Analyse 1

TD 3
Correction des exercices 1 à 10

Exercice 1 :

On considère la fonction $f : [0, 3] \to \mathbb{R}$, définie par $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 3 - x & \text{si} \quad 1 < x \leq 3 \end{cases}$.

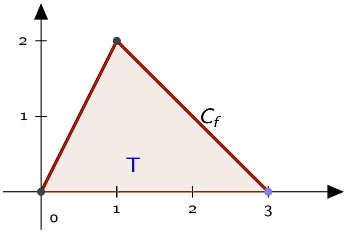
Tracer la courbe représentative de f. Déterminer $\displaystyle\int_0^3 f(x)\, dx$ par un simple calcul d'aire.

Exercice 1 :

On considère la fonction $f : [0, 3] \to \mathbb{R}$, définie par $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 3 - x & \text{si} \quad 1 < x \leq 3 \end{cases}$.

Tracer la courbe représentative de f. Déterminer $\displaystyle\int_0^3 f(x)\,dx$ par un simple calcul d'aire.

Tracé de la courbe représentative de f :

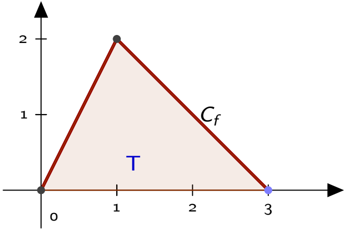


Exercice 1 :

On considère la fonction $f : [0, 3] \to \mathbb{R}$, définie par $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 3 - x & \text{si} \quad 1 < x \leq 3 \end{cases}$.

Tracer la courbe représentative de f. Déterminer $\displaystyle\int_0^3 f(x)\,dx$ par un simple calcul d'aire.

Tracé de la courbe représentative de f :



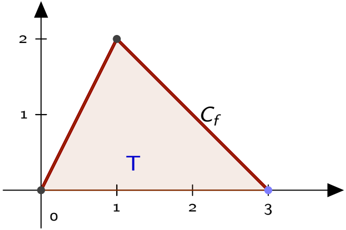
On rappelle que l'intégrale d'une fonction positive est l'aire du domaine situé entre la courbe et l'axe des abscisses.

Exercice 1 :

On considère la fonction $f : [0, 3] \to \mathbb{R}$, définie par $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 3 - x & \text{si} \quad 1 < x \leq 3 \end{cases}$.

Tracer la courbe représentative de f. Déterminer $\displaystyle\int_0^3 f(x)\, dx$ par un simple calcul d'aire.

Tracé de la courbe représentative de f :



On rappelle que l'intégrale d'une fonction positive est l'aire du domaine situé entre la courbe et l'axe des abscisses.
Donc

$$\int_0^3 f(x)dx = \text{Aire}(T) = \frac{3 \times 2}{2} = 3.$$

Exercice 2 :

Un train part d'une gare A au temps $t = 0$ et arrive en gare B au temps $t = 30$ (exprimé en minutes). On note $v(t)$ la vitesse instantanée (exprimée en kilomètres par minute) du train à l'instant t. On a

$$v(t) = \begin{cases} \min(4, t) & \text{pour} \quad 0 \leq t \leq 24 \\ 28 - t & \text{pour} \quad 24 \leq t \leq 26 \\ 2 & \text{pour} \quad 26 \leq t \leq 29 \\ 60 - 2t & \text{pour} \quad 29 \leq t \leq 30 \end{cases}$$

a) Déterminer la distance parcourue par le train entre les gares A et B.

Exercice 2 :

Un train part d'une gare A au temps $t = 0$ et arrive en gare B au temps $t = 30$ (exprimé en minutes). On note $v(t)$ la vitesse instantanée (exprimée en kilomètres par minute) du train à l'instant t. On a

$$v(t) = \begin{cases} \min(4, t) & \text{pour} \quad 0 \leq t \leq 24 \\ 28 - t & \text{pour} \quad 24 \leq t \leq 26 \\ 2 & \text{pour} \quad 26 \leq t \leq 29 \\ 60 - 2t & \text{pour} \quad 29 \leq t \leq 30 \end{cases}$$

a) Déterminer la distance parcourue par le train entre les gares A et B.

a) La distance parcourue entre les instants $t = 0$ et $t = 30$ est

$$D = \int_0^{30} v(t)dt.$$

Exercice 2 :

Un train part d'une gare A au temps $t = 0$ et arrive en gare B au temps $t = 30$ (exprimé en minutes). On note $v(t)$ la vitesse instantanée (exprimée en kilomètres par minute) du train à l'instant t. On a

$$v(t) = \begin{cases} \min(4, t) & \text{pour} \quad 0 \leq t \leq 24 \\ 28 - t & \text{pour} \quad 24 \leq t \leq 26 \\ 2 & \text{pour} \quad 26 \leq t \leq 29 \\ 60 - 2t & \text{pour} \quad 29 \leq t \leq 30 \end{cases}$$

a) Déterminer la distance parcourue par le train entre les gares A et B.

a) La distance parcourue entre les instants $t = 0$ et $t = 30$ est

$$D = \int_0^{30} v(t)dt.$$

Comme

$$\min(4, t) = \begin{cases} t & \text{pour} \quad t \leq 4 \\ 4 & \text{pour} \quad t > 4 \end{cases}$$

Exercice 2 :

Un train part d'une gare A au temps $t = 0$ et arrive en gare B au temps $t = 30$ (exprimé en minutes). On note $v(t)$ la vitesse instantanée (exprimée en kilomètres par minute) du train à l'instant t. On a

$$v(t) = \begin{cases} \min(4, t) & \text{pour} \quad 0 \leq t \leq 24 \\ 28 - t & \text{pour} \quad 24 \leq t \leq 26 \\ 2 & \text{pour} \quad 26 \leq t \leq 29 \\ 60 - 2t & \text{pour} \quad 29 \leq t \leq 30 \end{cases}$$

a) Déterminer la distance parcourue par le train entre les gares A et B.

a) La distance parcourue entre les instants $t = 0$ et $t = 30$ est

$$D = \int_0^{30} v(t)dt.$$

Comme

$$\min(4, t) = \begin{cases} t & \text{pour} \quad t \leq 4 \\ 4 & \text{pour} \quad t > 4 \end{cases}$$

alors d'après la relation de Chasles

$$D = \int_0^4 tdt + \int_4^{24} 4dt + \int_{24}^{26} (28 - t)dt + \int_{26}^{29} 2dt + \int_{29}^{30} (60 - 2t)dt.$$

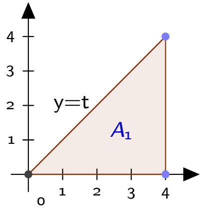
Exercice 2 :

a) Déterminer la distance parcourue par le train entre les gares A et B.

Exercice 2 :

a) Déterminer la distance parcourue par le train entre les gares A et B.

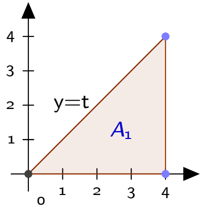
$\int_0^4 t dt = \text{Aire}(A_1) = \frac{4\times4}{2} = 8$



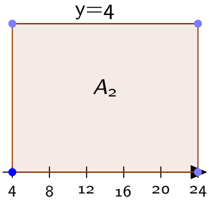
Exercice 2 :

a) Déterminer la distance parcourue par le train entre les gares A et B.

$\int_0^4 t dt = \text{Aire}(A_1) = \frac{4 \times 4}{2} = 8$



$\int_4^{24} 4 dt = \text{Aire}(A_2) = (24 - 4) \times 4 = 80$



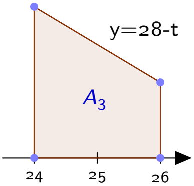
Exercice 2 :

a) Déterminer la distance parcourue par le train entre les gares A et B.

Exercice 2 :

a) Déterminer la distance parcourue par le train entre les gares A et B.

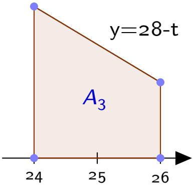
$\int_{24}^{26}(28-t)dt = \text{Aire}(A_3) = \frac{(4+2)(26-24)}{2} = 6$



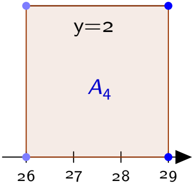
Exercice 2 :

a) Déterminer la distance parcourue par le train entre les gares A et B.

$$\int_{24}^{26}(28-t)dt = \text{Aire}(A_3) = \frac{(4+2)(26-24)}{2} = 6$$



$$\int_{26}^{29} 2dt = \text{Aire}(A_4) = 2(29-26) = 6$$



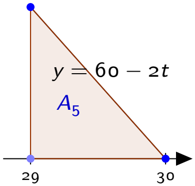
Exercice 2 :

a) Déterminer la distance parcourue par le train entre les gares A et B.

Exercice 2 :

a) Déterminer la distance parcourue par le train entre les gares A et B.

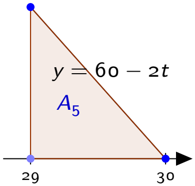
$$\int_{29}^{30}(60-2t)dt = \text{Aire}(A_5) = \frac{2(30-29)}{2} = 1$$



Exercice 2 :

a) Déterminer la distance parcourue par le train entre les gares A et B.

$\int_{29}^{30}(60 - 2t)dt = \text{Aire}(A_5) = \frac{2(30-29)}{2} = 1$



Donc

$$D = 8 + 80 + 6 + 6 + 1 = 101 \text{ km}.$$

Exercice 2 :

b) Donner la vitesse moyenne du train sur le parcours en $\mathrm{km{\cdot}mn^{-1}}$ puis en $\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$.

Exercice 2 :

b) Donner la vitesse moyenne du train sur le parcours en $\mathrm{km{\cdot}mn^{-1}}$ puis en $\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$.

La vitesse moyenne du train en $\mathrm{km{\cdot}mn^{-1}}$ entre $t = 0$ et $t = 30$ vaut

$$V = \frac{D}{30} = \frac{101}{30} \approx 3.36\ \mathrm{km{\cdot}mn^{-1}}.$$

Exercice 2 :

b) Donner la vitesse moyenne du train sur le parcours en $\mathrm{km{\cdot}mn^{-1}}$ puis en $\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$.

La vitesse moyenne du train en $\mathrm{km{\cdot}mn^{-1}}$ entre $t = 0$ et $t = 30$ vaut

$$V = \frac{D}{30} = \frac{101}{30} \approx 3.36\ \mathrm{km{\cdot}mn^{-1}}.$$

En $\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$

$$V = \frac{D}{0.5} = \frac{101}{0.5} = 202\ \mathrm{km{\cdot}h^{-1}} \qquad (30\mathrm{mn} = 0.5\mathrm{h}).$$

Exercice 3 :

a) Déterminer la primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \mapsto 1 - 2x + x^2$ qui s'annule en 0, puis celle qui s'annule en 2.

Exercice 3 :

a) Déterminer la primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \mapsto 1 - 2x + x^2$ qui s'annule en 0, puis celle qui s'annule en 2.

On rappelle que si $n \in \mathbb{N}$

$$x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad \text{est une primitive sur } \mathbb{R} \text{ de } x \mapsto x^n.$$

Exercice 3 :

a) Déterminer la primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \mapsto 1 - 2x + x^2$ qui s'annule en 0, puis celle qui s'annule en 2.

On rappelle que si $n \in \mathbb{N}$

$$x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad \text{est une primitive sur } \mathbb{R} \text{ de } x \mapsto x^n.$$

Donc les primitives de $f : x \mapsto 1 - 2x + x^2$ sont de la forme

$$x \mapsto x - 2\left(\frac{x^2}{2}\right) + \frac{x^3}{3} + C = x - x^2 + \frac{x^3}{3} + C,\ \ C \in \mathbb{R}.$$

Exercice 3 :

a) Déterminer la primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \mapsto 1 - 2x + x^2$ qui s'annule en 0, puis celle qui s'annule en 2.

On rappelle que si $n \in \mathbb{N}$

$$x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad \text{est une primitive sur } \mathbb{R} \text{ de } x \mapsto x^n.$$

Donc les primitives de $f : x \mapsto 1 - 2x + x^2$ sont de la forme

$$x \mapsto x - 2\left(\frac{x^2}{2}\right) + \frac{x^3}{3} + C = x - x^2 + \frac{x^3}{3} + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Notons F_0 (resp. F_2) la primitive de f qui s'annule en 0 (resp. en 2)

Exercice 3 :

a) Déterminer la primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \mapsto 1 - 2x + x^2$ qui s'annule en 0, puis celle qui s'annule en 2.

On rappelle que si $n \in \mathbb{N}$

$$x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad \text{est une primitive sur } \mathbb{R} \text{ de } x \mapsto x^n.$$

Donc les primitives de $f : x \mapsto 1 - 2x + x^2$ sont de la forme

$$x \mapsto x - 2\left(\frac{x^2}{2}\right) + \frac{x^3}{3} + C = x - x^2 + \frac{x^3}{3} + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Notons F_0 (resp. F_2) la primitive de f qui s'annule en 0 (resp. en 2)

Comme $F_0(0) = C = 0$ alors

$$F_0(x) = x - x^2 + \frac{x^3}{3}.$$

Exercice 3 :

a) Déterminer la primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \mapsto 1 - 2x + x^2$ qui s'annule en 0, puis celle qui s'annule en 2.

