Feuille 5 : Déterminants

Exercice 1. *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \; ; \; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Montrer que A n'est pas inversible et que B est inversible (utiliser le déterminant).

Exercice 2. *Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer que le déterminant de la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ b & a & 0 & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ 0 & 0 & b & a \end{pmatrix}$$

vérifie $det(A) = a^4 - b^4$. Déterminer ensuite le rang de A en fonction de a et b.

Exercice 3. *Calculer les déterminants suivants :*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \; ; \; \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} \; ; \; \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} \; ; \; \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}$$

Exercice 4. *1) Soit $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ deux matrices non nulles telles que $AB = 0$. Montrer que $det(A) = det(B) = 0$.*
2) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = -I_n$. Montrer que n est pair. Donner un exemple d'une telle matrice pour $n = 2$.
3) Soit $A \in M_{2n+1}(\mathbb{R})$ une matrice anti-symétrique. Montrer que $det(A) = 0$.
4) Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$. Pour quelles valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$, la matrice $A - \lambda I_2$ n'est pas inversible ?

Exercice 5. *Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer le rang de A en fonction de a.*

Exercice 6. *Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Calculer judicieusement les déterminants suivants. Pour chacun d'eux, donner une condition nécessaire et suffisante simple, portant sur a, b, c, pour qu'il soit nul.*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & a & a \\ a & b & b \\ a & b & c \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}.$$

Indication pour le dernier déterminant : utiliser la linéarité par rapport aux colonnes de la matrice pour se ramener au deuxième déterminant.

Exercice 7. *Calculer le déterminant d'ordre n suivant :*

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

(il y a des 1 sur la diagonale, première ligne et première colonne).

Exercice 8. *On se donne $a_1, a_2, \dots, a_n$ des nombres réels ou complexes. Calculer le déterminant suivant, dit "de Vandermonde".*

$$V(a_1, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Exercice 9. *Soient $a \neq b$ deux réels. Montrer par récurrence sur n que*

$$\begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a+b & ab & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & a+b & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & ab \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix} = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}.$$

Exercice 10. *(révision) Soit*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

On appelle $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$ est la matrice A.
1) Déterminer toutes les valeurs $\lambda \in \mathbb{R}$ et les vecteurs colonnes $x \in \mathbb{R}^2$ non nuls tels que

$$f(x) = \lambda x.$$

2) Déduire de 1) une base de $\mathbb{R}^2$ telle que la matrice de f dans cette base soit diagonale.
3) Calculer la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$. Inverser P.
3) En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 11. *Retour sur les matrices de rang 1.*
1) On se place dans $M_2(\mathbb{R})$. Montrer que toute matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$ vérifie

$$A^2 - Tr(A)A + det(A)I_2 = 0.$$

En déduire qu'une matrice de rang 1 *vérifie* $A^2 = Tr(A)A$.
2) [question plus difficile[1]*] On se place dans* $M_n(\mathbb{R})$. *Soit* A *une matrice de rang* 1. *On admet*[2] *qu'il existe* $X, Y \in \mathbb{R}^n$ *deux vecteurs colonnes de* $\mathbb{R}^n$ *tels que* $A = XY^T$. *Montrer que* $A^2 = (Y^T X)A$. *En déduire que*

$$A^2 = Tr(A)A.$$

3) [question plus difficile]. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ *une matrice de rang* 1. *Montrer que*

$$det(A + I_n) = 1 + Tr(A)$$

(indication : former une base de $\mathbb{R}^n$ *constituée du noyau*[3] *de* A *et d'un supplémentaire du noyau).*

Exercice 12. *(Cet exercice dépasse largement le cadre du cours d'algèbre 2).*
Soit A, B *deux matrices réelles telles que* $AB = BA$. *Montrer que* $det(A^2 + B^2) \geq 0$. *Avez vous un contre-exemple si* A *et* B *ne commutent pas ?*

indication : justifier que l'on a $det(A^2 + B^2) = det((A + iB)(A - iB))$ puis conclure.

Exercice 13. *(Cet exercice dépasse largement le cadre du cours d'algèbre 2).*
Soit p *un nombre premier et* A *une matrice à coefficients dans* $\mathbb{Z}$ *qui vérifie* $A^2 = pA$. *Montrer que sa trace est congru à* 0 *modulo* p. *(Indication : calculer les valeurs propres de la matrice* A *; utiliser que* A *est trigonalisable ; calculer la trace de* A*).*

Exercice 14. *1) Soit* $A \in M_n(\mathbb{R})$ *une matrice non nulle qui s'écrit* $A = XY^T$ *où* X *est un vecteur colonne de* $\mathbb{R}^n$ *et* Y^T *un vecteur ligne (transposé de* Y*).*
a) Ecrire une telle matrice lorsque $n = 2$. *Montrer que les 2 colonnes de* A *sont proportionnelles.*
b) Dans le cas général (dimension n*), écrire pareillement la matrice* A *et montrer qu'une telle matrice est de rang* 1.
2) Soit A *une matrice de rang* 1. *On écrit* A *en colonnes i.e.* $A = [C_1 \cdots C_n]$.
a) Montrer qu'il existe un vecteur colonne X *de* $\mathbb{R}^n$ *tel que pour tout* $1 \leq j \leq n$ *il existe* $y_j \in \mathbb{R}$ *tel que* $C_j = y_j X$.
b) Déduire que $A = XY^T$ *où* $Y^T = (y_1, ..., y_n)$.

1. On rappelle qu'étant donné deux vecteurs colonnes X, Y, le produit $XY^T = (x_i y_j)_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{R})$ est bien posé : il s'agit du produit d'un vecteur colonne et d'un vecteur ligne formant ainsi une matrice (n, n). On rappelle que le produit $X^T Y = \sum_{i=1}^n x_i y_i \in \mathbb{R}$ est bien posé : il s'agit d'un produit d'un vecteur ligne par un vecteur colonne formant ainsi un scalaire (produit scalaire).
2. Voir exercice 6.
3. Noyau de l'endormorphisme canoniquement associé à A.