Chapitre 2: Matrices

Térence Bayen

Université d'Avignon

Algèbre 2
L1S2 MI/MP
Janvier 2021

Rappel sur les systèmes de systèmes de Cramer

Définition

Un système linéaire avec n équations et n inconnues

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 & & (L_1) \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 & & (L_2) \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots & & \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots & & \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & b_n & & (L_n) \end{array}\right. .$$

est dit système de Cramer si sous forme échelonnée, il admet n pivots non nuls.

Proposition

Tout système de Cramer admet une seule et unique solution. Son rang vaut n.

Exercice à paramètre sur les systèmes linéaires

Avant de commencer les matrices

Exercice : donner le rang du système en fonction de m :

$$\left\{\begin{array}{llll} 2x & +3y & +z & =4 \\ -x & +my & +2z & =5 \\ 7x & +3y & +(m-5)z & =7 \end{array}\right.$$

voir solution sur le transparents systèmes linéaires

Définition

Dans tout le chapitre : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ (pensez à $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ en première lecture).

Définition

Une matrice à coefficients dans $\mathbb{K}$ de type (m, n) est un tableau à m lignes et n colonnes représenté sous la forme

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Les $a_{ij} \in \mathbb{K}$ sont les coefficients de la matrice. On note souvent

$$A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}.$$

Les ensembles $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Soit $m, n \geq 1$ deux entiers.

Définition

On note $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$ de type (m, n).

Définition

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$ de type (n, n). On parle des matrices carrés de taille n à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Définition

Deux matrices $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$ *et* $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$ *sont égales si elles ont les mêmes coefficients, c'est à dire* $a_{ij} = b_{ij}\ \forall (i,j) \in \{1, ..., m\} \times \{1, ..., n\}$.

Définition

Une matrice est dite nulle si tous ses coefficients sont nuls. Une telle matrice est notée 0. *Ainsi, si* $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$,

$$A = 0 \iff a_{ij} = 0\ \forall (i,j) \in \{1, ..., m\} \times \{1, ..., n\}.$$

Définition

On appelle sous-matrice d'une matrice A *une matrice obtenue en supprimant certaines lignes et certaines colonnes de* A.

Matrices particulières

a) Matrice ligne

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1n}(\mathbb{K})$$

b) Matrice colonne

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m1}(\mathbb{K})$$

c) Matrice carrée

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K}) =: \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

Certaines matrices carrées sont elles-mêmes particulières.
i) Matrice triangulaire inférieure

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

ii) Matrice triangulaire supérieure

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

iii) Matrice diagonale

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(a_{11}, ..., a_{nn})$$

iv) Matrice identité

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(1, ..., 1) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

Autres exemples (dans les matrices carrés)

1. Matrices scalaires : $A = \lambda I_n$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$.
2. Matrices symétriques : soit $A \in M_n(K)$ une matrice carré. On dit que A est symétrique, resp. anti-symétrique si et seulement si pour tout $1 \leq i,j \leq n$ on a $a_{i,j} = a_{j,i}$, resp. $a_{i,j} = -a_{j,i}$.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 10 \end{pmatrix}}_{symetrique}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 5 \\ 3 & -5 & 0 \end{pmatrix}}_{anti-symetrique},$$

Exercice

- Combien faut-il de coefficients pour déterminer une matrice symétrique (resp. anti-symétrique) ?
- Ecrire toute matrice carré A comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice anti-symétrique.

Autres exemples (dans les matrices carrés)

1. Matrices scalaires : $A = \lambda I_n$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$.
2. Matrices symétriques : soit $A \in M_n(K)$ une matrice carré. On dit que A est symétrique, resp. anti-symétrique si et seulement si pour tout $1 \leq i, j \leq n$ on a $a_{i,j} = a_{j,i}$, resp. $a_{i,j} = -a_{j,i}$.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 10 \end{pmatrix}}_{symetrique}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 5 \\ 3 & -5 & 0 \end{pmatrix}}_{anti-symetrique},$$

Exercice

- Combien faut-il de coefficients pour déterminer une matrice symétrique (resp. anti-symétrique) ?
- Ecrire toute matrice carré A comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice anti-symétrique.