On rappelle que si $n \in \mathbb{N}$

$$x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad \text{est une primitive sur } \mathbb{R} \text{ de } x \mapsto x^n.$$

Donc les primitives de $f : x \mapsto 1 - 2x + x^2$ sont de la forme

$$x \mapsto x - 2\left(\frac{x^2}{2}\right) + \frac{x^3}{3} + C = x - x^2 + \frac{x^3}{3} + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Notons F_0 (resp. F_2) la primitive de f qui s'annule en 0 (resp. en 2)

Comme $F_0(0) = C = 0$ alors

$$F_0(x) = x - x^2 + \frac{x^3}{3}.$$

Comme $F_2(2) = 2 - 4 + \frac{8}{3} + C = 0$ alors $C = -2 + 4 - \frac{8}{3} = -\frac{2}{3}$ et donc

$$F_2(x) = x - x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{2}{3};$$

Exercice 3 :

b) Soit $g :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$, définie par $g(t) = \dfrac{2}{t} - t$. Déterminer la primitive de g qui s'annule en 1, puis celle qui vaut 3 en e.

Exercice 3 :

b) Soit $g :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$, définie par $g(t) = \dfrac{2}{t} - t$. Déterminer la primitive de g qui s'annule en 1, puis celle qui vaut 3 en e.

On rappelle que

$$t \mapsto \ln t \quad \text{est une primitive de } t \mapsto \frac{1}{t} \text{ sur }]0, +\infty[.$$

Exercice 3 :

b) Soit $g :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$, définie par $g(t) = \dfrac{2}{t} - t$. Déterminer la primitive de g qui s'annule en 1, puis celle qui vaut 3 en e.

On rappelle que

$$t \mapsto \ln t \quad \text{est une primitive de } t \mapsto \frac{1}{t} \text{ sur }]0, +\infty[.$$

Donc les primitives de $f : t \mapsto g(t) = \frac{2}{t} - t$ sur $]0, +\infty[$ sont de la forme

$$t \mapsto 2 \ln t - \frac{t^2}{2} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Exercice 3 :

b) Soit $g :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$, définie par $g(t) = \dfrac{2}{t} - t$. Déterminer la primitive de g qui s'annule en 1, puis celle qui vaut 3 en e.

On rappelle que

$$t \mapsto \ln t \quad \text{est une primitive de } t \mapsto \frac{1}{t} \text{ sur }]0, +\infty[.$$

Donc les primitives de $f : t \mapsto g(t) = \frac{2}{t} - t$ sur $]0, +\infty[$ sont de la forme

$$t \mapsto 2\ln t - \frac{t^2}{2} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Notons G_1 (resp. G_3) la primitive de g qui s'annule en 1 (resp. qui vaut 3 en e).

Exercice 3 :

b) Soit $g :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$, définie par $g(t) = \dfrac{2}{t} - t$. Déterminer la primitive de g qui s'annule en 1, puis celle qui vaut 3 en e.

On rappelle que

$$t \mapsto \ln t \quad \text{est une primitive de } t \mapsto \frac{1}{t} \text{ sur }]0, +\infty[.$$

Donc les primitives de $f : t \mapsto g(t) = \frac{2}{t} - t$ sur $]0, +\infty[$ sont de la forme

$$t \mapsto 2\ln t - \frac{t^2}{2} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Notons G_1 (resp. G_3) la primitive de g qui s'annule en 1 (resp. qui vaut 3 en e).

Comme $G_1(1) = 2\ln 1 - \frac{1}{2} + C = 0$ alors $C = \frac{1}{2}$ et donc

$$G_1(t) = 2\ln t - \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2}.$$

Exercice 3 :

b) Soit $g :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$, définie par $g(t) = \dfrac{2}{t} - t$. Déterminer la primitive de g qui s'annule en 1, puis celle qui vaut 3 en e.

On rappelle que

$$t \mapsto \ln t \quad \text{est une primitive de } t \mapsto \frac{1}{t} \text{ sur }]0, +\infty[.$$

Donc les primitives de $f : t \mapsto g(t) = \frac{2}{t} - t$ sur $]0, +\infty[$ sont de la forme

$$t \mapsto 2\ln t - \frac{t^2}{2} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Notons G_1 (resp. G_3) la primitive de g qui s'annule en 1 (resp. qui vaut 3 en e).

Comme $G_1(1) = 2\ln 1 - \frac{1}{2} + C = 0$ alors $C = \frac{1}{2}$ et donc

$$G_1(t) = 2\ln t - \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2}.$$

Comme $G_3(e) = 2\ln e - \frac{e^2}{2} + C = 3$ alors $C = \frac{e^2}{2} + 1$ et donc

$$G_3(t) = 2\ln t - \frac{t^2}{2} + \frac{e^2}{2} + 1.$$

Exercice 4 :

Trouver les primitives sur I de la fonction f dans chacun des cas suivants.

a) $I=\mathbb{R}$, $f(x)=(2x+1)^3$;

b) $I=\mathbb{R}$, $f(t)=e^{\lambda t}$ $(\lambda \in \mathbb{R}^*)$;

c) $I=\mathbb{R}$, $f(x)=b^x$ $(b \in \mathbb{R}_+^*)$;

d) $I=]-1,+\infty[$, $f(x)=(x+1)^\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R})$;

e) $I=]-\infty,3]$, $f(s)=\sqrt{3-s}$;

f) $I=]3,+\infty[$, $f(x)=\dfrac{1}{(x-3)^n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$;

g) $I=]-1/3,+\infty[$ ou $I=]-\infty,-1/3[$, $f(t)=\frac{4}{3t+1}$.

Exercice 4 :

Trouver les primitives sur I de la fonction f dans chacun des cas suivants.

a) $I = \mathbb{R}$, $f(x) = (2x+1)^3$; b) $I = \mathbb{R}$, $f(t) = e^{\lambda t}$ $(\lambda \in \mathbb{R}^*)$;

c) $I = \mathbb{R}$, $f(x) = b^x$ $(b \in \mathbb{R}_+^*)$; d) $I =]-1, +\infty[$, $f(x) = (x+1)^\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R})$;

e) $I =]-\infty, 3]$, $f(s) = \sqrt{3-s}$; f) $I =]3, +\infty[$, $f(x) = \dfrac{1}{(x-3)^n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$;

g) $I =]-1/3, +\infty[$ ou $I =]-\infty, -1/3[$, $f(t) = \frac{4}{3t+1}$.

Dans cet exercice nous utiliserons le résultat suivant :

Exercice 4 :

Trouver les primitives sur I de la fonction f dans chacun des cas suivants.

a) $I = \mathbb{R}$, $f(x) = (2x+1)^3$; b) $I = \mathbb{R}$, $f(t) = e^{\lambda t}$ $(\lambda \in \mathbb{R}^*)$;

c) $I = \mathbb{R}$, $f(x) = b^x$ $(b \in \mathbb{R}_+^*)$; d) $I =]-1, +\infty[$, $f(x) = (x+1)^\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R})$;

e) $I =]-\infty, 3]$, $f(s) = \sqrt{3-s}$; f) $I =]3, +\infty[$, $f(x) = \dfrac{1}{(x-3)^n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$;

g) $I =]-1/3, +\infty[$ ou $I =]-\infty, -1/3[$, $f(t) = \frac{4}{3t+1}$.

Dans cet exercice nous utiliserons le résultat suivant :

Si G est une primitive de g sur I, si $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$ alors les primitives de $x \mapsto g(ax+b)$ sur $I' = \{x \in \mathbb{R} \mid ax+b \in I\}$ sont de la forme

$$x \mapsto \frac{G(ax+b)}{a} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Exercice 4 :

Trouver les primitives sur I de la fonction f dans chacun des cas suivants.

a) $I = \mathbb{R}$, $f(x) = (2x+1)^3$;

b) $I = \mathbb{R}$, $f(t) = e^{\lambda t}$ $(\lambda \in \mathbb{R}^*)$;

c) $I = \mathbb{R}$, $f(x) = b^x$ $(b \in \mathbb{R}_+^*)$;

d) $I =]-1, +\infty[$, $f(x) = (x+1)^\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R})$;

e) $I =]-\infty, 3]$, $f(s) = \sqrt{3-s}$;

f) $I =]3, +\infty[$, $f(x) = \dfrac{1}{(x-3)^n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$;

g) $I =]-1/3, +\infty[$ ou $I =]-\infty, -1/3[$, $f(t) = \frac{4}{3t+1}$.

Dans cet exercice nous utiliserons le résultat suivant :

Si G est une primitive de g sur I, si $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$ alors les primitives de $x \mapsto g(ax+b)$ sur $I' = \{x \in \mathbb{R} \mid ax+b \in I\}$ sont de la forme

$$x \mapsto \frac{G(ax+b)}{a} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

<u>Preuve</u> : Si on note $G_{a,b}(x) := \dfrac{G(ax+b)}{a}$ alors

$$G'_{a,b}(x) = \frac{1}{a} G'(ax+b)(ax+b)' = G'(ax+b) = g(ax+b)$$

car $G' = g$ vu que G est une primitive de g sur I.

Exercice 4 :

Trouver les primitives sur I de la fonction f dans chacun des cas suivants.

a) $I = \mathbb{R}$, $f(x) = (2x+1)^3$; b) $I = \mathbb{R}$, $f(t) = e^{\lambda t}$ ($\lambda \in \mathbb{R}^*$) ;

Exercice 4 :

Trouver les primitives sur I de la fonction f dans chacun des cas suivants.

a) $I = \mathbb{R}$, $f(x) = (2x+1)^3$; b) $I = \mathbb{R}$, $f(t) = e^{\lambda t}$ $(\lambda \in \mathbb{R}^*)$;

a) $f(x) = (2x+1)^3 = g(2x+1)$ où $g(X) = X^3$.

Exercice 4 :

Trouver les primitives sur I de la fonction f dans chacun des cas suivants.

a) $I = \mathbb{R}$, $f(x) = (2x+1)^3$; b) $I = \mathbb{R}$, $f(t) = e^{\lambda t}$ $(\lambda \in \mathbb{R}^*)$;

a) $f(x) = (2x+1)^3 = g(2x+1)$ où $g(X) = X^3$.

$X \mapsto G(X) = \dfrac{X^4}{4}$ est une primitive de g sur $\mathbb{R}$

Exercice 4 :

Trouver les primitives sur I de la fonction f dans chacun des cas suivants.

a) $I = \mathbb{R}$, $f(x) = (2x+1)^3$; b) $I = \mathbb{R}$, $f(t) = e^{\lambda t}$ $(\lambda \in \mathbb{R}^*)$;

a) $f(x) = (2x+1)^3 = g(2x+1)$ où $g(X) = X^3$.

$X \mapsto G(X) = \dfrac{X^4}{4}$ est une primitive de g sur $\mathbb{R}$

Donc les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont de la forme

$$x \mapsto \frac{G(2x+1)}{2} + C = \frac{(2x+1)^4}{8} + C.$$

Exercice 4 :

Trouver les primitives sur I de la fonction f dans chacun des cas suivants.

a) $I = \mathbb{R}$, $f(x) = (2x+1)^3$; b) $I = \mathbb{R}$, $f(t) = e^{\lambda t}$ $(\lambda \in \mathbb{R}^*)$;

a) $f(x) = (2x+1)^3 = g(2x+1)$ où $g(X) = X^3$.

$X \mapsto G(X) = \dfrac{X^4}{4}$ est une primitive de g sur $\mathbb{R}$

Donc les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont de la forme

$$x \mapsto \frac{G(2x+1)}{2} + C = \frac{(2x+1)^4}{8} + C.$$

b) $f(t) = e^{\lambda t} = g(\lambda t)$ où $g(X) = e^X$

Exercice 4 :

Trouver les primitives sur I de la fonction f dans chacun des cas suivants.

a) $I=\mathbb{R}$, $f(x)=(2x+1)^3$; b) $I=\mathbb{R}$, $f(t)=e^{\lambda t}$ $(\lambda\in\mathbb{R}^*)$;

a) $f(x)=(2x+1)^3=g(2x+1)$ où $g(X)=X^3$.

$X\mapsto G(X)=\dfrac{X^4}{4}$ est une primitive de g sur $\mathbb{R}$

Donc les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont de la forme

$$x\mapsto \frac{G(2x+1)}{2}+C=\frac{(2x+1)^4}{8}+C.$$

b) $f(t)=e^{\lambda t}=g(\lambda t)$ où $g(X)=e^X$

$X\mapsto G(X)=e^X$ est une primitive de g sur $\mathbb{R}$

Exercice 4 :

Trouver les primitives sur I de la fonction f dans chacun des cas suivants.

a) $I=\mathbb{R},\ f(x)=(2x+1)^3$; b) $I=\mathbb{R},\ f(t)=e^{\lambda t}\ (\lambda\in\mathbb{R}^*)$;

a) $f(x)=(2x+1)^3=g(2x+1)$ où $g(X)=X^3$.

