Université d'Avignon | 2021-2022
Algèbre 2 | Licence 1 Mathématiques-Informatique

CC1 : 7 mars 2022 : 10h-11h (11h20 pour les tiers temps)

On attachera le plus grand soin à la présentation et aux calculs. Toute réponse doit être justifiée. Aucun document ni appareil numérique autorisé : calculatrices et téléphones portables interdits.

Exercice 1 (4 points : 2 points pour la résolution + 2 points pour le rang)**.** *Résoudre le système linéaire homogène associé à la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

et donner le rang de A.

Correction : on trouve facilement que $x = y = z = t$ d'où $\mathcal{S} = \{(x, x, x, x) \ ; \ x \in \mathbb{R}\}$ et le rang de la matrice est donc 3.

Exercice 2 (4 points)**.** *Calculer l'inverse de la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Correction : On résout le système linéaire $AX = Y$ ce qui donne le système à résoudre en fonction du second membre.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = y_1 \\ -x_1 + x_2 - x + x_3 = y_2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = y_3 \end{cases}$$

Ce système se résout sans difficulté par la méthode du pivot de Gauss et on trouve

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \\ -3/2 & -2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3 (6 points : 2 points par question)**.**

1) Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telle que $a + d = 1$ et $ad - bc = 0$. Exprimer A^2 en fonction de A.

2) Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Existe-t-il une matrice carré de taille 2 inversible P telle que l'on ait l'égalité $P^{-1}BP = I_2$? (justifier).

3) Si une matrice $T \in M_3(\mathbb{R})$ est triangulaire supérieure et inversible, alors son inverse est-elle triangulaire inférieure ou triangulaire supérieure ? (justifier à l'aide d'une démonstration).

Correction : 1) On vérifie sans peine que $A^2 = A$ en utilisant les hypothèses de l'énoncé.
2) La relation n'est pas possible car $P^{-1}BP = I_2$ équivaudrait à $B = I_2$ en multipliant par P à gauche et par P^{-1} à droite. Or B est différente de I_2.
3) Considérons une matrice T de la forme

$$T = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ 0 & 0 & c_3 \end{pmatrix}.$$

où $a_1 \neq 0$, $b_2 \neq 0$, et $c_3 \neq 0$ de sorte que T est triangulaire supérieure inversible (3 pivots). On écrit alors le système linéaire $TX = Y$ comme précédemment ce qui nous conduit au calcul de l'inverse de T. On trouve

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1/a_1 & -b_1/(a_1 b_2) & (b_1 c_2 - b_2 c_1)/(a_1 b_2 c_3) \\ 0 & 1/b_2 & -c_2/(b_2 c_3) \\ 0 & 0 & 1/c_3 \end{pmatrix}.$$

et donc T^{-1} est triangulaire supérieure.

Exercice 4 (4 points)**.** *Résoudre le système suivant à quatre inconnues x, y, z, t*

$$\begin{cases} x + y & = 2a \\ y + z & = 2b \\ z + t & = 2c \\ t + x & = 2d \end{cases}$$

en fonction des quatre paramètres $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Lorsque le système admet une solution, donner son rang.

Correction : on applique la méthode du pivot de Gauss au système ce qui donne

$$\begin{cases} x + y & = 2a \\ y + z & = 2b \\ z + t & = 2c \\ t - y & = 2d - 2a \end{cases} ; \begin{cases} x + y & = 2a \\ y + z & = 2b \\ z + t & = 2c \\ z + t & = 2d - 2a + 2b \end{cases} ; \begin{cases} x + y & = 2a \\ y + z & = 2b \\ z + t & = 2c \\ 0 & = 2d - 2a + 2b - 2c \end{cases}$$

En combinant les 2 dernières ligne on trouve :
1er cas : si $2d - 2a + 2b - 2c \neq 0$ alors le système n'a pas de solution.
2nd cas : si $2d - 2a + 2b - 2c = 0$ alors le système admet des solutions. On trouve en paramétrant par rapport à z (ce qui est un choix comme un autre) et en utilisant que $2d - 2a + 2b - 2c = 0$:

$$\mathcal{S} = \{(z + 2d, -z + 2b, z, -z + 2c) \; ; \; z \in \mathbb{R}\}.$$

Le rang de ce système vaut donc 3.

Exercice 5 (6 points : 2 points pour la première question ; 4 points pour la seconde)**.**
1) Soit la matrice $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer J^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2) Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ où $a, b \in \mathbb{R}$. En remarquant que $A = (a - b)I_2 + bJ$ où $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

correction : On trouve que $J^2 = 2J$, $J^3 = 4J$ puis on démontre par réccurence que $J^n = 2^{n-1}J$ pour $n \geq 1$.

Pour calculer A^n pour $n \geq 1$, on utilise le binôme de Newton :

$$\begin{aligned}
A^n &= ((a-b)I_2 + bJ)^n \\
&= (a-b)^n I_2 + \sum_{k=1}^{n} C_n^k b^k 2^{k-1} (a-b)^{n-k} J \\
&= (a-b)^n I_2 + \frac{1}{2}\left[\sum_{k=0}^{n} C_n^k (2b)^k (a-b)^{n-1} J - (a-b)^n J\right] \\
&= (a-b)^n I_2 + \frac{1}{2}\left[(a+b)^n - (a-b)^n\right] J \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(a+b)^n + \frac{1}{2}(a-b)^n & \frac{1}{2}(a+b)^n - \frac{1}{2}(a-b)^n \\ \frac{1}{2}(a+b)^n - \frac{1}{2}(a-b)^n & \frac{1}{2}(a+b)^n + \frac{1}{2}(a-b)^n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(noter qu'il faut faire attention aux termes d'indice $k = 0$.