(Indication : on verra plus loin que $A = \frac{A+A^\top}{2} + \frac{A-A^\top}{2}$ où A^T est la transposée de A.)

Opérations

Définition

Soient $A = (a_{ij})$ *et* $B = (b_{ij})$ *deux matrices de* $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$*. On définit la matrice* $A + B$ *par*

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}) \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K}).$$

(interdit d'ajouter des matrices de taille différente ! ! ! !)

Définition

Soient $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$ *et* $\alpha \in \mathbb{K}$*. On définit la matrice* αA *par*

$$\alpha A = (\alpha a_{ij}) \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K}).$$

Proposition

Soient $A, B, C \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$ *et* $\alpha \in \mathbb{K}$*. On a*

$$A+B = B+A\ ;\ (A+B)+C = A+(B+C)\ ;\ \alpha(A+B) = \alpha A+\alpha B.$$

Exemple

$$I_2 + \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$8 \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & 3 & -5 \\ 6 & -18 & -10 \\ 9 & 9 & 9 \end{pmatrix}$$

Matrices de base $E_{i,j}$

Definition

Les matrices dites matrices de base [1] dans $M_n(\mathbb{K})$ sont les matrices $E_{i,j}$, $1 \leq i, j \leq n$ telles que

$$\left| \begin{array}{l} (E_{i,j})_{k,l} = 0 \quad \text{si} \quad (k,l) \neq (i,j) \\ (E_{i,j})_{i,j} = 1 \end{array} \right.$$

Dans $M_2(\mathbb{R})$, cela donne :

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\Rightarrow A \in M_2(\mathbb{R})$ s'écrit

$$A = a_{11}E_{11} + a_{12}E_{12} + a_{21}E_{21} + a_{22}E_{22}$$

1. On définit plus généralement les matrices de base dans $M_{mn}(\mathbb{K})$.

Produit de matrices

Définition

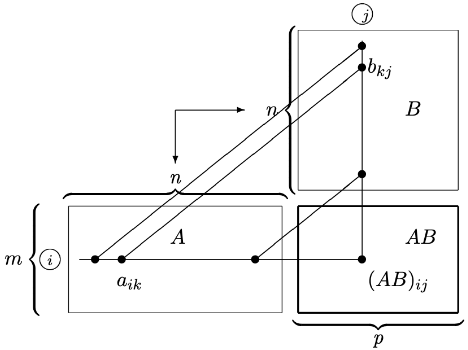
Soient $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$ *et* $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$. *On définit la matrice* $C = AB \in \mathcal{M}_{mp}(\mathbb{K})$ *par* $C = (c_{ij})$ *et*

$$\boxed{c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \quad 1 \leq i \leq m, \ 1 \leq j \leq n.}$$

Remarque

1. *Attention à la compatibilité des dimensions :* $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$
2. *Le produit* AB *peut être défini sans que* BA *ne le soit. Et même si* AB *et* BA *sont tous deux définis (matrices carrées), en général* $AB \neq BA$.
3. *Si* $AB = BA$, *on dit que* A *et* B *commutent.*
4. *Il se peut que* $AB = 0$ *alors que* $A \neq 0$ *et* $B \neq 0$.

Concrètement



l'important est le n commun, peu importe m et p ...

Exemple

$$\begin{array}{cc} & \overbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}^{\text{Taille } (3,2)} \\ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 7 & 5 & 2 \end{pmatrix}}_{\text{Taille } (4,3)} & \underbrace{\begin{pmatrix} 10 & 9 \\ 8 & 2 \\ 9 & 13 \\ 33 & 27 \end{pmatrix}}_{\text{Taille } (4,2)} \end{array}$$

Mémo :

1. Le coefficient (i,j) de la nouvelle matrice est à l'intersection de la ligne i et de la colonne j (produit ligne - colonne).
2. Produit AB possible : nombre de lignes de B = nombre de colonnes de A.