$X\mapsto G(X)=\dfrac{X^4}{4}$ est une primitive de g sur $\mathbb{R}$

Donc les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont de la forme

$$x\mapsto \frac{G(2x+1)}{2}+C=\frac{(2x+1)^4}{8}+C.$$

b) $f(t)=e^{\lambda t}=g(\lambda t)$ où $g(X)=e^X$

$X\mapsto G(X)=e^X$ est une primitive de g sur $\mathbb{R}$

Donc les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont de la forme

$$t\mapsto \frac{G(\lambda t)}{\lambda}+C=\frac{e^{\lambda t}}{\lambda}+C,\quad C\in\mathbb{R}.$$

Exercice 4 :

Trouver les primitives sur I de la fonction f dans chacun des cas suivants.

c) $I = \mathbb{R}$, $f(x) = b^x$ $(b \in \mathbb{R}_+^*)$; d) $I =]-1, +\infty[$, $f(x) = (x+1)^\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R})$;

Exercice 4 :

Trouver les primitives sur I de la fonction f dans chacun des cas suivants.

c) $I = \mathbb{R}$, $f(x) = b^x$ $(b \in \mathbb{R}_+^*)$; d) $I =]-1, +\infty[$, $f(x) = (x+1)^\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R})$;

c) $f(x) = b^x = e^{x \ln b} = g(x \ln b)$ où $g(X) = e^X$

Exercice 4 :

Trouver les primitives sur I de la fonction f dans chacun des cas suivants.

c) $I = \mathbb{R}$, $f(x) = b^x$ $(b \in \mathbb{R}_+^*)$; d) $I =]-1, +\infty[$, $f(x) = (x+1)^\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R})$;

c) $f(x) = b^x = e^{x \ln b} = g(x \ln b)$ où $g(X) = e^X$

$X \mapsto G(X) = e^X$ est une primitive de g sur $\mathbb{R}$

Exercice 4 :

Trouver les primitives sur I de la fonction f dans chacun des cas suivants.
c) $I = \mathbb{R}$, $f(x) = b^x$ $(b \in \mathbb{R}_+^*)$; d) $I =]-1, +\infty[$, $f(x) = (x+1)^\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R})$;

c) $f(x) = b^x = e^{x \ln b} = g(x \ln b)$ où $g(X) = e^X$

$X \mapsto G(X) = e^X$ est une primitive de g sur $\mathbb{R}$

Donc les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont de la forme

$$x \mapsto \frac{G(x \ln b)}{\ln b} + C = \frac{e^{x \ln b}}{\ln b} + C = \frac{b^x}{\ln b} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Exercice 4 :

Trouver les primitives sur I de la fonction f dans chacun des cas suivants.
c) $I = \mathbb{R}$, $f(x) = b^x$ $(b \in \mathbb{R}_+^*)$; d) $I =]-1, +\infty[$, $f(x) = (x+1)^\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R})$;

c) $f(x) = b^x = e^{x \ln b} = g(x \ln b)$ où $g(X) = e^X$

$X \mapsto G(X) = e^X$ est une primitive de g sur $\mathbb{R}$

Donc les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont de la forme

$$x \mapsto \frac{G(x \ln b)}{\ln b} + C = \frac{e^{x \ln b}}{\ln b} + C = \frac{b^x}{\ln b} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

d) $f(x) = (x+1)^\alpha = g(x+1)$ où $g(X) = X^\alpha$.

Exercice 4 :

Trouver les primitives sur I de la fonction f dans chacun des cas suivants.
c) $I=\mathbb{R}$, $f(x)=b^x$ $(b\in\mathbb{R}_+^*)$; d) $I=]-1,+\infty[$, $f(x)=(x+1)^\alpha$ $(\alpha\in\mathbb{R})$;

c) $f(x)=b^x=e^{x\ln b}=g(x\ln b)$ où $g(X)=e^X$

$X\mapsto G(X)=e^X$ est une primitive de g sur $\mathbb{R}$

Donc les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont de la forme

$$x\mapsto \frac{G(x\ln b)}{\ln b}+C=\frac{e^{x\ln b}}{\ln b}+C=\frac{b^x}{\ln b}+C,\quad C\in\mathbb{R}.$$

d) $f(x)=(x+1)^\alpha=g(x+1)$ où $g(X)=X^\alpha$.

Si $\alpha\neq-1$, $X\mapsto G(X)=\dfrac{X^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ est une primitive de g sur $]0,+\infty[$.

Exercice 4 :

Trouver les primitives sur I de la fonction f dans chacun des cas suivants.

c) $I=\mathbb{R}$, $f(x)=b^x$ $(b\in\mathbb{R}_+^*)$; d) $I=]-1,+\infty[$, $f(x)=(x+1)^\alpha$ $(\alpha\in\mathbb{R})$;

c) $f(x)=b^x=e^{x\ln b}=g(x\ln b)$ où $g(X)=e^X$

$X\mapsto G(X)=e^X$ est une primitive de g sur $\mathbb{R}$

Donc les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont de la forme

$$x\mapsto \frac{G(x\ln b)}{\ln b}+C=\frac{e^{x\ln b}}{\ln b}+C=\frac{b^x}{\ln b}+C,\quad C\in\mathbb{R}.$$

d) $f(x)=(x+1)^\alpha=g(x+1)$ où $g(X)=X^\alpha$.

Si $\alpha\neq-1$, $X\mapsto G(X)=\dfrac{X^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ est une primitive de g sur $]0,+\infty[$.

Donc, si $\alpha\neq-1$, les primitives de f sur $\{x\mid x+1>0\}=]-1,+\infty[$ sont de la forme

$$x\mapsto G(x+1)+C=\frac{(x+1)^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C,\quad C\in\mathbb{R}.$$

Exercice 4 :

Trouver les primitives sur I de la fonction f dans chacun des cas suivants.
c) $I=\mathbb{R}$, $f(x)=b^x$ $(b\in\mathbb{R}_+^*)$; d) $I=]-1,+\infty[$, $f(x)=(x+1)^\alpha$ $(\alpha\in\mathbb{R})$;

c) $f(x)=b^x=e^{x\ln b}=g(x\ln b)$ où $g(X)=e^X$

$X\mapsto G(X)=e^X$ est une primitive de g sur $\mathbb{R}$

Donc les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont de la forme

$$x\mapsto \frac{G(x\ln b)}{\ln b}+C=\frac{e^{x\ln b}}{\ln b}+C=\frac{b^x}{\ln b}+C,\quad C\in\mathbb{R}.$$

d) $f(x)=(x+1)^\alpha=g(x+1)$ où $g(X)=X^\alpha$.

Si $\alpha\neq-1$, $X\mapsto G(X)=\dfrac{X^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ est une primitive de g sur $]0,+\infty[$.

Donc, si $\alpha\neq-1$, les primitives de f sur $\{x\mid x+1>0\}=]-1,+\infty[$ sont de la forme

$$x\mapsto G(x+1)+C=\frac{(x+1)^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C,\quad C\in\mathbb{R}.$$

Si $\alpha=-1$, $X\mapsto G(X)=\ln(X)$ est une primitive de g sur $]0,+\infty[$.

Exercice 4 :

Trouver les primitives sur I de la fonction f dans chacun des cas suivants.
c) $I = \mathbb{R}$, $f(x) = b^x$ $(b \in \mathbb{R}_+^*)$; d) $I =]-1, +\infty[$, $f(x) = (x+1)^\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R})$;

c) $f(x) = b^x = e^{x \ln b} = g(x \ln b)$ où $g(X) = e^X$

$X \mapsto G(X) = e^X$ est une primitive de g sur $\mathbb{R}$

Donc les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont de la forme

$$x \mapsto \frac{G(x \ln b)}{\ln b} + C = \frac{e^{x \ln b}}{\ln b} + C = \frac{b^x}{\ln b} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

d) $f(x) = (x+1)^\alpha = g(x+1)$ où $g(X) = X^\alpha$.

Si $\alpha \neq -1$, $X \mapsto G(X) = \dfrac{X^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ est une primitive de g sur $]0, +\infty[$.

Donc, si $\alpha \neq -1$, les primitives de f sur $\{x \mid x+1 > 0\} =]-1, +\infty[$ sont de la forme

$$x \mapsto G(x+1) + C = \frac{(x+1)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Si $\alpha = -1$, $X \mapsto G(X) = \ln(X)$ est une primitive de g sur $]0, +\infty[$.

Dans ce cas, les primitives de f sur $\{x \mid x+1 > 0\} =]-1, +\infty[$ sont de la forme

$$x \mapsto G(x+1) + C = \ln(x+1) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Exercice 4 :

Trouver les primitives sur I de la fonction f dans chacun des cas suivants.

e) $I =]-\infty, 3]$, $f(s) = \sqrt{3-s}$; f) $I =]3, +\infty[$, $f(x) = \dfrac{1}{(x-3)^n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$;

Exercice 4 :

Trouver les primitives sur I de la fonction f dans chacun des cas suivants.

e) $I =]-\infty, 3]$, $f(s) = \sqrt{3-s}$; f) $I =]3, +\infty[$, $f(x) = \dfrac{1}{(x-3)^n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$;

e) $f(s) = \sqrt{3-s} = g(3-s)$ où $g(X) = \sqrt{X}$.

Exercice 4 :

Trouver les primitives sur I de la fonction f dans chacun des cas suivants.

e) $I =]-\infty, 3]$, $f(s) = \sqrt{3-s}$; f) $I =]3, +\infty[$, $f(x) = \dfrac{1}{(x-3)^n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$;

e) $f(s) = \sqrt{3-s} = g(3-s)$ où $g(X) = \sqrt{X}$.

$X \mapsto G(X) = \frac{2}{3}X^{\frac{3}{2}}$ est une primitive de g sur $[0, +\infty[$.

Exercice 4 :

Trouver les primitives sur I de la fonction f dans chacun des cas suivants.

e) $I =]-\infty, 3]$, $f(s) = \sqrt{3-s}$; f) $I =]3, +\infty[$, $f(x) = \dfrac{1}{(x-3)^n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$;

e) $f(s) = \sqrt{3-s} = g(3-s)$ où $g(X) = \sqrt{X}$.

$X \mapsto G(X) = \frac{2}{3}X^{\frac{3}{2}}$ est une primitive de g sur $[0, +\infty[$.

Donc les primitives de f sur $\{s \mid 3 - s \geq 0\} =]-\infty, 3]$ sont de la forme

$$s \mapsto -G(3-s) + C = -\frac{2}{3}(3-s)^{\frac{3}{2}} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Exercice 4 :

Trouver les primitives sur I de la fonction f dans chacun des cas suivants.

e) $I =]-\infty, 3]$, $f(s) = \sqrt{3-s}$; f) $I =]3, +\infty[$, $f(x) = \dfrac{1}{(x-3)^n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$;

e) $f(s) = \sqrt{3-s} = g(3-s)$ où $g(X) = \sqrt{X}$.

$X \mapsto G(X) = \frac{2}{3}X^{\frac{3}{2}}$ est une primitive de g sur $[0, +\infty[$.

Donc les primitives de f sur $\{s \mid 3-s \geq 0\} =]-\infty, 3]$ sont de la forme

$$s \mapsto -G(3-s) + C = -\frac{2}{3}(3-s)^{\frac{3}{2}} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

f) $f(x) = \dfrac{1}{(x-3)^n} = g(x-3)$ où $g(X) = \dfrac{1}{X^n}$.

Exercice 4 :

Trouver les primitives sur I de la fonction f dans chacun des cas suivants.

e) $I =]-\infty, 3]$, $f(s) = \sqrt{3-s}$; f) $I =]3, +\infty[$, $f(x) = \dfrac{1}{(x-3)^n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$;

e) $f(s) = \sqrt{3-s} = g(3-s)$ où $g(X) = \sqrt{X}$.

$X \mapsto G(X) = \frac{2}{3}X^{\frac{3}{2}}$ est une primitive de g sur $[0, +\infty[$.

Donc les primitives de f sur $\{s \mid 3-s \geq 0\} =]-\infty, 3]$ sont de la forme

$$s \mapsto -G(3-s) + C = -\frac{2}{3}(3-s)^{\frac{3}{2}} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

f) $f(x) = \dfrac{1}{(x-3)^n} = g(x-3)$ où $g(X) = \dfrac{1}{X^n}$.

Si $n > 1$, $X \mapsto G(X) = -\dfrac{1}{(n-1)X^{n-1}}$ est une primitive de g sur $]0, +\infty[$.

Exercice 4 :

Trouver les primitives sur I de la fonction f dans chacun des cas suivants.

e) $I =]-\infty, 3]$, $f(s) = \sqrt{3-s}$; f) $I =]3, +\infty[$, $f(x) = \dfrac{1}{(x-3)^n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$;

e) $f(s) = \sqrt{3-s} = g(3-s)$ où $g(X) = \sqrt{X}$.

$X \mapsto G(X) = \frac{2}{3}X^{\frac{3}{2}}$ est une primitive de g sur $[0, +\infty[$.

Donc les primitives de f sur $\{s \mid 3-s \geq 0\} =]-\infty, 3]$ sont de la forme

$$s \mapsto -G(3-s) + C = -\frac{2}{3}(3-s)^{\frac{3}{2}} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

f) $f(x) = \dfrac{1}{(x-3)^n} = g(x-3)$ où $g(X) = \dfrac{1}{X^n}$.

Si $n > 1$, $X \mapsto G(X) = -\dfrac{1}{(n-1)X^{n-1}}$ est une primitive de g sur $]0, +\infty[$.

Donc, si $n > 1$, les primitives de f sur $\{x \mid x-3 > 0\} =]3, +\infty[$ sont de la forme

$$x \mapsto G(x-3) + C = -\frac{1}{(n-1)(x-3)^{n-1}} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Exercice 4 :

Trouver les primitives sur I de la fonction f dans chacun des cas suivants.

e) $I =]-\infty, 3]$, $f(s) = \sqrt{3-s}$; f) $I =]3, +\infty[$, $f(x) = \dfrac{1}{(x-3)^n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$;

e) $f(s) = \sqrt{3-s} = g(3-s)$ où $g(X) = \sqrt{X}$.

$X \mapsto G(X) = \frac{2}{3}X^{\frac{3}{2}}$ est une primitive de g sur $[0, +\infty[$.

Donc les primitives de f sur $\{s \mid 3-s \geq 0\} =]-\infty, 3]$ sont de la forme

$$s \mapsto -G(3-s) + C = -\frac{2}{3}(3-s)^{\frac{3}{2}} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

f) $f(x) = \dfrac{1}{(x-3)^n} = g(x-3)$ où $g(X) = \dfrac{1}{X^n}$.

Si $n > 1$, $X \mapsto G(X) = -\dfrac{1}{(n-1)X^{n-1}}$ est une primitive de g sur $]0, +\infty[$.

Donc, si $n > 1$, les primitives de f sur $\{x \mid x-3 > 0\} =]3, +\infty[$ sont de la forme

$$x \mapsto G(x-3) + C = -\frac{1}{(n-1)(x-3)^{n-1}} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Si $n = 1$, $X \mapsto G(X) = \ln X$ est une primitive de g sur $]0, +\infty[$.

