Corrigé CC n°3

Exercice 1

- $f(x,y) = 2x - y$.

$$f(x+x', y+y') = 2(x+x') - (y+y')$$
$$= 2x - y + 2x' - y' = f(x,y) + f(x',y')$$

$$f(\lambda x, \lambda y) = 2\lambda x - \lambda y = \lambda(2x-y) = \lambda f(x,y).$$

Donc f est linéaire.

- $g(x,y) = (x^2, y^2)$

$$g(1,1) = (1,1)$$
$$g(2,2) = (4,4) \neq 2g(1,1)$$

Donc g n'est pas linéaire.

Exercice 2

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$$
$$(x,y,z) \longmapsto (x-y, x+z, y+z, 0)$$

1) $(x,y,z) \in \operatorname{Ker} f \iff f(x,y,z) = 0$

$$\iff \begin{cases} x - y = 0 \\ x + z = 0 \\ y + z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \qquad L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$

$$\iff \begin{cases} x - y = 0 \\ y + z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = x \\ z = -x \end{cases}$$

$$\iff (x, y, z) = x(1, 1, -1)$$

Le vecteur $(1, 1, -1)$ étant non nul, il constitue une base de $\operatorname{Ker} f$.

D'après le théorème du rang, on en déduit que

$\dim \operatorname{Im} f = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim \operatorname{Ker} f = 3 - 1 = 2$.

Or $f(1,0,0) = (1,1,0,0) \in \operatorname{Im} f$

$f(0,1,0) = (-1,0,1,0) \in \operatorname{Im} f$

La famille $\big((1,1,0,0), (-1,0,1,0)\big)$ étant libre (vecteurs non colinéaires), sachant que $\dim \operatorname{Im} f = 2$, on en déduit que c'est une base de $\operatorname{Im} f$.

2) Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et soit $\mathcal{B}'$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$. On a

$$\operatorname{mat}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 3

1/ $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 = 0$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 \quad -2\alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$
$L_3 \leftarrow L_3 - L_1$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 \quad -2\alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 + 4\alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

$L_3 \leftarrow L_3 - L_2$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 \quad -2\alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 + 4\alpha_3 = 0 \\ -\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

$\Longrightarrow \alpha_3 = \alpha_2 = \alpha_1 = 0$

On en déduit que C est une famille libre, et comme $\text{card}(C) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

2) $$P_{BC} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_{CB} = P_{BC}^{-1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$
$L_3 \leftarrow L_3 - L_1$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_1$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \quad L_3 \leftarrow -L_3$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + 2L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 4L_3 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}}_{P_{CB}}$$

3) $[u]_B = P_{BC} \; [u]_C$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 4

$$d_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{array}{l} C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - 2C_1 \end{array}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = -3 - 1 = -4$$

$$d_2 = \begin{vmatrix} 1+a & a & a \\ b & 1+b & b \\ c & c & 1+c \end{vmatrix} \qquad C_3 \leftarrow C_3 - C_2$$

$$= \begin{vmatrix} 1+a & a & 0 \\ b & 1+b & -1 \\ c & c & 1 \end{vmatrix} \qquad L_2 \leftarrow L_2 + L_3$$

$$= \begin{vmatrix} 1+a & a & 0 \\ b+c & 1+b+c & 0 \\ c & c & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1+a & a \\ b+c & 1+b+c \end{vmatrix}$$

$$= (1+a)(1+b+c) - a(b+c) = 1+b+c+a(1+\cancel{b+c}) - a(\cancel{b+c})$$

$$= 1+a+b+c$$

$$= 0 \iff a+b+c = -1$$