Produit matrice/vecteur

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \\ \vdots \\ \\ x_n \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}}_{\textit{matrice unicolonne } (\in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{K}))}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})} = \underbrace{\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{m} a_{i1}y_i & \sum_{i=1}^{m} a_{i2}y_i & \dots & \sum_{i=1}^{m} a_{in}y_i \end{bmatrix}}_{\textit{matrice uniligne } (\in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K}))}$$

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix}}_{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} ax^2 + by^2 + 2cxy \end{bmatrix}}_{\textit{matrice scalaire}} \text{ (Attention, c'est bien 2c !)}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{bmatrix}}_{\textit{matrice scalaire}}$$

Exemple : en général $AB \neq BA$

Avec dimension différente :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -2 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ -6 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -2 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 9 & -3 \\ -2 & -3 & 5 \\ 0 & 12 & -4 \end{pmatrix}$$

Même dimension :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Exemple : $AB = 0 \not\Rightarrow A = 0$ ou $B = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \; A^3 = 0.$$

Définition

Une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ est dite nilpotente si et seulement si il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$A^p = 0.$$

Puissance d'une matrice carrée

Définition

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et p un entier. On définit

$$A^p = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{p \text{ facteurs}},$$

avec la convention $A^0 = I_n$.

Remarque

Attention à ne pas confondre avec la puissance des coefficients.
Mais si A est diagonale, alors $diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)^p = diag(\lambda_1^p, ..., \lambda_n^p)$.

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 \end{pmatrix}$$

Formule du binôme de Newton (quand çà commute seulement)

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + BA + AB + B^2$$

$$\begin{aligned}(A+B)^3 &= (A+B)^2(A+B) = (A^2+BA+AB+B^2)(A+B)\\ &= A^3 + BA^2 + ABA + B^2A + A^2B + BAB + AB^2 + B^3\end{aligned}$$

Proposition

Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ commutent i.e. $AB = BA$, on a :

$$\forall p \in \mathbb{N},\ (A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} C_p^k A^k B^{p-k},$$

où les $C_p^k = \binom{p}{k} = \dfrac{p!}{(p-k)!k!}$ sont les coefficients binômiaux.

Exemple :

$$(A+\lambda I_n)^p =$$

Binôme (quand çà commute seulement)

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + BA + AB + B^2$$

$$\begin{aligned}(A+B)^3 &= (A+B)^2(A+B) = (A^2 + BA + AB + B^2)(A+B) \\ &= A^3 + BA^2 + ABA + B^2A + A^2B + BAB + AB^2 + B^3\end{aligned}$$

Proposition

Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ commutent i.e. $AB = BA$, on a :

$$\forall p \in \mathbb{N},\ (A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} C_p^k A^k B^{p-k},$$

où les $C_p^k = \binom{p}{k} = \dfrac{p!}{(p-k)!k!}$ sont les coefficients binômiaux.

Exemple : $\lambda \in K$

$$(A + \lambda I_n)^p = \sum_{k=0}^{p} \lambda^{p-k} C_p^k A^k$$

Exercice sur les puissances d'une matrice

Exercice

Que dire de la matrice carré $A \in M_n(\mathbb{R})$ (sur-diagonale) définie par

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} ?$$

2) Obtient-on le même résultat avec A^T ?

<u>Indication</u> : regarder ses puissances

Eléments de réponse $n = 4$

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = 0.$$

Propriétés du produit

Proposition

Soient A, B, C trois matrices. On a, sous réserve de compatibilité des dimensions,

$$(AB)C = A(BC).$$

Proposition

Soit $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$. On a $AI_n = I_mA = A$.

(en particulier $A \in M_n(\mathbb{K}) \Rightarrow AI_n = I_nA = A$)

Proposition

Soient A, B, C trois matrices et $\alpha \in \mathbb{K}$. On a, sous réserve de compatibilité des dimensions,

$$\begin{aligned} A(B+C) &= AB + AC \\ (A+B)C &= AC + BC \\ \alpha(AB) &= (\alpha A)B = A(\alpha B). \end{aligned}$$

Choses interdites / choses à ne pas faire avec les matrices

1. Le produit ne commute pas en général :

$$A, B \in M_n(\mathbb{K}) \; ; \; \Rightarrow \; AB \neq BA$$

2. L'ensemble des matrices n'est pas intègre :

$$AB = 0 \not\Rightarrow A = 0 \text{ ou } B = 0.$$

3. En général :

$$AB = AC \not\Rightarrow B = C.$$

$$(AB = AC \Rightarrow A(B - C) = 0)$$

Exercice classique

Exercice

Déterminer $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall B \in M_n(\mathbb{R}),\ AB = BA$.