Exercice 4 :

Trouver les primitives sur I de la fonction f dans chacun des cas suivants.

e) $I =]-\infty, 3]$, $f(s) = \sqrt{3-s}$; f) $I =]3, +\infty[$, $f(x) = \dfrac{1}{(x-3)^n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$;

e) $f(s) = \sqrt{3-s} = g(3-s)$ où $g(X) = \sqrt{X}$.

$X \mapsto G(X) = \frac{2}{3} X^{\frac{3}{2}}$ est une primitive de g sur $[0, +\infty[$.

Donc les primitives de f sur $\{s \mid 3 - s \geq 0\} =]-\infty, 3]$ sont de la forme

$$s \mapsto -G(3-s) + C = -\frac{2}{3}(3-s)^{\frac{3}{2}} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

f) $f(x) = \dfrac{1}{(x-3)^n} = g(x-3)$ où $g(X) = \dfrac{1}{X^n}$.

Si $n > 1$, $X \mapsto G(X) = -\dfrac{1}{(n-1)X^{n-1}}$ est une primitive de g sur $]0, +\infty[$.

Donc, si $n > 1$, les primitives de f sur $\{x \mid x - 3 > 0\} =]3, +\infty[$ sont de la forme

$$x \mapsto G(x-3) + C = -\frac{1}{(n-1)(x-3)^{n-1}} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Si $n = 1$, $X \mapsto G(X) = \ln X$ est une primitive de g sur $]0, +\infty[$.

Dans ce cas, les primitives de f sur $\{x \mid x - 3 > 0\} =]3, +\infty[$ sont de la forme

$$x \mapsto G(x-3) + C = \ln(x-3) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Exercice 4 :

Trouver les primitives sur I de la fonction f dans chacun des cas suivants.
g) $I =]-1/3, +\infty[$ où $I =]-\infty, -1/3[$, $f(t) = \frac{4}{3t+1}$.

g) $f(t) = \dfrac{4}{3t+1} = g(3t+1)$ où $g(X) = \dfrac{4}{X}$.

Exercice 4 :

Trouver les primitives sur I de la fonction f dans chacun des cas suivants.
g) $I =]-1/3, +\infty[$ où $I =]-\infty, -1/3[$, $f(t) = \frac{4}{3t+1}$.

g) $f(t) = \dfrac{4}{3t+1} = g(3t+1)$ où $g(X) = \dfrac{4}{X}$.

$x \mapsto G(X) = 4 \ln |X|$ est une primitive de g sur $]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$.

Exercice 4 :

Trouver les primitives sur I de la fonction f dans chacun des cas suivants.
g) $I =]-1/3, +\infty[$ où $I =]-\infty, -1/3[$, $f(t) = \frac{4}{3t+1}$.

g) $f(t) = \dfrac{4}{3t+1} = g(3t+1)$ où $g(X) = \dfrac{4}{X}$.
$x \mapsto G(X) = 4\ln|X|$ est une primitive de g sur $]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$.
Donc les primitives de f sur $\{t \mid 3t+1 < 0\} =]-\infty, -\frac{1}{3}[$ ou
$\{t \mid 3t+1 > 0\} =]-\frac{1}{3}, +\infty[$ sont de la forme

$$t \mapsto \frac{G(3t+1)}{3} + C = \frac{4\ln|3t+1|}{3} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Exercice 5 :

Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue. On suppose que $\forall x \in [a, b] \;\; m \leq f(x) \leq M$. Montrer que la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[a, b]$ est comprise entre m et M.

Exercice 5 :

Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue. On suppose que $\forall x \in [a, b] \;\; m \leq f(x) \leq M$. Montrer que la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[a, b]$ est comprise entre m et M.

f est continue sur $[a, b]$. Sa valeur moyenne sur $[a, b]$ est égale à

$$V_M(f; a, b) := \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx.$$

Exercice 5 :

Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue. On suppose que $\forall x \in [a, b]\ \ m \leq f(x) \leq M$. Montrer que la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[a, b]$ est comprise entre m et M.

f est continue sur $[a, b]$. Sa valeur moyenne sur $[a, b]$ est égale à

$$V_M(f; a, b) := \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

Etant donné que

$$m \leq f(x) \leq M \qquad \text{pour tout } x \in [a, b]$$

Exercice 5 :

Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue. On suppose que $\forall x \in [a, b] \;\; m \leq f(x) \leq M$. Montrer que la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[a, b]$ est comprise entre m et M.

f est continue sur $[a, b]$. Sa valeur moyenne sur $[a, b]$ est égale à

$$V_M(f; a, b) := \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

Etant donné que

$$m \leq f(x) \leq M \qquad \text{pour tout } x \in [a, b]$$

alors

$$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b M dx.$$

Exercice 5 :

Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue. On suppose que $\forall x \in [a, b] \;\; m \leq f(x) \leq M$. Montrer que la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[a, b]$ est comprise entre m et M.

f est continue sur $[a, b]$. Sa valeur moyenne sur $[a, b]$ est égale à

$$V_M(f; a, b) := \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx.$$

Etant donné que

$$m \leq f(x) \leq M \qquad \text{pour tout } x \in [a, b]$$

alors

$$\int_a^b mdx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b Mdx.$$

Comme $\displaystyle\int_a^b mdx = m(b-a)$ et $\displaystyle\int_a^b Mdx = M(b-a)$

Exercice 5 :

Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue. On suppose que $\forall x \in [a, b] \;\; m \leq f(x) \leq M$. Montrer que la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[a, b]$ est comprise entre m et M.

f est continue sur $[a, b]$. Sa valeur moyenne sur $[a, b]$ est égale à

$$V_M(f; a, b) := \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx.$$

Etant donné que

$$m \leq f(x) \leq M \qquad \text{pour tout } x \in [a, b]$$

alors

$$\int_a^b mdx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b Mdx.$$

Comme $\displaystyle\int_a^b mdx = m(b-a)$ et $\displaystyle\int_a^b Mdx = M(b-a)$

alors

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

Exercice 5 :

Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue. On suppose que $\forall x \in [a, b] \;\; m \leq f(x) \leq M$. Montrer que la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[a, b]$ est comprise entre m et M.

f est continue sur $[a, b]$. Sa valeur moyenne sur $[a, b]$ est égale à

$$V_M(f; a, b) := \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

Etant donné que

$$m \leq f(x) \leq M \qquad \text{pour tout } x \in [a, b]$$

alors

$$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b M dx.$$

Comme $\displaystyle\int_a^b m dx = m(b-a)$ et $\displaystyle\int_a^b M dx = M(b-a)$

alors

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

ce qui conduit en divisant par $(b-a)$ à

$$m \leq V(f; a, b) \leq M.$$

Exercice 6 :

Calculer l'intégrale suivante.

a) $\displaystyle\int_1^4 (x+2)^2\, dx$

Exercice 6 :

Calculer l'intégrale suivante.

a) $\displaystyle\int_1^4 (x+2)^2 \, dx$

On rappelle que si F est une primitive de f sur $[a, b]$ alors

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Exercice 6 :

Calculer l'intégrale suivante.

a) $\displaystyle\int_1^4 (x+2)^2 \, dx$

On rappelle que si F est une primitive de f sur $[a, b]$ alors

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

a) $f(x) = (x+2)^2 = g(x+2)$ où $g(X) = X^2$

Exercice 6 :

Calculer l'intégrale suivante.

a) $\displaystyle\int_1^4 (x+2)^2\,dx$

On rappelle que si F est une primitive de f sur $[a, b]$ alors

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

a) $f(x) = (x+2)^2 = g(x+2)$ où $g(X) = X^2$

$X \mapsto \dfrac{X^3}{3}$ est une primitive de g sur $\mathbb{R}$

Exercice 6 :

Calculer l'intégrale suivante.

a) $\displaystyle\int_1^4 (x+2)^2\,dx$

On rappelle que si F est une primitive de f sur $[a,b]$ alors

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

a) $f(x) = (x+2)^2 = g(x+2)$ où $g(X) = X^2$

$X \mapsto \dfrac{X^3}{3}$ est une primitive de g sur $\mathbb{R}$

Donc $x \mapsto \dfrac{(x+2)^3}{3}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6 :

Calculer l'intégrale suivante.

a) $\displaystyle\int_1^4 (x+2)^2\,dx$

On rappelle que si F est une primitive de f sur $[a,b]$ alors

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

a) $f(x) = (x+2)^2 = g(x+2)$ où $g(X) = X^2$

$X \mapsto \dfrac{X^3}{3}$ est une primitive de g sur $\mathbb{R}$

Donc $x \mapsto \dfrac{(x+2)^3}{3}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Par conséquent

$$\int_1^4 f(x)dx = \left[\frac{(x+2)^3}{3}\right]_1^4 = \frac{6^3}{3} - \frac{3^3}{3} = \frac{189}{3} = 63.$$

Exercice 6 :

Calculer les intégrales suivantes.

b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^3-1}{x^2}\,dx$ c) $\displaystyle\int_a^{3a} \frac{ds}{s}$ $(a \in \mathbb{R}^*)$

b) $f(x) = \dfrac{x^3-1}{x^2} = x - \dfrac{1}{x^2}$

Exercice 6 :

Calculer les intégrales suivantes.

b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^3-1}{x^2}\,dx$ c) $\displaystyle\int_a^{3a} \frac{ds}{s}$ $(a \in \mathbb{R}^*)$

b) $f(x) = \dfrac{x^3-1}{x^2} = x - \dfrac{1}{x^2}$

$x \mapsto \dfrac{x^2}{2}$ est une primitive de $x \mapsto x$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 6 :

Calculer les intégrales suivantes.

b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^3-1}{x^2}\,dx$ c) $\displaystyle\int_a^{3a} \frac{ds}{s}$ $(a \in \mathbb{R}^*)$

b) $f(x) = \dfrac{x^3-1}{x^2} = x - \dfrac{1}{x^2}$

$x \mapsto \dfrac{x^2}{2}$ est une primitive de $x \mapsto x$ sur $\mathbb{R}$

et $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est une primitive de $x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$ sur $]0, +\infty[$

Exercice 6 :

Calculer les intégrales suivantes.

b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^3-1}{x^2}\,dx$ c) $\displaystyle\int_a^{3a} \frac{ds}{s}$ $(a \in \mathbb{R}^*)$

b) $f(x) = \dfrac{x^3-1}{x^2} = x - \dfrac{1}{x^2}$

$x \mapsto \dfrac{x^2}{2}$ est une primitive de $x \mapsto x$ sur $\mathbb{R}$

et $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est une primitive de $x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$ sur $]0, +\infty[$

Donc $x \mapsto \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{1}{x}$ est une primitive de f sur $]0, +\infty[$.

Exercice 6 :

Calculer les intégrales suivantes.

b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^3-1}{x^2}\,dx$ c) $\displaystyle\int_a^{3a} \frac{ds}{s}$ $(a \in \mathbb{R}^*)$

b) $f(x) = \dfrac{x^3-1}{x^2} = x - \dfrac{1}{x^2}$

$x \mapsto \dfrac{x^2}{2}$ est une primitive de $x \mapsto x$ sur $\mathbb{R}$

et $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est une primitive de $x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$ sur $]0, +\infty[$

Donc $x \mapsto \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{1}{x}$ est une primitive de f sur $]0, +\infty[$.

Par conséquent

$$\int_1^3 f(x)dx = \left[\frac{x^2}{2} + \frac{1}{x}\right]_1^3 = \left(\frac{9}{2} + \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{20}{6} = \frac{10}{3}.$$

Exercice 6 :

Calculer les intégrales suivantes.

b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^3-1}{x^2}\,dx$ c) $\displaystyle\int_a^{3a} \frac{ds}{s}$ $(a \in \mathbb{R}^*)$

b) $f(x) = \dfrac{x^3-1}{x^2} = x - \dfrac{1}{x^2}$

$x \mapsto \dfrac{x^2}{2}$ est une primitive de $x \mapsto x$ sur $\mathbb{R}$

et $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est une primitive de $x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$ sur $]0,+\infty[$

Donc $x \mapsto \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{1}{x}$ est une primitive de f sur $]0,+\infty[$.

Par conséquent

$$\int_1^3 f(x)dx = \left[\frac{x^2}{2} + \frac{1}{x}\right]_1^3 = \left(\frac{9}{2} + \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{20}{6} = \frac{10}{3}.$$

c) $s \mapsto \ln|s|$ est une primitive de $s \mapsto \dfrac{1}{s}$ sur $]-\infty, 0[$ ou $]0,+\infty[$

Exercice 6 :

Calculer les intégrales suivantes.

b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^3-1}{x^2}\,dx$ c) $\displaystyle\int_a^{3a} \frac{ds}{s}$ $(a \in \mathbb{R}^*)$

b) $f(x) = \dfrac{x^3-1}{x^2} = x - \dfrac{1}{x^2}$

$x \mapsto \dfrac{x^2}{2}$ est une primitive de $x \mapsto x$ sur $\mathbb{R}$

et $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est une primitive de $x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$ sur $]0,+\infty[$

Donc $x \mapsto \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{1}{x}$ est une primitive de f sur $]0,+\infty[$.

Par conséquent

$$\int_1^3 f(x)dx = \left[\frac{x^2}{2} + \frac{1}{x}\right]_1^3 = \left(\frac{9}{2} + \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{20}{6} = \frac{10}{3}.$$

c) $s \mapsto \ln|s|$ est une primitive de $s \mapsto \dfrac{1}{s}$ sur $]-\infty, 0[$ ou $]0,+\infty[$

Donc

$$\int_a^{3a} \frac{ds}{s} = [\ln|s|]_a^{3a} = \ln|3a| - \ln|a| = \ln\frac{|3a|}{|a|} = \ln 3$$

.

