Une exposition de

l'Hypercyclicité

pour le Séminaire des Doctorants du LMBP

par Fernando V. COSTA JÚNIOR
sous la direction de Frédéric BAYART

Laboratoire de Mathématiques Blaise Pascal – EST
Université Clermont Auvergne – UCA

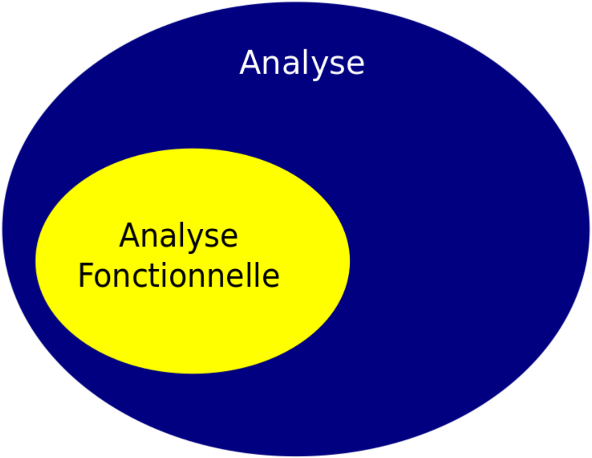
26 mars 2019

Contenu

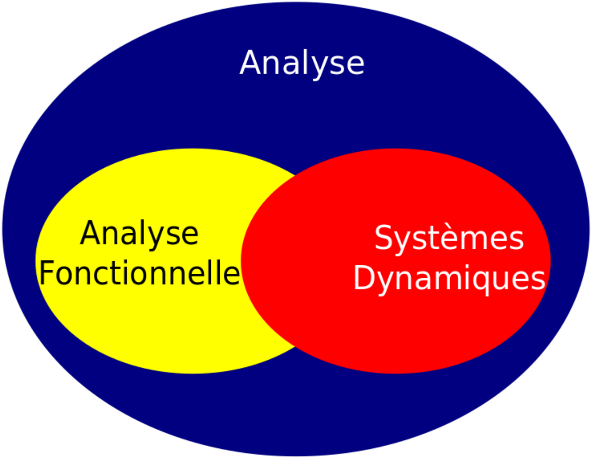
Contenu

Où on se trouve

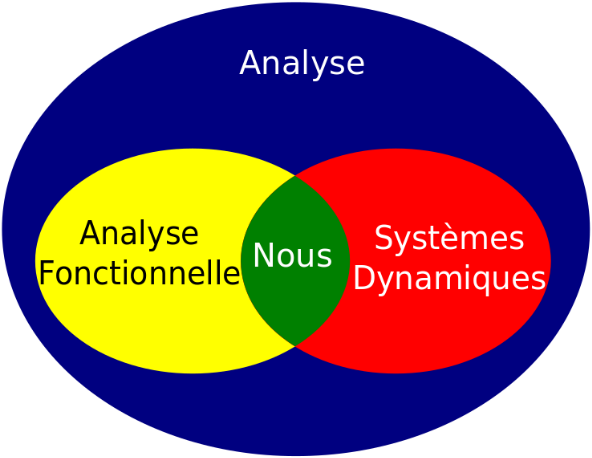
Où on se trouve



Où on se trouve



Où on se trouve



Contenu

Systèmes dynamiques

Définition

Un système dynamique est une paire (T, X) composée par un espace métrique X et une application continue $T : X \to X$.

Définition

Soit (T, X) un système dynamique. L'orbite d'un point $x \in X$ sous T est définie par

$$Orb(x, T) = \{T^n x : n \geq 0\} = \{x, Tx, T^2x, ...\}.$$

Définition

On dit qu'un système (T, X) est hypercyclique quand on peut trouver un vecteur $x \in X$ dont l'orbite $Orb(x, T)$ est dense dans X.

Obs. : C'est facile de voir que quand il y a un vecteur hypercyclique alors il y a plein. En fait...

Définition

Un système dynamique linéaire est une paire (T, X) composée par un espace vectoriel topologique X et une application lineaire continue $T : X \to X$.

Mais POURQUOI tu te réduis aux linéaires ? ?

