Avignon Université - UFR STS | Année 2021/2022
L3 S5 mathématiques | Algèbre générale 1

CC1

Documents, calculatrices et portables interdits. Chaque réponse doit être justifiée.
Durée : 1h

Exercice 1. On définit une loi de composition interne $\otimes$ sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ en posant

$$(a, b) \otimes (a', b') = (aa', ab' + b)$$

Montrer que $(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, \otimes)$ est un groupe. Ce groupe est-il commutatif?

Exercice 2. Soit $(G, *)$ un groupe. Pour $g \in G$, on pose

$$Z_g = \{x \in G \,|\, g * x = x * g\}$$

1. Montrer que Z_g est un sous-groupe de $(G, *)$ contenant g.

2. On suppose dans cette question que $(G, *) = (GL(2, \mathbb{R}), \times)$. Déterminer Z_g dans les cas suivants.

$$i)\ g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad ii)\ g = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 3. Soit $(G, *)$ un groupe. Un élément a de G est appelé carré s'il existe $x \in G$ tel que $a = x^2 = x * x$. On note K l'ensemble des carrés de G :

$$K = \{x * x\,;\ x \in G\}\,, \qquad K \subset G\,.$$

1. Déterminer K dans chacun des cas suivants.

$i)$ $(G, *) = (\mathbb{R}^*, \times)$ $\quad ii)$ $(G, *) = (\mathbb{C}^*, \times)$ $\quad iii)$ $(G, *) = (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, +)$ $\quad iv)$ $(G, *) = (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +)$

2. On suppose dans cette question que $(G, *)$ est un groupe d'ordre fini *impair*. Montrer que $K = G$. *Indication : pour $a \in G$, chercher une solution de l'équation $x^2 = a$ sous la forme d'une puissance de a.*

Exercice 4. 1. Quel peut être l'ordre d'un sous-groupe de $(\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}, +)$?

2. Déterminer tous les sous-groupes de $(\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}, +)$.