Exercice 6 :

Calculer les intégrales suivantes.

d) $\displaystyle\int_1^8 x^{1/3}\,dx$ e) $\displaystyle\int_0^1 e^{3t} - e^{-t}\,dt$

d) $x \mapsto \dfrac{x^{(1+1/3)}}{1+1/3} = \dfrac{3}{4}x^{4/3}$ est une primitive de $x \mapsto x^{1/3}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6 :

Calculer les intégrales suivantes.

d) $\displaystyle\int_1^8 x^{1/3}\,dx$ e) $\displaystyle\int_0^1 e^{3t} - e^{-t}\,dt$

d) $x \mapsto \dfrac{x^{(1+1/3)}}{1+1/3} = \dfrac{3}{4}x^{4/3}$ est une primitive de $x \mapsto x^{1/3}$ sur $\mathbb{R}$.

Donc

$$\int_1^8 x^{1/3} dx = \left[\frac{3}{4}x^{4/3}\right]_1^8 = \frac{3}{4}(8^{4/3}-1) = \frac{3(16-1)}{4} = \frac{45}{4}.$$

Exercice 6 :

Calculer les intégrales suivantes.

d) $\displaystyle\int_1^8 x^{1/3}\,dx$ e) $\displaystyle\int_0^1 e^{3t} - e^{-t}\,dt$

d) $x \mapsto \dfrac{x^{(1+1/3)}}{1+1/3} = \dfrac{3}{4}x^{4/3}$ est une primitive de $x \mapsto x^{1/3}$ sur $\mathbb{R}$.

Donc

$$\int_1^8 x^{1/3} dx = \left[\frac{3}{4}x^{4/3}\right]_1^8 = \frac{3}{4}(8^{4/3}-1) = \frac{3(16-1)}{4} = \frac{45}{4}.$$

e) $t \mapsto \dfrac{e^{3t}}{3}$ est une primitive de e^{3t} sur $\mathbb{R}$

Exercice 6 :

Calculer les intégrales suivantes.

d) $\displaystyle\int_1^8 x^{1/3}\,dx$ e) $\displaystyle\int_0^1 e^{3t} - e^{-t}\,dt$

d) $x \mapsto \dfrac{x^{(1+1/3)}}{1+1/3} = \dfrac{3}{4}x^{4/3}$ est une primitive de $x \mapsto x^{1/3}$ sur $\mathbb{R}$.

Donc

$$\int_1^8 x^{1/3}dx = \left[\frac{3}{4}x^{4/3}\right]_1^8 = \frac{3}{4}(8^{4/3}-1) = \frac{3(16-1)}{4} = \frac{45}{4}.$$

e) $t \mapsto \dfrac{e^{3t}}{3}$ est une primitive de e^{3t} sur $\mathbb{R}$

et $t \mapsto -e^{-t}$ est une primitive de e^{-t} sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6 :

Calculer les intégrales suivantes.

d) $\displaystyle\int_1^8 x^{1/3}\, dx$ e) $\displaystyle\int_0^1 e^{3t} - e^{-t}\, dt$

d) $x \mapsto \dfrac{x^{(1+1/3)}}{1+1/3} = \dfrac{3}{4}x^{4/3}$ est une primitive de $x \mapsto x^{1/3}$ sur $\mathbb{R}$.

Donc

$$\int_1^8 x^{1/3} dx = \left[\frac{3}{4}x^{4/3}\right]_1^8 = \frac{3}{4}(8^{4/3} - 1) = \frac{3(16-1)}{4} = \frac{45}{4}.$$

e) $t \mapsto \dfrac{e^{3t}}{3}$ est une primitive de e^{3t} sur $\mathbb{R}$

et $t \mapsto -e^{-t}$ est une primitive de e^{-t} sur $\mathbb{R}$.

Donc $t \mapsto \dfrac{e^{3t}}{3} + e^{-t}$ est une primitive de $t \mapsto e^{3t} - e^{-t}$ sur $[0, 1]$

Exercice 6 :

Calculer les intégrales suivantes.

d) $\displaystyle\int_1^8 x^{1/3}\,dx$ e) $\displaystyle\int_0^1 e^{3t} - e^{-t}\,dt$

d) $x \mapsto \dfrac{x^{(1+1/3)}}{1+1/3} = \dfrac{3}{4}x^{4/3}$ est une primitive de $x \mapsto x^{1/3}$ sur $\mathbb{R}$.

Donc
$$\int_1^8 x^{1/3}dx = \left[\frac{3}{4}x^{4/3}\right]_1^8 = \frac{3}{4}(8^{4/3}-1) = \frac{3(16-1)}{4} = \frac{45}{4}.$$

e) $t \mapsto \dfrac{e^{3t}}{3}$ est une primitive de e^{3t} sur $\mathbb{R}$

et $t \mapsto -e^{-t}$ est une primitive de e^{-t} sur $\mathbb{R}$.

Donc $t \mapsto \dfrac{e^{3t}}{3} + e^{-t}$ est une primitive de $t \mapsto e^{3t} - e^{-t}$ sur $[0,1]$

Par conséquent
$$\int_0^1 (e^{3t}-e^{-t})dt = \left[\frac{e^{3t}}{3} + e^{-t}\right]_0^1 = \left(\frac{e^3}{3} + e^{-1}\right) - \left(\frac{e^0}{3} + e^0\right) = \frac{e^3-4}{3} + \frac{1}{e}.$$

Exercice 6 :

Calculer les intégrales suivantes.

f) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \cos(3s)\, ds$ g) $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

Exercice 6 :

Calculer les intégrales suivantes.

f) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \cos(3s)\,ds$ g) $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

f) $f(s) = \cos(3s) = g(3s)$ où $g(X) = \cos X$

Exercice 6 :

Calculer les intégrales suivantes.

f) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \cos(3s)\,ds$ g) $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

f) $f(s) = \cos(3s) = g(3s)$ où $g(X) = \cos X$

$X \mapsto \sin X$ est une primitive de g sur $\mathbb{R}$

Exercice 6 :

Calculer les intégrales suivantes.

f) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \cos(3s)\, ds$ g) $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

f) $f(s) = \cos(3s) = g(3s)$ où $g(X) = \cos X$

$X \mapsto \sin X$ est une primitive de g sur $\mathbb{R}$

Donc $x \mapsto \dfrac{\sin 3s}{3}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6 :

Calculer les intégrales suivantes.

f) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \cos(3s)\, ds$ g) $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

f) $f(s) = \cos(3s) = g(3s)$ où $g(X) = \cos X$

$X \mapsto \sin X$ est une primitive de g sur $\mathbb{R}$

Donc $x \mapsto \dfrac{\sin 3s}{3}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
Par conséquent

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(3s)ds = \left[\frac{\sin 3s}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sin\frac{3\pi}{4}}{3} - \frac{\sin 0}{3} = \frac{\sqrt{2}/2}{3} = \frac{\sqrt{2}}{6}.$$

Exercice 6 :

Calculer les intégrales suivantes.

f) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \cos(3s)\, ds$ g) $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

f) $f(s) = \cos(3s) = g(3s)$ où $g(X) = \cos X$

$X \mapsto \sin X$ est une primitive de g sur $\mathbb{R}$

Donc $x \mapsto \dfrac{\sin 3s}{3}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
Par conséquent

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(3s)ds = \left[\frac{\sin 3s}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sin \frac{3\pi}{4}}{3} - \frac{\sin 0}{3} = \frac{\sqrt{2}/2}{3} = \frac{\sqrt{2}}{6}.$$

g) $x \mapsto \arcsin x$ est une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ sur $]-1,1[$.

Exercice 6 :

Calculer les intégrales suivantes.

f) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \cos(3s)\, ds$ g) $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

f) $f(s) = \cos(3s) = g(3s)$ où $g(X) = \cos X$

$X \mapsto \sin X$ est une primitive de g sur $\mathbb{R}$

Donc $x \mapsto \dfrac{\sin 3s}{3}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
Par conséquent

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(3s)ds = \left[\frac{\sin 3s}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sin \frac{3\pi}{4}}{3} - \frac{\sin 0}{3} = \frac{\sqrt{2}/2}{3} = \frac{\sqrt{2}}{6}.$$

g) $x \mapsto \arcsin x$ est une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ sur $]-1,1[$.

Par conséquent,

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = [\arcsin x]_0^{\frac{1}{2}} = \arcsin \frac{1}{2} - \arcsin 0 = \frac{\pi}{6}.$$

Exercice 7 :

a) En utilisant l'identité $x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 + 1$, trouver une primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^2 - 4x + 5}$. Calculer $\displaystyle\int_1^3 \frac{dx}{x^2 - 4x + 5}$.

Exercice 7 :

a) En utilisant l'identité $x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 + 1$, trouver une primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^2 - 4x + 5}$. Calculer $\displaystyle\int_1^3 \frac{dx}{x^2 - 4x + 5}$.

a) Notons $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2 - 4x + 5}$. De l'identité $x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 + 1$, on déduit

$$f(x) = \frac{1}{1 + (x-2)^2}.$$

Exercice 7 :

a) En utilisant l'identité $x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 + 1$, trouver une primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^2 - 4x + 5}$. Calculer $\displaystyle\int_1^3 \frac{dx}{x^2 - 4x + 5}$.

a) Notons $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2 - 4x + 5}$. De l'identité $x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 + 1$, on déduit

$$f(x) = \frac{1}{1 + (x-2)^2}.$$

On note que $f(x) = g(x-2)$ où $g : X \mapsto \dfrac{1}{1 + X^2}$

Exercice 7 :

a) En utilisant l'identité $x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 + 1$, trouver une primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^2 - 4x + 5}$. Calculer $\displaystyle\int_1^3 \frac{dx}{x^2 - 4x + 5}$.

a) Notons $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2 - 4x + 5}$. De l'identité $x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 + 1$, on déduit

$$f(x) = \frac{1}{1 + (x-2)^2}.$$

On note que $f(x) = g(x-2)$ où $g : X \mapsto \dfrac{1}{1 + X^2}$

On sait que $X \mapsto \arctan X$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de g.

Exercice 7 :

a) En utilisant l'identité $x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 + 1$, trouver une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2 - 4x + 5}$. Calculer $\displaystyle\int_1^3 \frac{dx}{x^2 - 4x + 5}$.

a) Notons $f : x \mapsto \frac{1}{x^2 - 4x + 5}$. De l'identité $x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 + 1$, on déduit

$$f(x) = \frac{1}{1 + (x-2)^2}.$$

On note que $f(x) = g(x-2)$ où $g : X \mapsto \frac{1}{1 + X^2}$

On sait que $X \mapsto \arctan X$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de g.

Donc $x \mapsto \arctan(x-2)$ est une primitive de f sur R.

Par conséquent,

$$\int_1^3 \frac{1}{x^2 - 4x + 5} dx = [\arctan(x-2)]_1^3 = \arctan 1 - \arctan(-1) = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 7 :

b) Soit a un réel strictement positif. Donner une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+(x/a)^2}$. En déduire une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{a^2+x^2}$.

Exercice 7 :

b) Soit a un réel strictement positif. Donner une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+(x/a)^2}$. En déduire une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{a^2+x^2}$.

b) Notons $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+(x/a)^2}$.

Exercice 7 :

b) Soit a un réel strictement positif. Donner une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+(x/a)^2}$. En déduire une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{a^2+x^2}$.

b) Notons $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+(x/a)^2}$.

On peut écrire $f(x) = g\left(\dfrac{x}{a}\right)$ où $g : X \mapsto \dfrac{1}{1+X^2}$.

Exercice 7 :

b) Soit a un réel strictement positif. Donner une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+(x/a)^2}$. En déduire une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{a^2+x^2}$.

b) Notons $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+(x/a)^2}$.

On peut écrire $f(x) = g\left(\dfrac{x}{a}\right)$ où $g : X \mapsto \dfrac{1}{1+X^2}$.

On sait que $G : X \mapsto \arctan X$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de g.

Exercice 7 :

b) Soit a un réel strictement positif. Donner une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+(x/a)^2}$. En déduire une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{a^2+x^2}$.

b) Notons $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+(x/a)^2}$.

On peut écrire $f(x) = g\left(\dfrac{x}{a}\right)$ où $g : X \mapsto \dfrac{1}{1+X^2}$.

On sait que $G : X \mapsto \arctan X$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de g.

Donc $x \mapsto \dfrac{G\left(\frac{x}{a}\right)}{1/a} = aG\left(\dfrac{x}{a}\right) = a\arctan\left(\dfrac{x}{a}\right)$ est une primitive de f sur R.

Exercice 7 :

b) Soit a un réel strictement positif. Donner une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+(x/a)^2}$. En déduire une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{a^2+x^2}$.

b) Notons $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+(x/a)^2}$.

On peut écrire $f(x) = g\left(\dfrac{x}{a}\right)$ où $g : X \mapsto \dfrac{1}{1+X^2}$.

On sait que $G : X \mapsto \arctan X$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de g.

Donc $x \mapsto \dfrac{G\left(\frac{x}{a}\right)}{1/a} = aG\left(\dfrac{x}{a}\right) = a\arctan\left(\dfrac{x}{a}\right)$ est une primitive de f sur R.

Comme

$$\frac{1}{a^2+x^2} = \frac{1}{a^2}.\frac{1}{(1+(x/a)^2)},$$

Exercice 7 :

b) Soit a un réel strictement positif. Donner une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+(x/a)^2}$. En déduire une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{a^2+x^2}$.

b) Notons $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+(x/a)^2}$.

On peut écrire $f(x) = g\left(\dfrac{x}{a}\right)$ où $g : X \mapsto \dfrac{1}{1+X^2}$.

On sait que $G : X \mapsto \arctan X$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de g.