Solution : on prend $B = E_{i,j}$, $1 \leq i, j \leq n \Rightarrow AE_{i,j} = E_{i,j}A$ d'où

$$\sum_{r,s} a_{r,s} E_{r,s} E_{i,j} = \sum_{r,s} a_{r,s} E_{i,j} E_{r,s}$$

On déduit que

$$\sum_{r} a_{r,i} E_{r,j} = \sum_{s} a_{j,s} E_{i,s}$$

et en regardant pour $r = i$ et $s = j$ on a $a_{i,i} E_{i,j} = a_{j,j} E_{i,j}$, $\forall i, j$. Et pour $r \neq i$ on a forcément $a_{r,i} = 0$. D'où, A est une matrice scalaire.

Lemme (multiplications des matrices de base)

$$E_{r,s} E_{i,j} = \delta_{i,s} E_{r,j} \quad \text{avec } \delta_{i,s} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = s \\ 0 & \text{si} \quad i \neq s \end{cases}$$

Exercice d'entrainement sur le produit de matrice

Soit A, B deux matrices[2] carrés de taille n t.q.

$$\forall 1 \leq i \leq n, \quad \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} b_{i,j} = 1.$$

Montrer que la matrice $C = (c_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ définie par $C = AB$ vérifie également

$$\forall 1 \leq i \leq n, \quad \sum_{j=1}^{n} c_{i,j} = 1.$$

2. Il s'agit de matrices dites stochastiques.

Exercice d'entrainement sur le produit de matrice

Soit A, B deux matrices[2] carrés de taille n t.q.

$$\forall 1 \leq i \leq n, \quad \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} b_{i,j} = 1.$$

Montrer que la matrice $C = (c_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ définie par $C = AB$ vérifie également

$$\forall 1 \leq i \leq n, \quad \sum_{j=1}^{n} c_{i,j} = 1.$$

$$\sum_{j=1}^{n} c_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} \underbrace{\sum_{j=1}^{n} b_{k,j}}_{=1} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} = 1$$

2. Il s'agit de matrices dites stochastiques.

Transposition

Définition

Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n} \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$*. On définit la transposée de* A*, notée* A^T*, par*

$$A^T = (a_{ji})_{1\leq j\leq n, 1\leq i\leq m} \in \mathcal{M}_{nm}(\mathbb{K}).$$

Proposition

1. *Soient* $A, B \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$*. On a* $(A+B)^T = A^T + B^T$*.*
2. *Soient* $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$ *et* $\alpha \in \mathbb{K}$*. On a* $(\alpha A)^T = \alpha A^T$*.*
3. *Soient* $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$ *et* $B \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$*. On a* $(AB)^T = B^T A^T$*.*
4. *Soit* $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$*. On a* $(A^T)^T = A$*.*

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Petit calcul de vérification

On prend $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$. Soit donc $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq p$:

$$1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq p \ \Rightarrow\ (AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

$$1 \leq i \leq p,\ 1 \leq j \leq m \ \Rightarrow\ ((AB)^T)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} b_{ki}$$

et $B^T \in M_{pn}(\mathbb{K})$, $A^T \in M_{nm}(\mathbb{K})$ d'où

$$1 \leq i \leq p,\ 1 \leq j \leq m \ \Rightarrow\ (B^T A^T)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} b_{ki} a_{jk}$$

Matrices symétriques / anti-symétriques

Définition

Une matrice carré $A \in M_n(K)$ est dite symétrique, resp. anti-symétrique si et seulement si $A = A^T$, resp. $A = -A^T$.

Si une matrice est symétrique et anti-symétrique alors $A = 0$ (car $A^T = A = -A$).

Résolution de l'exercice (Décomposition des matrices)

Proposition

Toute matrice carré $A \in M_n(\mathbb{R})$ s'écrit comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice anti-symétrique.

