Systèmes linéaires

Exercice 1 (Question de cours). *1) Soit le système* $x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0$. *Qu'est ce qu'une solution de cette équation ? Quelles en sont les variables libres ? Donner les solutions de cette équation.*
2) Qu'est-ce qu'un système linéaire homogène, non-homogène ? Etant donné un système linéaire (S) *de* m *équations à* n *inconnues (non nécessairement homogène), rappeler la définition du rang du système. Quelles valeurs le rang de* (S) *peut-il prendre ? Quand est-ce qu'un système linéaire est incompatible ?*

Exercice 2. *Résoudre les systèmes linéaires suivants en précisant à chaque fois la dimension de l'espace des solutions et le rang du système (on pourra préciser aussi si le système est de Cramer ou non) :*

$$(a)\left\{\begin{array}{l} 8x-2y+z=3 \\ 12x+y-2z=1 \\ 96x-16y+5z=29, \end{array}\right. \quad (b)\left\{\begin{array}{l} 2x-2y+z-t+u=1 \\ x+2y-z+t-2u=1 \\ 4x-10y+5z-5t+7u=1 \\ 2x-14y+7z-7t+11u=-1, \end{array}\right. \quad (c)\left\{\begin{array}{l} 2x_1+3x_2+5x_3=3 \\ x_1-3x_2-6x_3=2 \\ 3x_1-x_3=4, \end{array}\right.$$

$$(d)\left\{\begin{array}{l} 2x_1+3x_2-x_3=-1 \\ x_1-5x_2+x_3=6 \\ 3x_1+3x_2+7x_3=0 \\ x_1+2x_2-4x_3=-1. \end{array}\right. \quad (e)\left\{\begin{array}{l} 2x-y+3z=1 \\ -4x+2y+z=3 \\ -2x+y+4z=4 \\ 10x-5y-6z=-10 \end{array}\right. \quad (f)\left\{\begin{array}{l} x-y+z+t=0 \\ 3x-3y+3z+2t=0 \\ x-y+z=0 \\ 5x-5y+5z+7t=0 \end{array}\right.$$

Exercice 3. *Vrai ou faux ?*
1. Si un système linéaire a plus d'inconnues que d'équations, alors il a une infinité de solutions.
2. Si un système linéaire a plus d'équations que d'inconnues, alors il a au plus une solution.
3. Si le rang d'un système linéaire est égal au nombre d'équations et strictement inférieur au nombre d'inconnues, alors le système a une infinité de solutions.
4. Si un système a une solution unique, alors il a autant d'équations que d'inconnues.
5. Si un système a une solution unique, alors son rang est égal au nombre d'inconnues
6. Si un système a un second membre nul et si son rang est égal au nombre d'équations, alors sa solution est unique.
7. Si le système linéaire (S) admet une infinité de solutions, alors le système homogène associé admet une infinité de solutions.
8. Un système linéaire homogène a au moins une solution.

Exercice 4. *Résoudre le système suivant en se ramenant à un système de Cramer :*

$$\begin{cases} x^3y^2z^6 = 1 \\ x^4y^5z^{12} = 2 \\ x^2y^2z^5 = 3 \end{cases}$$

Exercice 5. *Déterminer* $\lambda \in \mathbb{R}$ *pour que le système suivant admette des solutions différentes de* $(0,0,0)$, *puis résoudre ce système suivant les valeurs de* λ *:*

$$(S)\left\{\begin{array}{l} 3x-7y+\lambda z=0 \\ x-4y-2z=0 \\ 2x-(\lambda+3)y-2z=0. \end{array}\right.$$

Exercice 6. *Résoudre en fonction de a*

$$\begin{cases} x+ay+a^2z=0 \\ a^2x+y+az=0 \\ ax+a^2y+z=0 \end{cases}$$

Exercice 7. *Soient a, b, c et m des nombres réels. On considère le système linéaire*

$$(S)\left\{\begin{array}{l} x-y+2z=a \\ mx+(1-m)y+2(m-1)z=b \\ 2x+my-(3m+1)z=c. \end{array}\right.$$

Déterminer suivant les valeurs de a, b, c, m l'ensemble des solutions de (S).

Exercice 8. *Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}$, le système suivant est-il de Cramer :*

$$\begin{cases} (2-a)x+y-z=1 \\ x-(2-a)y-3z=-2 \\ -x+3y+(2-a)z=2 \end{cases}$$

Exercice 9. *Résoudre le système en fonction de $m \in \mathbb{R}$:*

$$\begin{cases} x+y+mz=m \\ x+my+-z=1 \\ x+y-z=1 \end{cases}$$

Exercice 10. *Résoudre le système linéaire*

$$\begin{cases} x+my+2z=m \\ -2x+y+(m-2)z=1 \\ mx+y+2z=2m-1 \end{cases}$$

Exercice 11. *Soient λ et μ des paramètres réels. On considère le système*

$$(S)\left\{\begin{array}{lcl} x-2y-3z-t & = & -\lambda \\ x-y-2z & = & 1-\lambda \\ 2x-4y-5z & = & -2\lambda \\ x-(\lambda+2)y-(\lambda+2)z & = & -3\lambda-\mu \\ x-3z-3t & = & \lambda^2. \end{array}\right.$$

1) Discuter suivant les valeurs de λ et μ l'existence ou non de solutions de (S).
2) Résoudre (S) lorsque $\lambda=-2$ puis lorsque $\lambda=-\mu=1$ (note : pour éviter les erreurs de calculs, vérifiez que les solutions que vous trouvez en sont bien).

Exercice 12. *Discuter et résoudre le système (distinguer 3 cas $m=1$, $m=-3$, $m \notin \{1,-3\}$) :*

$$\left\{\begin{array}{ll} mx+y+z+t & =a \\ x+my+z+t & =b \\ x+y+mz+t & =c \\ x+y+z+mt & =d. \end{array}\right.$$

Exercice 13. *1) Soit $a \in \mathbb{R}$. Résoudre le système lorsque $\lambda=2a+1$ et $\lambda=1-a$.*

$$\begin{cases} x_1+ax_2+ax_3=\lambda x_1 \\ ax_1+x_2+ax_3=\lambda x_2 \\ ax_1+ax_2+x_3=\lambda x_3 \end{cases}$$

2) Que peut-on dire du système si $\lambda \notin \{2a+1, 1-a\}$?

Exercice 14. *Cet exercice est pour aller plus loin (il est plus difficile que les autres). Soit $n \geq 3$. On s'intéresse à la questions suivante : existe-t-il un polygone à n côtés dont les milieux des côtés sont fixés ?*
1) On considère n points dans le plan complexe d'affixes a_1,...,a_n. On appelle z_1,...,z_n les affixes des n sommets du polygone. Mettre en équation le problème. En déduire un système linéaire à résoudre.
2) Sur ce système, effectuer l'opération $L_1-L_2+L_3-L_4+\cdots$. En déduire une condition sur les affixes $a_1, ..., a_n$ pour que le problème ait une solution.