Donc $x \mapsto \dfrac{G\left(\frac{x}{a}\right)}{1/a} = aG\left(\dfrac{x}{a}\right) = a\arctan\left(\dfrac{x}{a}\right)$ est une primitive de f sur R.

Comme

$$\frac{1}{a^2+x^2} = \frac{1}{a^2}.\frac{1}{(1+(x/a)^2)},$$

on en déduit qu'une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{a^2+x^2}$ sur $\mathbb{R}$ est donnée par

$$x \mapsto \frac{1}{a^2}a\arctan\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right).$$

Exercice 7 :

b) Application : calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^b \frac{dx}{3+x^2}$ et déterminer sa limite lorsque b tend vers $+\infty$.

Exercice 7 :

b) Application : calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^b \frac{dx}{3+x^2}$ et déterminer sa limite lorsque b tend vers $+\infty$.

Application : D'après la question précédente

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) \quad \text{est une primitive de} \quad x \mapsto \frac{1}{(\sqrt{3})^2 + x^2} = \frac{1}{3+x^2} \text{ sur } \mathbb{R}$$

Exercice 7 :

b) Application : calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^b \frac{dx}{3+x^2}$ et déterminer sa limite lorsque b tend vers $+\infty$.

Application : D'après la question précédente

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) \quad \text{est une primitive de} \quad x \mapsto \frac{1}{(\sqrt{3})^2 + x^2} = \frac{1}{3+x^2} \text{ sur } \mathbb{R}$$

Par conséquent

$$\int_0^b \frac{1}{3+x^2} dx = \left[\frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^b$$
$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{b}{\sqrt{3}}\right) - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{0}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{b}{\sqrt{3}}\right)$$

Exercice 7 :

b) Application : calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^b \frac{dx}{3+x^2}$ et déterminer sa limite lorsque b tend vers $+\infty$.

Application : D'après la question précédente

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) \quad \text{est une primitive de} \quad x \mapsto \frac{1}{(\sqrt{3})^2 + x^2} = \frac{1}{3+x^2} \text{ sur } \mathbb{R}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}\int_0^b \frac{1}{3+x^2}dx &= \left[\frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^b \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{b}{\sqrt{3}}\right) - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{0}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{b}{\sqrt{3}}\right)\end{aligned}$$

Etant donné que $\lim\limits_{x \to +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$, alors

$$\lim_{b \to +\infty} \int_0^b \frac{1}{3+x^2}dx = \lim_{b \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{b}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}.$$

Exercice 8 :

a) Exprimer $\cos(2x)$ en fonction de $\cos^2 x$, puis en fonction de $\sin^2 x$. En déduire une primitive de $\cos^2$ et une primitive de $\sin^2$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8 :

a) Exprimer $\cos(2x)$ en fonction de $\cos^2 x$, puis en fonction de $\sin^2 x$. En déduire une primitive de $\cos^2$ et une primitive de $\sin^2$ sur $\mathbb{R}$.

De l'identité

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b, \quad \text{pour tout } a,\ b \in \mathbb{R}$$

Exercice 8 :

a) Exprimer $\cos(2x)$ en fonction de $\cos^2 x$, puis en fonction de $\sin^2 x$. En déduire une primitive de $\cos^2$ et une primitive de $\sin^2$ sur $\mathbb{R}$.

De l'identité

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b, \quad \text{pour tout } a,\ b \in \mathbb{R}$$

on déduit que

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Exercice 8 :

a) Exprimer $\cos(2x)$ en fonction de $\cos^2 x$, puis en fonction de $\sin^2 x$. En déduire une primitive de $\cos^2$ et une primitive de $\sin^2$ sur $\mathbb{R}$.

De l'identité

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b, \quad \text{pour tout } a,\ b \in \mathbb{R}$$

on déduit que

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

D'autre part, comme $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \quad$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

Exercice 8 :

a) Exprimer $\cos(2x)$ en fonction de $\cos^2 x$, puis en fonction de $\sin^2 x$. En déduire une primitive de $\cos^2$ et une primitive de $\sin^2$ sur $\mathbb{R}$.

De l'identité

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b, \quad \text{pour tout } a,\ b \in \mathbb{R}$$

on déduit que

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

D'autre part, comme $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \quad$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

alors

$$\cos 2x = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x).$$

Exercice 8 :

a) Exprimer $\cos(2x)$ en fonction de $\cos^2 x$, puis en fonction de $\sin^2 x$. En déduire une primitive de $\cos^2$ et une primitive de $\sin^2$ sur $\mathbb{R}$.

De l'identité

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b, \quad \text{pour tout } a,\ b \in \mathbb{R}$$

on déduit que

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

D'autre part, comme $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \quad$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

alors

$$\cos 2x = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x).$$

Par conséquent,

$$\cos^2(x) = \frac{\cos 2x + 1}{2} \quad \text{et} \quad \sin^2(x) = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

Exercice 8 :

a) Exprimer $\cos(2x)$ en fonction de $\cos^2 x$, puis en fonction de $\sin^2 x$. En déduire une primitive de $\cos^2$ et une primitive de $\sin^2$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8 :

a) Exprimer $\cos(2x)$ en fonction de $\cos^2 x$, puis en fonction de $\sin^2 x$. En déduire une primitive de $\cos^2$ et une primitive de $\sin^2$ sur $\mathbb{R}$.

$X \mapsto \sin X$ est une primitive de $X \mapsto \cos X$.

Exercice 8 :

a) Exprimer $\cos(2x)$ en fonction de $\cos^2 x$, puis en fonction de $\sin^2 x$. En déduire une primitive de $\cos^2$ et une primitive de $\sin^2$ sur $\mathbb{R}$.

$X \mapsto \sin X$ est une primitive de $X \mapsto \cos X$.

Donc $x \mapsto \dfrac{\sin(2x)}{2}$ est une primitive de $x \mapsto \cos(2x)$

Exercice 8 :

a) Exprimer $\cos(2x)$ en fonction de $\cos^2 x$, puis en fonction de $\sin^2 x$. En déduire une primitive de $\cos^2$ et une primitive de $\sin^2$ sur $\mathbb{R}$.

$X \mapsto \sin X$ est une primitive de $X \mapsto \cos X$.

Donc $x \mapsto \dfrac{\sin(2x)}{2}$ est une primitive de $x \mapsto \cos(2x)$

Par conséquent, $x \mapsto \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{\sin(2x)}{2}\right)$ est une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{2}(1 + \cos(2x))$

Exercice 8 :

a) Exprimer $\cos(2x)$ en fonction de $\cos^2 x$, puis en fonction de $\sin^2 x$. En déduire une primitive de $\cos^2$ et une primitive de $\sin^2$ sur $\mathbb{R}$.

$X \mapsto \sin X$ est une primitive de $X \mapsto \cos X$.

Donc $x \mapsto \dfrac{\sin(2x)}{2}$ est une primitive de $x \mapsto \cos(2x)$

Par conséquent, $x \mapsto \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{\sin(2x)}{2}\right)$ est une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{2}(1+\cos(2x))$

et $x \mapsto \dfrac{1}{2}\left(x - \dfrac{\sin(2x)}{2}\right)$ est une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{2}(1-\cos(2x))$

Exercice 8 :

a) Exprimer $\cos(2x)$ en fonction de $\cos^2 x$, puis en fonction de $\sin^2 x$. En déduire une primitive de $\cos^2$ et une primitive de $\sin^2$ sur $\mathbb{R}$.

$X \mapsto \sin X$ est une primitive de $X \mapsto \cos X$.

Donc $x \mapsto \dfrac{\sin(2x)}{2}$ est une primitive de $x \mapsto \cos(2x)$

Par conséquent, $x \mapsto \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{\sin(2x)}{2}\right)$ est une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{2}(1 + \cos(2x))$

et $x \mapsto \dfrac{1}{2}\left(x - \dfrac{\sin(2x)}{2}\right)$ est une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{2}(1 - \cos(2x))$

En conclusion $x \mapsto \dfrac{2x + \sin(2x)}{4}$ est une primitive de $x \mapsto \cos^2(x)$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 8 :

a) Exprimer $\cos(2x)$ en fonction de $\cos^2 x$, puis en fonction de $\sin^2 x$. En déduire une primitive de $\cos^2$ et une primitive de $\sin^2$ sur $\mathbb{R}$.

$X \mapsto \sin X$ est une primitive de $X \mapsto \cos X$.

Donc $x \mapsto \dfrac{\sin(2x)}{2}$ est une primitive de $x \mapsto \cos(2x)$

Par conséquent, $x \mapsto \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{\sin(2x)}{2}\right)$ est une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{2}(1 + \cos(2x))$

et $x \mapsto \dfrac{1}{2}\left(x - \dfrac{\sin(2x)}{2}\right)$ est une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{2}(1 - \cos(2x))$

En conclusion $x \mapsto \dfrac{2x + \sin(2x)}{4}$ est une primitive de $x \mapsto \cos^2(x)$ sur $\mathbb{R}$

et $x \mapsto \dfrac{2x - \sin(2x)}{4}$ est une primitive de $x \mapsto \sin^2(x)$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 8 :

b) Pour $n \in \mathbb{N}$, donner une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto \cos x(\sin x)^n$. En déduire une primitive de la fonction $\cos^3$.

Exercice 8 :

b) Pour $n \in \mathbb{N}$, donner une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto \cos x(\sin x)^n$. En déduire une primitive de la fonction $\cos^3$.

b) Si on note $u(x) = \sin x$ alors $u'(x) = \cos x$

Exercice 8 :

b) Pour $n \in \mathbb{N}$, donner une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto \cos x(\sin x)^n$. En déduire une primitive de la fonction $\cos^3$.

b) Si on note $u(x) = \sin x$ alors $u'(x) = \cos x$

et donc

$$\cos x(\sin x)^n = u'(x)u(x)^n = \frac{1}{n+1}(n+1)u(x)^n u'(x)$$

Exercice 8 :

b) Pour $n \in \mathbb{N}$, donner une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto \cos x (\sin x)^n$. En déduire une primitive de la fonction $\cos^3$.

b) Si on note $u(x) = \sin x$ alors $u'(x) = \cos x$

et donc

$$\cos x (\sin x)^n = u'(x) u(x)^n = \frac{1}{n+1}(n+1) u(x)^n u'(x)$$

Or $x \mapsto (n+1) u(x)^n u'(x)$ est la dérivée de $x \mapsto u(x)^{n+1}$

Exercice 8 :

b) Pour $n \in \mathbb{N}$, donner une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto \cos x (\sin x)^n$. En déduire une primitive de la fonction $\cos^3$.

b) Si on note $u(x) = \sin x$ alors $u'(x) = \cos x$

et donc

$$\cos x (\sin x)^n = u'(x) u(x)^n = \frac{1}{n+1}(n+1) u(x)^n u'(x)$$

Or $x \mapsto (n+1) u(x)^n u'(x)$ est la dérivée de $x \mapsto u(x)^{n+1}$

Donc $x \mapsto \dfrac{u(x)^{n+1}}{n+1} = \dfrac{(\sin x)^{n+1}}{n+1}$ est une primitive de $x \mapsto \cos x (\sin x)^n$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8 :

b) Pour $n \in \mathbb{N}$, donner une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto \cos x(\sin x)^n$. En déduire une primitive de la fonction $\cos^3$.

b) Si on note $u(x) = \sin x$ alors $u'(x) = \cos x$

et donc

$$\cos x(\sin x)^n = u'(x)u(x)^n = \frac{1}{n+1}(n+1)u(x)^n u'(x)$$

Or $x \mapsto (n+1)u(x)^n u'(x)$ est la dérivée de $x \mapsto u(x)^{n+1}$

Donc $x \mapsto \dfrac{u(x)^{n+1}}{n+1} = \dfrac{(\sin x)^{n+1}}{n+1}$ est une primitive de $x \mapsto \cos x(\sin x)^n$ sur $\mathbb{R}$.

Ecrivons

$$\cos^3 x = \cos x \cos^2 x = \cos x(1 - \sin^2 x) = \cos x - \cos x \sin^2 x.$$

Exercice 8 :

b) Pour $n \in \mathbb{N}$, donner une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto \cos x(\sin x)^n$. En déduire une primitive de la fonction $\cos^3$.

b) Si on note $u(x) = \sin x$ alors $u'(x) = \cos x$

et donc

$$\cos x(\sin x)^n = u'(x)u(x)^n = \frac{1}{n+1}(n+1)u(x)^n u'(x)$$

Or $x \mapsto (n+1)u(x)^n u'(x)$ est la dérivée de $x \mapsto u(x)^{n+1}$

Donc $x \mapsto \dfrac{u(x)^{n+1}}{n+1} = \dfrac{(\sin x)^{n+1}}{n+1}$ est une primitive de $x \mapsto \cos x(\sin x)^n$ sur $\mathbb{R}$.

Ecrivons

$$\cos^3 x = \cos x \cos^2 x = \cos x(1 - \sin^2 x) = \cos x - \cos x \sin^2 x.$$

$x \mapsto \sin x$ est une primitive de $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \dfrac{\sin^3 x}{3}$ est une primitive de $x \mapsto \cos x \sin^2 x$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 8 :

b) Pour $n \in \mathbb{N}$, donner une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto \cos x(\sin x)^n$. En déduire une primitive de la fonction $\cos^3$.

b) Si on note $u(x) = \sin x$ alors $u'(x) = \cos x$

et donc
$$\cos x(\sin x)^n = u'(x)u(x)^n = \frac{1}{n+1}(n+1)u(x)^n u'(x)$$

Or $x \mapsto (n+1)u(x)^n u'(x)$ est la dérivée de $x \mapsto u(x)^{n+1}$

Donc $x \mapsto \dfrac{u(x)^{n+1}}{n+1} = \dfrac{(\sin x)^{n+1}}{n+1}$ est une primitive de $x \mapsto \cos x(\sin x)^n$ sur $\mathbb{R}$.