Idée (ANALOGIE de TRES loin) dans l'espace des fonctions $E := \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $f \in E \Rightarrow$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \underbrace{\frac{f(x)+f(-x)}{2}}_{paire} + \underbrace{\frac{f(x)-f(-x)}{2}}_{impaire}$$

Ici : en appelant A^T la transposée de A, c.a.d. $A = (a_{j,i})_{1 \leq i,j \leq n}$:

$$A = \underbrace{\frac{A+A^T}{2}}_{symetrique} + \underbrace{\frac{A-A^T}{2}}_{anti-symetrique}$$

Exercice

Montrer que cette décomposition est unique (voir transparent précédent).

Trace d'une matrice carrée

Définition

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*. La trace de* A*, notée* $tr\ A$*, est le nombre*

$$tr\ A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Proposition

1. *Soient* $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*. On a* $tr(A + B) = tr\ A + tr\ B$*.*
2. *Soient* $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$ *et* $\alpha \in \mathbb{K}$*. On a* $tr(\alpha A) = \alpha tr\ A$*.*
3. *Soient* $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*. On a* $tr(AB) = tr(BA)$*.*

Au sujet de la relation $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$

On fait le calcul :

$$\mathrm{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki}}_{(AB)_{ii}}$$

et de même on a :

$$\mathrm{tr}(BA) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\sum_{k=1}^{n} b_{ik} a_{ki}}_{(BA)_{ii}} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ki} b_{ik} = \dots = \mathrm{tr}(AB)$$

(changement d'indice)

Matrice d'un système linéaire, rang d'une matrice

On part de l'observation importante suivante. Soient $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$ et $b = (b_1, ..., b_m)^T \in \mathcal{M}_{m1}(\mathbb{K})$. Résoudre l'équation $Ax = b$ d'inconnue $x = (x_1, ..., x_n)^T$, est équivalent à résoudre le système linéaire

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right. .$$

On dit alors que A est la matrice du système.

Passage de l'écriture matricielle au système

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

(c.a.d. $Ax = b$) équivaut à

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right. .$$

Exemple : matrice de Vandermonde

$$\left\{\begin{array}{lllll} x & +y & +z & +t & =1 \\ ax & +by & +cz & +dt & =1 \\ a^2x & +b^2y & +c^2z & +d^2t & =1 \\ a^3x & +b^3y & +c^3z & +d^3t & =1 \end{array}\right.$$

donne

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{pmatrix}$$

Exercice

Résoudre le système linéaire $AX = 0$ où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$$

(préciser les cas où le système admet une seule et unique solution).

Rang d'une matrice

Définition [rang d'une matrice]

Soit $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$. On définit le rang de A, noté rg A, comme le rang du système linéaire homogène $Ax = 0$ d'inconnue $x = (x_1, ..., x_n)^T$.

Remarque

La matrice identité I_n est de rang n ; de plus la matrice A est nulle i.e. $A = 0$ si et seulement si $rg(A) = 0$.

Proposition

(i) Soit $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$. On a rg A^T = rg A.
(ii) Le rang d'une matrice échelonnée = nombre de lignes non nulles.

- A noter que $\text{rg}A \leq \min(m, n)$.
- Méthode de calcul du rang : mettre sous forme échelonnée :

Exemples de rang

Que vaut le rang des matrices suivantes [3]

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 5 & 5 & 1 \\ 6 & 6 & 1 \\ 5 & 5 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 6 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} ; \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}}_{J_r} ; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} ?$$

3. Pour la sixième, $J_r \in M_{mn}(\mathbb{K})$ et il y a r fois la valeur 1 où $1 \leq r \leq m$

Matrices équivalentes

Définition

Deux matrices $A \in M_{m,n}(K)$ et $B \in M_{m,n}(K)$ sont équivalentes si et seulement si il existe deux matrices inversibles, $P \in M_m(K)$, $Q \in M_n(K)$ telles que

$$B = QAP.$$

Proposition

Deux matrices A et B ont même rang si et seulement si elles sont équivalentes.

- Preuve admise ($\Rightarrow$ on montre que A et B sont équivalentes à la même matrice J_r par manipulation sur les lignes[4] Pour $\Leftarrow$, A est équivalente à J_r, donc $rg(A) = rg(B)$ car A et B sont équivalentes.)
- Pour montrer que $rg(A^T) = rg(A)$, on utilise que A et A^T sont semblables à la même matrice J_r par manipulations.