Théorème de Feldman

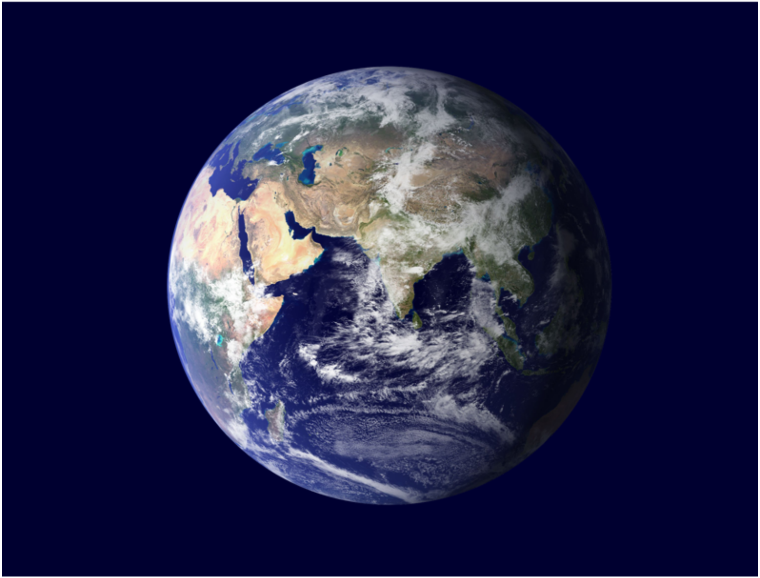
Théorème

Il existe un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ et un opérateur hypercyclique $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ avec la propriété suivante. Pour chaque espace compact et métrisable K et pour chaque application continue $f : K \to K$, il existe un sous-ensemble $L \subset \mathcal{H}$, qui est T-invariant et compact, où f et $T|_L$ sont topologiquement conjugués.

Bref : l'opérateur linéaire T ressemble (dans une partie de l'espace) à n'importe quelle application continue f sur un espace métrique compact !

Contenu

L'effet papillon

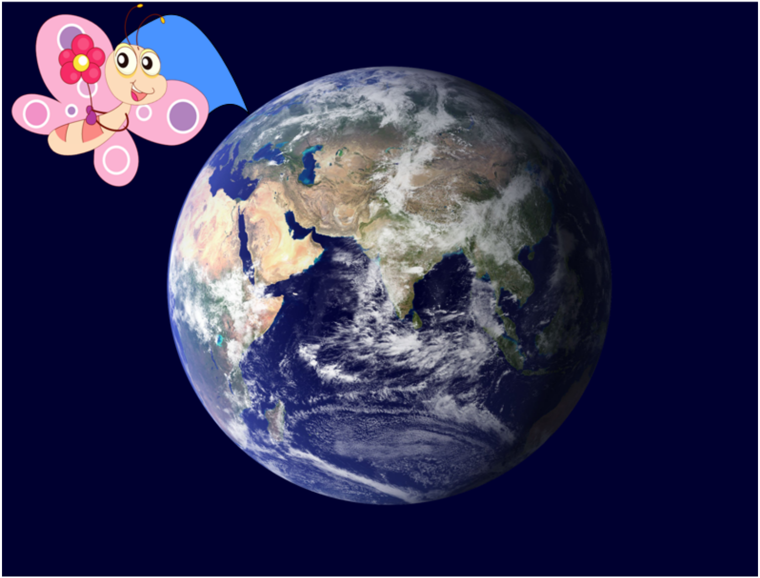


L'effet papillon

L'effet papillon

L'effet papillon

L'effet papillon



L'effet papillon

L'effet papillon

Chaos de Devaney

Le modèle le plus connu du Chaos (discret) est dû à R. Devaney (1989). Ce modèle dit qu'un système (T, X) est chaotique quand : (1) il y a pas mal de points périodiques dans l'espace (une quantité dense) ; et (2) il est "topologiquement transitif".

Définition

On dit qu'un système (T, X) est topologiquement transitif si pour toute paire d'ouverts non vides U et V dans X, il existe $n \geq 0$ tel que $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

Cette définition du Chaos capture bien l'idée de l'effet papillon. En fait...

FAIT : T est topologiquement transitif $\Leftrightarrow$ T est hypercyclique !

La preuve n'est pas difficile ! En fait...

Contenu

Qu'est-ce qu'on peut trouver à l'intérieur de $HC(T)$?

L'ensemble des vecteurs ~~bizarres~~ hypercycliques d'un systeme (T, X) est dénoté par $HC(T)$. Contrairement à ce qu'on pense à première vue sur $HC(T)$, il y a toujours un sous-espace dense dans $HC(T) \cup \{0\}$. Cependant on peut se demander s'il existe des structures plus fortes :

- Sous-espaces hypercycliques ;
- Algèbres hypercycliques.