Ecrivons
$$\cos^3 x = \cos x \cos^2 x = \cos x(1 - \sin^2 x) = \cos x - \cos x \sin^2 x.$$

$x \mapsto \sin x$ est une primitive de $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \dfrac{\sin^3 x}{3}$ est une primitive de $x \mapsto \cos x \sin^2 x$ sur $\mathbb{R}$

Par conséquent,
$$x \mapsto \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} \quad \text{est une primitive de} \quad x \mapsto \cos^3 x \text{ sur} \mathbb{R}$$

.

Exercice 8 :

Pour $n \in \mathbb{N}$, donner une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto \sin x(\cos x)^n$. En déduire une primitive de la fonction $\sin^3$.

Exercice 8 :

Pour $n \in \mathbb{N}$, donner une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto \sin x(\cos x)^n$. En déduire une primitive de la fonction $\sin^3$.

c) Si on note $v(x) = \cos x$ alors $v'(x) = -\sin x$

Exercice 8 :

Pour $n \in \mathbb{N}$, donner une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto \sin x(\cos x)^n$. En déduire une primitive de la fonction $\sin^3$.

c) Si on note $v(x) = \cos x$ alors $v'(x) = -\sin x$

et donc

$$\sin x(\cos x)^n = -v'(x)v(x)^n = -\frac{1}{n+1}(n+1)v(x)^n v'(x)$$

Exercice 8 :

Pour $n \in \mathbb{N}$, donner une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto \sin x(\cos x)^n$. En déduire une primitive de la fonction $\sin^3$.

c) Si on note $v(x) = \cos x$ alors $v'(x) = -\sin x$

et donc

$$\sin x(\cos x)^n = -v'(x)v(x)^n = -\frac{1}{n+1}(n+1)v(x)^n v'(x)$$

Or $x \mapsto (n+1)v(x)^n v'(x)$ est la dérivée de $x \mapsto v(x)^{n+1}$

Exercice 8 :

Pour $n \in \mathbb{N}$, donner une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto \sin x(\cos x)^n$. En déduire une primitive de la fonction $\sin^3$.

c) Si on note $v(x) = \cos x$ alors $v'(x) = -\sin x$

et donc

$$\sin x(\cos x)^n = -v'(x)v(x)^n = -\frac{1}{n+1}(n+1)v(x)^n v'(x)$$

Or $x \mapsto (n+1)v(x)^n v'(x)$ est la dérivée de $x \mapsto v(x)^{n+1}$

Donc $x \mapsto -\dfrac{v(x)^{n+1}}{n+1} = -\dfrac{(\cos x)^{n+1}}{n+1}$ est une primitive de $x \mapsto \sin x(\cos x)^n$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8 :

Pour $n \in \mathbb{N}$, donner une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto \sin x(\cos x)^n$. En déduire une primitive de la fonction $\sin^3$.

c) Si on note $v(x) = \cos x$ alors $v'(x) = -\sin x$

et donc

$$\sin x(\cos x)^n = -v'(x)v(x)^n = -\frac{1}{n+1}(n+1)v(x)^n v'(x)$$

Or $x \mapsto (n+1)v(x)^n v'(x)$ est la dérivée de $x \mapsto v(x)^{n+1}$

Donc $x \mapsto -\dfrac{v(x)^{n+1}}{n+1} = -\dfrac{(\cos x)^{n+1}}{n+1}$ est une primitive de $x \mapsto \sin x(\cos x)^n$ sur $\mathbb{R}$.

Ecrivons

$$\sin^3 x = \sin x \sin^2 x = \sin x(1 - \cos^2 x) = \sin x - \sin x \cos^2 x.$$

Exercice 8 :

Pour $n \in \mathbb{N}$, donner une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto \sin x(\cos x)^n$. En déduire une primitive de la fonction $\sin^3$.

c) Si on note $v(x) = \cos x$ alors $v'(x) = -\sin x$

et donc

$$\sin x(\cos x)^n = -v'(x)v(x)^n = -\frac{1}{n+1}(n+1)v(x)^n v'(x)$$

Or $x \mapsto (n+1)v(x)^n v'(x)$ est la dérivée de $x \mapsto v(x)^{n+1}$

Donc $x \mapsto -\dfrac{v(x)^{n+1}}{n+1} = -\dfrac{(\cos x)^{n+1}}{n+1}$ est une primitive de $x \mapsto \sin x(\cos x)^n$ sur $\mathbb{R}$.

Ecrivons

$$\sin^3 x = \sin x \sin^2 x = \sin x(1 - \cos^2 x) = \sin x - \sin x \cos^2 x.$$

$x \mapsto -\cos x$ est une primitive de $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto -\dfrac{\cos^3 x}{3}$ est une primitive de $x \mapsto \sin x \cos^2 x$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 8 :

Pour $n \in \mathbb{N}$, donner une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto \sin x(\cos x)^n$. En déduire une primitive de la fonction $\sin^3$.

c) Si on note $v(x) = \cos x$ alors $v'(x) = -\sin x$

et donc

$$\sin x(\cos x)^n = -v'(x)v(x)^n = -\frac{1}{n+1}(n+1)v(x)^n v'(x)$$

Or $x \mapsto (n+1)v(x)^n v'(x)$ est la dérivée de $x \mapsto v(x)^{n+1}$

Donc $x \mapsto -\dfrac{v(x)^{n+1}}{n+1} = -\dfrac{(\cos x)^{n+1}}{n+1}$ est une primitive de $x \mapsto \sin x(\cos x)^n$ sur $\mathbb{R}$.

Ecrivons

$$\sin^3 x = \sin x \sin^2 x = \sin x(1 - \cos^2 x) = \sin x - \sin x \cos^2 x.$$

$x \mapsto -\cos x$ est une primitive de $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto -\dfrac{\cos^3 x}{3}$ est une primitive de $x \mapsto \sin x \cos^2 x$ sur $\mathbb{R}$

Par conséquent,

$$x \mapsto -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} \quad \text{est une primitive de} \quad x \mapsto \sin^3 x \text{ sur} \mathbb{R}$$

.

Exercice 8 :

d) Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/2} (\sin t)^2 - (\cos t)^3 \, dt$.

Exercice 8 :

d) Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/2} (\sin t)^2 - (\cos t)^3 \, dt$.

Des questions a) et b), on déduit que

$$t \mapsto \frac{2t - \sin 2t}{4} - \sin t + \frac{\sin^3 t}{3}$$

est une primitive de $t \mapsto \sin^2 t - \cos^3 t$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8 :

d) Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/2} (\sin t)^2 - (\cos t)^3 \, dt$.

Des questions a) et b), on déduit que

$$t \mapsto \frac{2t - \sin 2t}{4} - \sin t + \frac{\sin^3 t}{3}$$

est une primitive de $t \mapsto \sin^2 t - \cos^3 t$ sur $\mathbb{R}$.

Par conséquent,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t - \cos^3 t dt = \left[\frac{2t - \sin 2t}{4} - \sin t + \frac{\sin^3 t}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi - \sin \pi}{4} - \sin\frac{\pi}{2} + \frac{\sin^3(\pi/2)}{3}$$
$$= \frac{\pi}{4} - 1 + \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}$$

Exercice 9 :

Calculer les intégrales suivantes. On remarquera que la fonction intégrée peut être écrite sous la forme $x \mapsto cf(u(x))u'(x)$ (c constante réelle).

a) $\displaystyle\int_1^x \frac{\cos\sqrt{t}}{2\sqrt{t}}\,dt$ $(x \in \mathbb{R}_+^*)$

Exercice 9 :

Calculer les intégrales suivantes. On remarquera que la fonction intégrée peut être écrite sous la forme $x \mapsto cf(u(x))u'(x)$ (c constante réelle).

a) $\displaystyle\int_1^x \frac{\cos\sqrt{t}}{2\sqrt{t}}\,dt$ ($x \in \mathbb{R}_+^*$)

Rappel : Si F est une primitive de f sur I et $u : J \to I$ est dérivable sur J alors $F \circ u$ est une primitive de $x \mapsto f(u(x))u'(x)$ sur J.

Exercice 9 :

Calculer les intégrales suivantes. On remarquera que la fonction intégrée peut être écrite sous la forme $x \mapsto cf(u(x))u'(x)$ (c constante réelle).

a) $\displaystyle\int_1^x \frac{\cos\sqrt{t}}{2\sqrt{t}}\,dt\ (x \in \mathbb{R}_+^*)$

Rappel : Si F est une primitive de f sur I et $u : J \to I$ est dérivable sur J alors $F \circ u$ est une primitive de $x \mapsto f(u(x))u'(x)$ sur J.

a) On note que si $t > 0$,

$$\frac{\cos(\sqrt{t})}{2\sqrt{t}} = \cos(u(t))u'(t) \quad \text{où} \quad u : t \mapsto \sqrt{t}$$

est dérivable sur $]0, +\infty[$.

Exercice 9 :

Calculer les intégrales suivantes. On remarquera que la fonction intégrée peut être écrite sous la forme $x \mapsto cf(u(x))u'(x)$ (c constante réelle).

a) $\displaystyle\int_1^x \frac{\cos\sqrt{t}}{2\sqrt{t}}\,dt$ $(x \in \mathbb{R}_+^*)$

Rappel : Si F est une primitive de f sur I et $u : J \to I$ est dérivable sur J alors $F \circ u$ est une primitive de $x \mapsto f(u(x))u'(x)$ sur J.

a) On note que si $t > 0$,

$$\frac{\cos(\sqrt{t})}{2\sqrt{t}} = \cos(u(t))u'(t) \quad \text{où} \quad u : t \mapsto \sqrt{t}$$

est dérivable sur $]0, +\infty[$.

$X \mapsto \sin X$ est une primitive de $X \mapsto \cos X$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 9 :

Calculer les intégrales suivantes. On remarquera que la fonction intégrée peut être écrite sous la forme $x \mapsto cf(u(x))u'(x)$ (c constante réelle).

a) $\displaystyle\int_1^x \frac{\cos\sqrt{t}}{2\sqrt{t}}\,dt \ (x \in \mathbb{R}_+^*)$

Rappel : Si F est une primitive de f sur I et $u : J \to I$ est dérivable sur J alors $F \circ u$ est une primitive de $x \mapsto f(u(x))u'(x)$ sur J.

a) On note que si $t > 0$,

$$\frac{\cos(\sqrt{t})}{2\sqrt{t}} = \cos(u(t))u'(t) \quad \text{où} \quad u : t \mapsto \sqrt{t}$$

est dérivable sur $]0, +\infty[$.

$X \mapsto \sin X$ est une primitive de $X \mapsto \cos X$ sur $\mathbb{R}$

Donc $t \mapsto \sin(\sqrt{t})$ est une primitive de $t \mapsto \dfrac{\cos(\sqrt{t})}{2\sqrt{t}}$ sur $]0, +\infty[$.

Exercice 9 :

Calculer les intégrales suivantes. On remarquera que la fonction intégrée peut être écrite sous la forme $x \mapsto cf(u(x))u'(x)$ (c constante réelle).

a) $\displaystyle\int_1^x \frac{\cos\sqrt{t}}{2\sqrt{t}}\,dt$ $(x \in \mathbb{R}_+^*)$

Rappel : Si F est une primitive de f sur I et $u : J \to I$ est dérivable sur J alors $F \circ u$ est une primitive de $x \mapsto f(u(x))u'(x)$ sur J.

a) On note que si $t > 0$,

$$\frac{\cos(\sqrt{t})}{2\sqrt{t}} = \cos(u(t))u'(t) \quad \text{où} \quad u : t \mapsto \sqrt{t}$$

est dérivable sur $]0, +\infty[$.

$X \mapsto \sin X$ est une primitive de $X \mapsto \cos X$ sur $\mathbb{R}$

Donc $t \mapsto \sin(\sqrt{t})$ est une primitive de $t \mapsto \dfrac{\cos(\sqrt{t})}{2\sqrt{t}}$ sur $]0, +\infty[$.

Par conséquent,

$$\int_1^x \frac{\cos(\sqrt{t})}{2\sqrt{t}}\,dt = \left[\sin(\sqrt{t})\right]_1^x = \sin(\sqrt{x}) - \sin 1.$$

Exercice 9 :

Calculer les intégrales suivantes. On remarquera que la fonction intégrée peut être écrite sous la forme $x \mapsto cf(u(x))u'(x)$ (c constante réelle).

b) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan x \, dx$

Exercice 9 :

Calculer les intégrales suivantes. On remarquera que la fonction intégrée peut être écrite sous la forme $x \mapsto cf(u(x))u'(x)$ (c constante réelle).

b) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan x \, dx$

b) Ecrivons

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = -\frac{-\sin x}{\cos x} = -\frac{u'(x)}{u(x)} = -\frac{1}{u(x)}u'(x) = f(u(x))u'(x)$$

où $f : X \mapsto -\dfrac{1}{X}$ et $u : x \mapsto \cos x$.

Exercice 9 :

Calculer les intégrales suivantes. On remarquera que la fonction intégrée peut être écrite sous la forme $x \mapsto cf(u(x))u'(x)$ (c constante réelle).

b) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan x \, dx$

b) Ecrivons

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = -\frac{-\sin x}{\cos x} = -\frac{u'(x)}{u(x)} = -\frac{1}{u(x)}u'(x) = f(u(x))u'(x)$$

où $f : X \mapsto -\dfrac{1}{X}$ et $u : x \mapsto \cos x$.

$X \mapsto -\ln X$ est une primitive de f sur $]0, +\infty[$.