4. ce qui revient à multiplier par des matrices inversibles dites élémentaires (permutation, dilatation, transvection).

Matrices inversibles

Définition

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *est dite inversible s'il existe une matrice* $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *telle que*

$$AB = BA = I_n.$$

Dans ce cas, B *est unique et est appelée matrice inverse de* A*, notée* A^{-1}*.*

Proposition

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*. Si* $AB = I_n$ *ou* $BA = I_n$*, alors* A *est inversible et* $B = A^{-1}$*.*

Remarque

Si A *est inversible, alors* $Ax = b \Longleftrightarrow x = A^{-1}b$*. La connaissance de* A^{-1} *permet donc de résoudre facilement n'importe quel système linéaire de matrice* A*.*

Matrice nilpotente

Exercice

Soit A une matrice telle qu'il existe $1 \leq k \leq n$ t.q. $A^n = 0$. Montrer que $I_n - A$ est inversible.

Matrice nilpotente

Exercice

Soit A une matrice telle qu'il existe $1 \leq k \leq n$ t.q. $A^n = 0$. Montrer que $I_n - A$ est inversible.

$$(I_n - A)(I_n + A + ... + A^{n-1}) = I_n - A^n = I_n$$

d'où le résultat.

Méthode (Calcul pratique de l'inverse)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour savoir si A est inversible et, le cas échéant, calculer son inverse, on résout le système linéaire[5]

$$Ax = y$$

d'inconnue $x = (x_1, ..., x_n)^T$ et de second membre $y = (y_1, ..., y_1)^T$ quelconque. Si ce sytème admet une solution x^*, c'est que A est inversible. Sachant que $x^* = A^{-1}y$, on obtient A^{-1} par identification.

Proposition

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si rg $A = n$.

---

5. Lorsque le nombre d'équations = le nombre d'inconnues, on parle de système de Cramer.

Quelques règles de calcul

Proposition

1. *I_n est inversible d'inverse I_n.*
2. *Si A est inversible alors A^{-1} est inversible et $(A^{-1})^{-1} = A$.*
3. *Si A, B sont inversibles alors AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.*
4. *Si A est inversible alors A^T est inversible et $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T =: A^{-T}$.*
5. *Si $A = diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)$, alors A est inversible si et seulement si tous les λ_i sont non nuls. On a alors $A^{-1} = diag(\lambda_1^{-1}, ..., \lambda_n^{-1})$.*

Quelques justifications $ABB^{-1}A^{-1} = B^{-1}A^{-1}AB = I_n$;

$AA^{-1} = I_n \Rightarrow (A^{-1})^\top A^\top = I_n \Rightarrow (A^T)^{-1} = (A^{-1})^\top$

Exercice d'inversion

On veut inverser

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c}\text{systeme}\\ \text{lineaire}\\ \text{associe}\end{array} \rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} x_2 + x_3 + x_4 & = y_1 \\ -x_1 + x_3 + x_4 & = y_2 \\ -x_1 - x_2 + x_4 & = y_3 \\ -x_1 - x_2 - x_3 & = y_4 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} x_1 + x_2 + x_3 & = -y_4 \\ -x_1 + x_3 + x_4 & = y_2 \\ -x_1 - x_2 + x_4 & = y_3 \\ x_2 + x_3 + x_4 & = y_1 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{lllll} x_1+ & x_2+ & x_3 & & = -y_4 \\ & x_2+ & 2x_3+ & x_4 & = y_2 - y_4 \\ & x_2+ & x_3+ & x_4 & = y_1 \\ & & x_3+ & x_4 & = y_3 - y_4 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{lllll} x_1+ & x_2+ & x_3 & & = -y_4 \\ & x_2+ & x_3+ & x_4 & = y_1 \\ & & x_3 & & = y_2 - y_4 - y_1 \\ & & x_3+ & x_4 & = y_3 - y_4 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{lllll} x_1+ & x_2+ & x_3 & & = -y_4 \\ & x_2+ & x_3+ & x_4 & = y_1 \\ & & x_3 & & = y_2 - y_4 - y_1 \\ & & & x_4 & = y_1 - y_2 + y_3 \end{array} \right.$$

Exercice d'inversion de matrice (suite)

