

Feuille 5 : Déterminants

Exercice 1. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Montrer que A n'est pas inversible et que B est inversible (utiliser le déterminant).

Exercice 2. Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer que le déterminant de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ b & a & 0 & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ 0 & 0 & b & a \end{pmatrix}$$

vérifie $\det(A) = a^4 - b^4$. Déterminer ensuite le rang de A en fonction de a et b .

Exercice 3. Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}$$

Exercice 4. 1) Soit $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ deux matrices non nulles telles que $AB = 0$. Montrer que $\det(A) = \det(B) = 0$.

2) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = -I_n$. Montrer que n est pair. Donner un exemple d'une telle matrice pour $n = 2$.

3) Soit $A \in M_{2n+1}(\mathbb{R})$ une matrice anti-symétrique. Montrer que $\det(A) = 0$.

4) Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$. Pour quelles valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$, la matrice $A - \lambda I_2$ n'est pas inversible ?

Exercice 5. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer le rang de A en fonction de a .

Exercice 6. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Calculer judicieusement les déterminants suivants. Pour chacun d'eux, donner une condition nécessaire et suffisante simple, portant sur a, b, c , pour qu'il soit nul.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & a & a \\ a & b & b \\ a & b & c \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}.$$

Indication pour le dernier déterminant : utiliser la linéarité par rapport aux colonnes de la matrice pour se ramener au deuxième déterminant.

Exercice 7. Calculer le déterminant d'ordre n suivant :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

(il y a des 1 sur la diagonale, première ligne et première colonne).

Exercice 8. On se donne a_1, a_2, \dots, a_n des nombres réels ou complexes. Calculer le déterminant suivant, dit "de Vandermonde".

$$V(a_1, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Exercice 9. Soient $a \neq b$ deux réels. Montrer par récurrence sur n que

$$\begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a+b & ab & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & a+b & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & ab \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix} = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b}.$$

Exercice 10. (révision) Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

On appelle $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique \mathcal{B} de \mathbb{R}^2 est la matrice A .

1) Déterminer toutes les valeurs $\lambda \in \mathbb{R}$ et les vecteurs colonnes $x \in \mathbb{R}^2$ non nuls tels que

$$f(x) = \lambda x.$$

2) Dédire de 1) une base de \mathbb{R}^2 telle que la matrice de f dans cette base soit diagonale.

3) Calculer la matrice de passage P de la base \mathcal{B} à la base \mathcal{B}' . Inverser P .

3) En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 11. Retour sur les matrices de rang 1.

1) On se place dans $M_2(\mathbb{R})$. Montrer que toute matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$ vérifie

$$A^2 - \text{Tr}(A)A + \det(A)I_2 = 0.$$

En déduire qu'une matrice de rang 1 vérifie $A^2 = \text{Tr}(A)A$.

2) [question plus difficile¹] On se place dans $M_n(\mathbb{R})$. Soit A une matrice de rang 1. On admet² qu'il existe $X, Y \in \mathbb{R}^n$ deux vecteurs colonnes de \mathbb{R}^n tels que $A = XY^T$. Montrer que $A^2 = (Y^T X)A$. En déduire que

$$A^2 = \text{Tr}(A)A.$$

3) [question plus difficile]. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1. Montrer que

$$\det(A + I_n) = 1 + \text{Tr}(A)$$

(indication : former une base de \mathbb{R}^n constituée du noyau³ de A et d'un supplémentaire du noyau).

Exercice 12. (Cet exercice dépasse largement le cadre du cours d'algèbre 2).

Soit A, B deux matrices réelles telles que $AB = BA$. Montrer que $\det(A^2 + B^2) \geq 0$. Avez vous un contre-exemple si A et B ne commutent pas ?

indication : justifier que l'on a $\det(A^2 + B^2) = \det((A + iB)(A - iB))$ puis conclure.

Exercice 13. (Cet exercice dépasse largement le cadre du cours d'algèbre 2).

Soit p un nombre premier et A une matrice à coefficients dans \mathbb{Z} qui vérifie $A^2 = pA$. Montrer que sa trace est congru à 0 modulo p . (Indication : calculer les valeurs propres de la matrice A ; utiliser que A est trigonalisable; calculer la trace de A).

Exercice 14. 1) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice non nulle qui s'écrit $A = XY^T$ où X est un vecteur colonne de \mathbb{R}^n et Y^T un vecteur ligne (transposé de Y).

a) Ecrire une telle matrice lorsque $n = 2$. Montrer que les 2 colonnes de A sont proportionnelles.

b) Dans le cas général (dimension n), écrire pareillement la matrice A et montrer qu'une telle matrice est de rang 1.

2) Soit A une matrice de rang 1. On écrit A en colonnes i.e. $A = [C_1 \cdots C_n]$.

a) Montrer qu'il existe un vecteur colonne X de \mathbb{R}^n tel que pour tout $1 \leq j \leq n$ il existe $y_j \in \mathbb{R}$ tel que $C_j = y_j X$.

b) Déduire que $A = XY^T$ où $Y^T = (y_1, \dots, y_n)$.

1. On rappelle qu'étant donné deux vecteurs colonnes X, Y , le produit $XY^T = (x_i y_j)_{1 \leq i, j \leq n} \in M_n(\mathbb{R})$ est bien posé : il s'agit du produit d'un vecteur colonne et d'un vecteur ligne formant ainsi une matrice (n, n) . On rappelle que le produit $X^T Y = \sum_{i=1}^n x_i y_i \in \mathbb{R}$ est bien posé : il s'agit d'un produit d'un vecteur ligne par un vecteur colonne formant ainsi un scalaire (produit scalaire).

2. Voir exercice 6.

3. Noyau de l'endomorphisme canoniquement associé à A .