Université d'Avignon 2021-2022
Algèbre 2 Licence 1 Mathématiques-Informatique

CC2 : 25 avril 2022 : 8h30-10h (1h ; 1h20 pour les tiers temps)

On attachera le plus grand soin à la présentation et aux calculs. Aucun document ni appareil numérique autorisé.

Exercice 1 (5.5 points). *Il s'agit de deux questions indépendantes.*
1) [2.5 points]. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ une famille libre de $\mathbb{R}^n$. Justifier si les familles suivantes sont-elles libres ou liées*

$$\{e_1, 2e_2, e_3\}\ ;\ \{e_1, e_3\}\ ;\ \{e_1, 2e_1 + e_4, e_4\}\ ;\ \{3e_1 + e_3, e_3, e_2 + e_3\}\ ;\ \{2e_1 + e_2, e_1 - 3e_2, e_4, e_2 - e_1\}.$$

2) [3 points]. *Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\ ;\ x + y + 2z = 0\}$ et $G = \text{Vect}(u)$ où $u = (3, -1, -1)$. Donner une base de F, calculer $F \cap G$ puis $F + G$.*

1) (i) $\{e_1, 2e_2, e_3\}$: libre $\alpha e_1 + (2\beta)e_2 + \gamma e_3 = 0 \ \Rightarrow \alpha = 2\beta = \gamma = 0$ par liberté de $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. D'où $\alpha = \beta = \gamma = 0$ et la famille est libre.
(ii) $\{e_1, e_3\}$: même chose
(iii) $\{e_1, 2e_1 + e_4, e_4\}$: posons $u = 2e_1 + e_4$. Alors $u - 2e_1 - e_4 = 0$ donc la famille est liée.
(iv) $\{3e_1 + e_3, e_3, e_2 + e_3\}$: libre : $\alpha(3e_1 + e_3) + \beta e_3 + \gamma(e_2 + e_3) = 0$ équivaut à $3\alpha e_1 + \gamma e_2 + (\alpha + \beta + \gamma)e_3 = 0$ d'où $3\alpha = \gamma = \alpha + \beta + \gamma = 0$ par liberté de la famille initiale. Donc, $\alpha = \beta = \gamma = 0$ et la famille est libre.
(v) $\{2e_1 + e_2, e_1 - 3e_2, e_4, e_2 - e_1\}$: liée. On pose $u = 2e_1 + e_2$ et $v = e_1 - 3e_2$ et $F = Vect(u, v)$. Comme u et v ne sont pas colinéaires, F est de dimension 2 et $\{u, v\}$ est une base de F. Soit $w = e_2 - e_1$. Alors $w \in F$. Ainsi, $\{u, v, w\}$ est liée car il s'agit d'une famille de 3 vecteurs dans un espace vectoriel de dimension 2. A fortiori, la famille $\{2e_1 + e_2, e_1 - 3e_2, e_4, e_2 - e_1\}$ l'est aussi.
2) Soit $(x, y, z) \in F$. Il vient $(x, y, z) = (-y - 2z, y, z) = y(-1, 1, 0) + z(-2, 0, 1)$. Posons $u = (-1, 1, 0)$ et $v = (-2, 0, 1)$. Alors $\{u, v\}$ est génératrice de F et u et v ne sont pas colinéaires. La famille $\{u, v\}$ est donc une base de F. On voie que $u \in F$, donc $G \subset F$. Ainsi, $F \cap G = G$ et $F + G = F$.

Exercice 2 (4.5 points). *1) Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Calculer le déterminant de la matrice A définie par*

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & a & b \\ 0 & b & a \end{pmatrix}.$$

2) Donner ensuite le rang de A en fonction de a et b (indication : on pourra d'abord étudier le cas $a = 0$ puis ensuite le cas $a \neq 0$).