En utilisant que $x_2 = y_1 - (x_3 + x_4)$ et $x_1 = -y_4 - (x_2 + x_3)$

$$\left\{\begin{array}{lllll} x_1+ & x_2+ & x_3 & & = -y_4 \\ & x_2 & & & = y_1 - y_3 + y_4 \\ & & x_3 & & = y_2 - y_4 - y_1 \\ & & & x_4 & = y_1 - y_2 + y_3 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{lllll} x_1 & & & & = -y_2 + y_3 - y_4 \\ & x_2 & & & = y_1 - y_3 + y_4 \\ & & x_3 & & = -y_1 + y_2 - y_4 \\ & & & x_4 & = y_1 - y_2 + y_3 \end{array}\right.$$

Conclusion :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Vérifier avec Maple...

Propriétés des matrices nilpotentes

Definition

Une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ est nilpotente si et seulement si il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$A^p = 0.$$

1. Si $A \in M_n(\mathbb{K})$ est nilpotente alors $I_n - A$ est inversible. En effet :

$$(I_n - A)(I_n + A + \cdots + A^{p-1}) = I_n - A^p = I_n$$

2. Si $A \in M_n(\mathbb{K})$ est nilpotente, alors

$$A^n = 0.$$

3. Une matrice A est nilpotente si et seulement si

$$\forall 1 \leq k \leq p, \quad \mathrm{Tr}(A^k) = 0.$$

(Propriétés 2 hors programme ; propriété 3 $\rightarrow$ chapitre déterminants).

Exercices sur les matrices qui commutent avec une autre

Exercice

Trouver toutes les matrices qui commutent avec

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}.$$

Correction : on fait

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

A vérifier que l'on obtient le système (de rang 2) :

$$\left\{ \begin{array}{cl} a + 2c - d & = 0 \\ 7a - 2b - 7d & = 0 \\ b + 7c & = 0 \end{array} \right.$$

Petits exercices pour terminer

1) Soit A, B deux matrices non nulles t.q. $AB = 0$. Pourquoi A n'est-elle pas inversible ?

Petits exercices pour terminer

1) Soit A, B deux matrices non nulles t.q. $AB = 0$. Pourquoi A n'est-elle pas inversible ?

Si A est inversible, alors

$$A^{-1}AB = B = 0 \quad \Rightarrow B = 0,$$

Petits exercices pour terminer

1) Soit A, B deux matrices non nulles t.q. $AB = 0$. Pourquoi A n'est-elle pas inversible ?

Si A est inversible, alors

$$A^{-1}AB = B = 0 \quad \Rightarrow B = 0,$$

2) Soit A une matrice carrée t.q. $A^{17} = A^{16} + 3A^2 + I_n$. Montrer que A est inversible.

Petits exercices pour terminer

1) Soit A, B deux matrices non nulles t.q. $AB = 0$. Pourquoi A n'est-elle pas inversible ?

Si A est inversible, alors

$$A^{-1}AB = B = 0 \quad \Rightarrow B = 0,$$

2) Soit A une matrice carrée t.q. $A^{17} = A^{16} + 3A^2 + I_n$. Montrer que A est inversible.

Il suffit d'écrire

$$A(A^{16} - A^{15} - 3A) = I_n \quad \Rightarrow \quad A^{-1} \text{ existe}$$

Lemme de Hadamard

Montrer que si $A \in M_n(\mathbb{R})$ vérifie

$$|a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}| \tag{1}$$

alors A est inversible.

Lemme de Hadamard

Montrer que si $A \in M_n(\mathbb{R})$ vérifie

$$|a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}| \tag{1}$$

alors A est inversible.
Sinon, il existe $X \in \mathbb{R}^n$ t.q. $X \neq 0$ et t.q. $AX = 0$. Comme $X \neq 0$, il existe i t.q. $x_i \neq 0$ et on peut prendre i t.q. $x_i \geq x_k$ pour tout $1 \leq k \leq n$. Il vient

$$a_{i,i}x_i = -\sum_{j \neq i} a_{i,j}x_j \quad \Rightarrow$$

$$|a_{i,i}| \leq \sum_{j \neq i} |a_{i,j}| \left| \frac{x_j}{x_i} \right| \leq \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$$

ce qui contredit (1).