Université d'Avignon - Faculté des sciences Année 2019-2020
L3-S5 Algèbre générale 1

Contrôle continu n^{0}3

Durée 1h20

Tous documents, calculatrices et téléphones sont interdits. Une rédaction précise et concise sera récompensée.

Exercice 1 (4p)

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 4. Soit u un endomorphisme de E ayant une valeur propre λ de multiplicité 4.

A) Justifiez que u est trigonalisable. (**1p**)

B) Soit $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}, \vec{l})$ une base de E telle que la matrice A de u dans $\mathcal{B}$ est triangulaire de Jordan. Donner toutes les formes possibles de A en précisant pour chaque forme (dans l'ordre désiré) :

1. L'image par u de chaque vecteur de $\mathcal{B}$ (en fonction des vecteurs de $\mathcal{B}$), (**1p**)
2. Le polynome minimal de u (justifier), (**1p**)
3. La dimension de $\ker[(u - \lambda Id_E)^m]$, pour $m \in \mathbb{N}^*$. (**1p**)

Exercice 2 (7,5p)

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans le base canonique $\mathcal{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de u. u est-il trigonalisable ? (**1p+0.5p**)
2. Calculer le polynôme minimal de u. u est-il diagonalisable ? (**1p+0.5p**)
3. Trouver une base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice T de u a une forme triangulaire de Jordan. (**2p**)
4. Si P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$, quelle relation relie A, T et P ? (**0.5p**)

5. En remarquant que

$$C := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 + N,$$

avec $N^2 = 0$, calculer C^n et en déduire T^n pour $n \in \mathbb{N}^*$. (**1,5p**)

6. Comment procéderiez vous ensuite pour obtenir A^n (on ne demande pas de faire les calculs) ? (**1p**)

Exercice 3 (8,5p)

Soit E un $\mathbb{K}$- espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ et u un endomorphisme de E. On se propose de (re)démontrer que u est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique P_u est scindé.

1. Montrer que si u est trigonalisable, alors P_u est scindé. (**1p**)
2. On suppose que P_u est scindé.
   (a) Justifier qu'il existe une base $(e_1, ..., e_n)$ telle que la matrice de u dans cette base est de la forme

   $$M = \begin{pmatrix} \lambda & L \\ 0_{\mathbb{K}^{n-1}} & A \end{pmatrix},$$

   avec $\lambda \in \mathbb{K}$, L matrice ligne de taille $n-1$ et A matrice carré $(n-1) \times (n-1)$. (**1p**)
   On pose $G = vect\{e_1\}$ et $F = vect\{e_2, ..., e_n\}$ ainsi $E = G \oplus F$. Pour $x \in E$, on note $p(x)$ sa projection sur F parallèlement à G et $q(x)$ sa projection sur G parallèlement à F, ainsi $x = p(x) + q(x)$ avec $p : E \longrightarrow F$ et $q : E \longrightarrow G$. On pose $v = u_{|F} : F \longrightarrow E$ et $w = p \circ v : F \longrightarrow F$.

   (b) Justifier que la matrice de w dans $(e_2, ..., e_n)$ est A et que le polynôme caractéristique de w est scindé.(**2p+0.5p**)

   (c) Si $(e'_2, ..., e'_n)$ est une base de F, justifier que $\forall k \in \{2, ..., n\}$, $\exists \alpha_k \in \mathbb{K}$ tq (argumenter pour chaque égalité)

   $$u(e'_k) = v(e'_k) = w(e'_k) + q(v(e'_k)) = w(e'_k) + \alpha_k e_1. \text{ } (\mathbf{1p})$$

   (d) On suppose qu'il existe une base $(e'_2, ..., e'_n)$ de F qui trigonalise w. Montrer que $(e_1, e'_2, ..., e'_n)$ est une base qui trigonalise u. (**2p**)
3. Conclure.(**1p**)