1) En développant par rapport à la première colonne, on a $det(A) = a(a^2 - b^2) - b(ab) = a(a^2 - 2b^2)$.
2) **1er cas** : $a = 0$. (i) Si $b = 0$, alors $A = 0$. Donc $rg(A) = 0$
(ii) Si $b \neq 0$, alors les colonnes 1 et 3 sont les mêmes donc le rang de A vaut $rg(A) = 2$.
2ème cas : $a \neq 0$. (i) si $a^2 - 2b^2 \neq 0$, alors $det(A) \neq 0$, donc le rang de A vaut $rg(A) = 3$.
(ii) si $a^2 - 2b^2 \neq 0$, alors $a^2 = 2b^2$ et b est non nul. La matrice A n'est pas inversible et est non nulle. Elle est donc de rang 1 ou 2. Comme la colonne 2 est linéairement indépendante de la colonne 3, le rang de A vaut donc 2. =

Exercice 3 (7 points). . *Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3)$ l'application linéaire définie par*

$$f(x, y, z, t) = (2x + y - t, x + 8y - 9z - 2t, x - 2y + 3z).$$

1) [3 points]. Donner une base du noyau de f et préciser sa dimension.
2) [2 points]. Donner la dimension de $\mathrm{Im}(f)$ et donner une base de $\mathrm{Im}(f)$.
3) [2 points]. Donner une équation de $\mathrm{Im}(f)$

1) Soit $(x, y, z) \in Ker(f)$. Il vient

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ x + 8y - 9z - 2t = 0 \\ 2x + y - t \end{cases} \iff \begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ 10y - 12z - 2t = 0 \\ 5y - 6z - t = 0. \end{cases}$$

Il est judicieux de prendre y, z comme paramètre : $t = 5y - 6z$. D'où $x = 2y - 3z$. Ainsi

$$(x, y, z, t) = (2y - 3z, y, z, 5y - 6z) = y\underbrace{(2, 1, 0, 5)}_{u} + z\underbrace{(-3, 0, 1, -6)}_{v}.$$

Ainsi $Ker(f)$ est de dimension 2 et une base de cet espace est $\{u, v\}$.
2) Par le théorème du rang, l'image de f est de dimension 2. Soit $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Soit $u = f(e_3) = (0, -9, 3)$ et $v = f(e_4) = (-1, -2, 0)$. Les vecteurs u et v sont dans l'image de f et ne sont pas colinéaires. Ainsi, ils forment une base de $Im(f)$.
3) On écrit $\alpha u + \beta v = (x, y, z)$ ce ce qui donne le système

$$\begin{cases} -\beta = x \\ -9\alpha - 2\beta = y \\ 3\alpha = z. \end{cases}$$

Ce système admet donc une solution en (α, β), $\alpha = -y/9$ et $\beta = -x$ si et seulement il est compatible c.a.d. si et seulement si $2x - y - 3z = 0$.

Exercice 4 (6 points)**.** *Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'endomorphisme défini par $f(x, y, z) = (x - y, y - x, x - z)$.*
1) [1 point]. *Ecrire la matrice A de f dans la base canonique $\mathcal{E}$.*
2) [1 point]. *Soit $u = (1, 0, 1)$, $v = (0, 1, 1)$, $w = (1, 1, 0)$ et $\mathcal{F} = \{u, v, w\}$. Montrer que $\mathcal{F}$ est une base.*
3) [1 point]. *Calculer la matrice de passage P de $\mathcal{E}$ vers $\mathcal{F}$.*
4) [2 points]. *Calculer P^{-1} et donner la matrice de f dans la base $\mathcal{F}$.*

1) On obtient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2) On écrit $xu + yv + zw = 0$ ce qui donne ls système

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ y + z = 0 \\ x + y = 0. \end{cases}$$

d'où $x = -y = -z$ et $y = -z$, donc $x = y = z = 0$ et la famille est donc libre. S'agissant d'une famille à 3 éléments, elle est donc une base de $\mathbb{R}^3$.
3) on obtient

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

puis en inversant on trouve

$$P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Par la formule de changement de base, la matrice B de f dans la base $\{u, v, w\}$ est donc

$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$