$.

1. Si p vecteurs de F sont linéairement indépendants, alors $p \leq m$.
2. Si m vecteurs de F sont linéairement indépendants, alors ils forment une base de F .
3. Si p vecteurs de F engendrent F , alors $p \geq m$.
4. Si m vecteurs de F engendrent F , alors ils forment une base de F .

Corollaire 19. Soit F un sous-espace vectoriel de \mathbb{K}^n tel que $\dim F = n$, alors $F = \mathbb{K}^n$.

Proposition 20. Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de \mathbb{K}^n en somme directe, alors

$$\dim(F \oplus G) = \dim F + \dim G.$$

Démonstration. On considère une base de F et une base de G , notées $\{f_1, \dots, f_r\}$ et $\{g_1, \dots, g_s\}$ respectivement. La réunion de ces deux familles est bien génératrice de $F + G$. De plus, si $\sum_{i=1}^r \alpha_i f_i + \sum_{i=1}^s \beta_i g_i = 0$, alors, comme $F \cap G = \{0\}$, on a immédiatement que $\alpha_i = 0$ et $\beta_i = 0$ pour tout i . Ainsi, la dimension de $F \oplus G$ est bien $r + s$. \square

Proposition 21. Soient F et G des sous-espace vectoriels de \mathbb{K}^n . On a

$$\dim(F + G) + \dim(F \cap G) = \dim F + \dim G.$$

Démonstration. Soit H un supplémentaire de $F \cap G$ dans G de sorte que $G = F \cap G \oplus H$. On a $F + G = F \oplus H$. En effet, si $x \in F + G$, alors $x = y + z$ avec $y \in F$, $z \in G$. De plus, $z = u + v$ avec $u \in F \cap G$ et $v \in H$. Ainsi, $x = (y + u) + v \in F + H$. Supposons $x \in F \cap H$. Alors, $x \in F \cap G$ car $x \in H$ et $H \subset G$. D'où $x = 0$. Ainsi, $\dim(F + G) = \dim(F \oplus H) = \dim F + \dim H = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$ (par le résultat précédent). \square

Corollaire 22. Tout sous-espace vectoriel de \mathbb{K}^n admet un supplémentaire, et si F et G sont supplémentaires alors $\dim F + \dim G = n$.

Démonstration. On applique le théorème de la base incomplète à une famille $\{v_1, \dots, v_m\}$ qui est une base de l'espace F . \square