Contenu

D'autres concepts similaires

On peux trouver dans un système (T, X) des comportements encore plus ~~zinzins~~ étranges :

- hypercyclicité fréquente ;
- hypercyclicité supérieurement fréquente.

Contenu

Des espaces d'intérêt

- Espaces de Banach ;
- Espaces de Hardy ;
- $\omega := \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$;
- $H(\mathbb{C})$;
- Espaces de Fréchet en général. (on peut quand même prendre des poids dans les espaces traditionnels...)

Des opérateurs d'intérêt

- Opérateurs de convolution ;
- Opérateurs de décalage ; (presque toujours pondérés...)
- Translations sur $H(\mathbb{C})$;
- Opérateurs de composition ;
- Adjoints des opérateurs de multiplication.

Contenu

Opérateurs de convolution et algèbres hypercycliques

Chronologiquement...

- D admet une algèbre hypercyclique ;
  (on remarque que $D = P(D)$ avec $P(z) = z$)
- Si $P(0) = 0$, alors $P(D)$ admet une algèbre hypercyclique ;
- Si $|P(0)| < 1$, alors $P(D)$ admet une algèbre hypercyclique ;
- Si $|\phi(0)| < 1$, alors $\phi(D)$ admet une algèbre hypercyclique ;
- Si $|\phi(0)| = 1$ et si quelques conditions sont satisfaites, alors $\phi(D)$ admet une algèbre hypercyclique
- Si $|\phi(0)| > 1$, alors... on ne savait rien. (seulement un exemple)

Théorème

Si $|\phi(0)| > 1$ et si il existe $w \in \mathbb{C}$ tel que $|\phi(tw)| \stackrel{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$, alors $\phi(D)$ admet une algèbre hypercyclique.

Décalage + produit de convolution sur ℓ_1

Théorème

Soit B_w un décalage pondéré borné sur ℓ_1 muni du produit de convolution. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. B_w est hypercyclique ;
2. B_w admet une algèbre hypercyclique dense et infiniment engendrée.

Algèbres hypercycliques communes aux décalages ou dérivations (produit cpc)

Parfois une famille d'opérateurs $\{T_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ admet un vecteur hypercyclique commun (c'est-à-dire que $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} HC(T_\lambda) \neq \emptyset$), parfois elle admet même un espace hypercyclique commun.

Bah pourquoi pas une algèbre… ?

Théorème

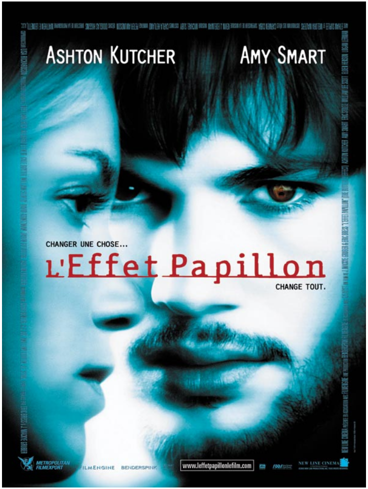
1. Soit $X = \ell_p$ ou c_0 muni du produit cpc. Alors $\bigcap_{\lambda>1} HC(\lambda B) \cup \{0\}$ contient une algèbre non triviale ;
2. Soit $X = H(\mathbb{C})$ muni du produit cpc. Alors $\bigcap_{\lambda>0} HC(\lambda D) \cup \{0\}$ contient une algèbre non triviale.

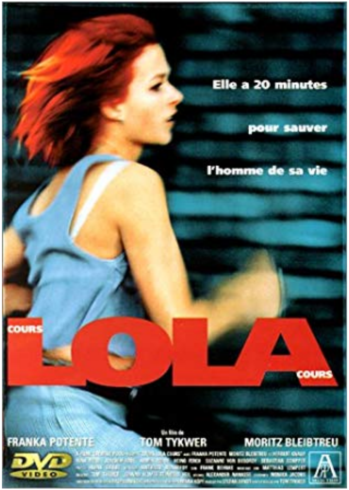
Algèbres supérieurement hypercycliques (produit cpc)

Théorème

Soit X une algèbre de Fréchet muni du produit cpc et B_w un décalage pondéré borné sur X. Si pour tout $m \geq 1$ la série $\sum_{n\geq 1}(w_1 \cdots w_n)^{-1/m} e_n$ converge (inconditionnellement), alors B_w admet une algèbre supérieurement hypercyclique.

À regarder :





* Ne regarde pas L'Effet Papillon 2, 3, 4, 19..., ils sont terribles. *

Muito obrigado !

Ça veut dire “merci beaucoup” en portuguais...