Exercice 9 :

Calculer les intégrales suivantes. On remarquera que la fonction intégrée peut être écrite sous la forme $x \mapsto cf(u(x))u'(x)$ (c constante réelle).

b) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan x \, dx$

b) Ecrivons

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = -\frac{-\sin x}{\cos x} = -\frac{u'(x)}{u(x)} = -\frac{1}{u(x)}u'(x) = f(u(x))u'(x)$$

où $f : X \mapsto -\dfrac{1}{X}$ et $u : x \mapsto \cos x$.

$X \mapsto -\ln X$ est une primitive de f sur $]0, +\infty[$.

Comme $u(x) = \cos x > 0$ pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$ alors

Exercice 9 :

Calculer les intégrales suivantes. On remarquera que la fonction intégrée peut être écrite sous la forme $x \mapsto cf(u(x))u'(x)$ (c constante réelle).

b) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan x \, dx$

b) Ecrivons

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = -\frac{-\sin x}{\cos x} = -\frac{u'(x)}{u(x)} = -\frac{1}{u(x)}u'(x) = f(u(x))u'(x)$$

où $f : X \mapsto -\dfrac{1}{X}$ et $u : x \mapsto \cos x$.

$X \mapsto -\ln X$ est une primitive de f sur $]0, +\infty[$.

Comme $u(x) = \cos x > 0$ pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$ alors

$x \mapsto -\ln(\cos x)$ est une primitive de $x \mapsto \tan x$ sur $[0, \frac{\pi}{4}]$

Exercice 9 :

Calculer les intégrales suivantes. On remarquera que la fonction intégrée peut être écrite sous la forme $x \mapsto cf(u(x))u'(x)$ (c constante réelle).

b) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan x \, dx$

b) Ecrivons

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = -\frac{-\sin x}{\cos x} = -\frac{u'(x)}{u(x)} = -\frac{1}{u(x)}u'(x) = f(u(x))u'(x)$$

où $f : X \mapsto -\dfrac{1}{X}$ et $u : x \mapsto \cos x$.

$X \mapsto -\ln X$ est une primitive de f sur $]0, +\infty[$.

Comme $u(x) = \cos x > 0$ pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$ alors

$x \mapsto -\ln(\cos x)$ est une primitive de $x \mapsto \tan x$ sur $[0, \frac{\pi}{4}]$

Par conséquent,

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx = [-\ln(\cos x)]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\ln(\cos(\pi/4)) + \ln(\cos 0) = -\ln(1/\sqrt{2}) = \frac{\ln 2}{2}.$$

Exercice 9 :

Calculer les intégrales suivantes. On remarquera que la fonction intégrée peut être écrite sous la forme $x \mapsto cf(u(x))u'(x)$ (c constante réelle).

c) $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{t}}}{t^2}\,dt$

Exercice 9 :

Calculer les intégrales suivantes. On remarquera que la fonction intégrée peut être écrite sous la forme $x \mapsto cf(u(x))u'(x)$ (c constante réelle).

c) $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{t}}}{t^2}\,dt$

c) On peut écrire

$$\frac{e^{1/t}}{t^2} = -e^{1/t}\left(-\frac{1}{t^2}\right) = f(u(t))u'(t)$$

où $f : X \mapsto -e^X$ et $u : t \mapsto \frac{1}{t}$ $\left(u'(t) = -\frac{1}{t^2}\right)$.

Exercice 9 :

Calculer les intégrales suivantes. On remarquera que la fonction intégrée peut être écrite sous la forme $x \mapsto cf(u(x))u'(x)$ (c constante réelle).

c) $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{t}}}{t^2}\,dt$

c) On peut écrire

$$\frac{e^{1/t}}{t^2} = -e^{1/t}\left(-\frac{1}{t^2}\right) = f(u(t))u'(t)$$

où $f : X \mapsto -e^X$ et $u : t \mapsto \dfrac{1}{t}$ $\left(u'(t) = -\dfrac{1}{t^2}\right)$.

$X \mapsto -e^X$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9 :

Calculer les intégrales suivantes. On remarquera que la fonction intégrée peut être écrite sous la forme $x \mapsto cf(u(x))u'(x)$ (c constante réelle).

c) $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{t}}}{t^2}\, dt$

c) On peut écrire

$$\frac{e^{1/t}}{t^2} = -e^{1/t}\left(-\frac{1}{t^2}\right) = f(u(t))u'(t)$$

où $f : X \mapsto -e^X$ et $u : t \mapsto \dfrac{1}{t}$ $\left(u'(t) = -\dfrac{1}{t^2}\right)$.

$X \mapsto -e^X$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Donc $t \mapsto -e^{u(t)} = -e^{1/t}$ est une primitive de $t \mapsto \dfrac{e^{1/t}}{t^2}$ sur $\mathbb{R}$.

Par conséquent,

$$\int_1^2 \frac{e^{1/t}}{t^2} dt = \left[-e^{1/t}\right]_1^2 = -e^{\frac{1}{2}} + e^1 = e - \sqrt{e}.$$

Exercice 10 :

a) En utilisant l'identité $x^3 = x(x^2+1) - x$, calculer $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^3}{1+x^2}\,dx$.

Exercice 10 :

a) En utilisant l'identité $x^3 = x(x^2+1) - x$, calculer $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^3}{1+x^2}\,dx$.

a) De l'identité $x^3 = x(1+x^2) - x$ on déduit

$$\frac{x^3}{1+x^2} = \frac{x(1+x^2)-x}{1+x^2} = x - \frac{x}{1+x^2}.$$

Exercice 10 :

a) En utilisant l'identité $x^3 = x(x^2+1) - x$, calculer $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^3}{1+x^2}\,dx$.

a) De l'identité $x^3 = x(1+x^2) - x$ on déduit

$$\frac{x^3}{1+x^2} = \frac{x(1+x^2)-x}{1+x^2} = x - \frac{x}{1+x^2}.$$

$x \mapsto \dfrac{x^2}{2}$ est une primitive de $x \mapsto x$ sur $\mathbb{R}$. Déterminons une primitive de $x \mapsto \dfrac{x}{1+x^2}$.

Exercice 10 :

a) En utilisant l'identité $x^3 = x(x^2+1) - x$, calculer $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^3}{1+x^2}\,dx$.

a) De l'identité $x^3 = x(1+x^2) - x$ on déduit

$$\frac{x^3}{1+x^2} = \frac{x(1+x^2)-x}{1+x^2} = x - \frac{x}{1+x^2}.$$

$x \mapsto \dfrac{x^2}{2}$ est une primitive de $x \mapsto x$ sur $\mathbb{R}$. Déterminons une primitive de $x \mapsto \dfrac{x}{1+x^2}$.
On peut écrire

$$\frac{x}{1+x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{u'(x)}{u(x)}$$

où $u : x \mapsto 1+x^2$.

Exercice 10 :

a) En utilisant l'identité $x^3 = x(x^2+1) - x$, calculer $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^3}{1+x^2}\,dx$.

a) De l'identité $x^3 = x(1+x^2) - x$ on déduit

$$\frac{x^3}{1+x^2} = \frac{x(1+x^2)-x}{1+x^2} = x - \frac{x}{1+x^2}.$$

$x \mapsto \dfrac{x^2}{2}$ est une primitive de $x \mapsto x$ sur $\mathbb{R}$. Déterminons une primitive de $x \mapsto \dfrac{x}{1+x^2}$.
On peut écrire

$$\frac{x}{1+x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{u'(x)}{u(x)}$$

où $u : x \mapsto 1+x^2$.

Comme $u(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln(u(x))$ est une primitive de $\dfrac{u'}{u}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 10 :

a) En utilisant l'identité $x^3 = x(x^2+1) - x$, calculer $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^3}{1+x^2}\,dx$.

a) De l'identité $x^3 = x(1+x^2) - x$ on déduit

$$\frac{x^3}{1+x^2} = \frac{x(1+x^2)-x}{1+x^2} = x - \frac{x}{1+x^2}.$$

$x \mapsto \dfrac{x^2}{2}$ est une primitive de $x \mapsto x$ sur $\mathbb{R}$. Déterminons une primitive de $x \mapsto \dfrac{x}{1+x^2}$.
On peut écrire

$$\frac{x}{1+x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = \frac{1}{2}\frac{u'(x)}{u(x)}$$

où $u : x \mapsto 1 + x^2$.

Comme $u(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln(u(x))$ est une primitive de $\dfrac{u'}{u}$ sur $\mathbb{R}$.

Par conséquent $x \mapsto \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)$ est une primitive de $x \mapsto \dfrac{x}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 10 :

a) En utilisant l'identité $x^3 = x(x^2+1) - x$, calculer $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^3}{1+x^2}\,dx$.

a) De l'identité $x^3 = x(1+x^2) - x$ on déduit

$$\frac{x^3}{1+x^2} = \frac{x(1+x^2)-x}{1+x^2} = x - \frac{x}{1+x^2}.$$

$x \mapsto \dfrac{x^2}{2}$ est une primitive de $x \mapsto x$ sur $\mathbb{R}$. Déterminons une primitive de $x \mapsto \dfrac{x}{1+x^2}$.
On peut écrire

$$\frac{x}{1+x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = \frac{1}{2}\frac{u'(x)}{u(x)}$$

où $u : x \mapsto 1+x^2$.

Comme $u(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln(u(x))$ est une primitive de $\dfrac{u'}{u}$ sur $\mathbb{R}$.

Par conséquent $x \mapsto \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)$ est une primitive de $x \mapsto \dfrac{x}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$

et donc $x \mapsto \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{\ln(1+x^2)}{2}$ est une primitive de $x \mapsto \dfrac{x^3}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 10 :

a) En utilisant l'identité $x^3 = x(x^2+1) - x$, calculer $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^3}{1+x^2}\,dx$.

a) De l'identité $x^3 = x(1+x^2) - x$ on déduit

$$\frac{x^3}{1+x^2} = \frac{x(1+x^2)-x}{1+x^2} = x - \frac{x}{1+x^2}.$$

$x \mapsto \dfrac{x^2}{2}$ est une primitive de $x \mapsto x$ sur $\mathbb{R}$. Déterminons une primitive de $x \mapsto \dfrac{x}{1+x^2}$.
On peut écrire

$$\frac{x}{1+x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = \frac{1}{2}\frac{u'(x)}{u(x)}$$

où $u : x \mapsto 1+x^2$.

Comme $u(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln(u(x))$ est une primitive de $\dfrac{u'}{u}$ sur $\mathbb{R}$.

Par conséquent $x \mapsto \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)$ est une primitive de $x \mapsto \dfrac{x}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$

et donc $x \mapsto \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{\ln(1+x^2)}{2}$ est une primitive de $x \mapsto \dfrac{x^3}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$

D'où

$$\int_0^2 \frac{x^3}{1+x^2}dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{\ln(1+x^2)}{2}\right]_0^2 = \frac{4-\ln 5}{2}.$$

Exercice 10 :

b) Calculer $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^4}{1+x^2}\, dx$ par une méthode analogue.

Exercice 10 :

b) Calculer $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^4}{1+x^2}\,dx$ par une méthode analogue.

b) De l'identité remarquable $x^4 - 1 = (x^2-1)(x^2+1)$ on déduit
$x^4 = (x^2-1)(1+x^2) + 1$

Exercice 10 :

b) Calculer $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^4}{1+x^2}\,dx$ par une méthode analogue.

b) De l'identité remarquable $x^4 - 1 = (x^2-1)(x^2+1)$ on déduit
$x^4 = (x^2-1)(1+x^2) + 1$

et donc
$$\frac{x^4}{1+x^2} = \frac{(x^2-1)(1+x^2)+1}{1+x^2} = x^2 - 1 + \frac{1}{1+x^2}.$$

Exercice 10 :

b) Calculer $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^4}{1+x^2}\,dx$ par une méthode analogue.

b) De l'identité remarquable $x^4 - 1 = (x^2-1)(x^2+1)$ on déduit
$x^4 = (x^2-1)(1+x^2)+1$

et donc

$$\frac{x^4}{1+x^2} = \frac{(x^2-1)(1+x^2)+1}{1+x^2} = x^2 - 1 + \frac{1}{1+x^2}.$$

$x \mapsto \dfrac{x^3}{3} - x$ est une primitive de $x \mapsto x^2 - 1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 10 :

b) Calculer $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^4}{1+x^2}\,dx$ par une méthode analogue.

b) De l'identité remarquable $x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1)$ on déduit
$x^4 = (x^2 - 1)(1 + x^2) + 1$

et donc

$$\frac{x^4}{1+x^2} = \frac{(x^2-1)(1+x^2)+1}{1+x^2} = x^2 - 1 + \frac{1}{1+x^2}.$$

$x \mapsto \dfrac{x^3}{3} - x$ est une primitive de $x \mapsto x^2 - 1$ sur $\mathbb{R}$.

De plus $x \mapsto \arctan x$ est une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 10 :

b) Calculer $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^4}{1+x^2}\,dx$ par une méthode analogue.

b) De l'identité remarquable $x^4 - 1 = (x^2-1)(x^2+1)$ on déduit
$x^4 = (x^2-1)(1+x^2)+1$

et donc
$$\frac{x^4}{1+x^2} = \frac{(x^2-1)(1+x^2)+1}{1+x^2} = x^2 - 1 + \frac{1}{1+x^2}.$$

$x \mapsto \dfrac{x^3}{3} - x$ est une primitive de $x \mapsto x^2 - 1$ sur $\mathbb{R}$.

De plus $x \mapsto \arctan x$ est une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$.

Par conséquent $x \mapsto \dfrac{x^3}{3} - x + \arctan x$ est une primitive de $x \mapsto \dfrac{x^4}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 10 :

b) Calculer $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^4}{1+x^2}\,dx$ par une méthode analogue.

b) De l'identité remarquable $x^4 - 1 = (x^2-1)(x^2+1)$ on déduit
$x^4 = (x^2-1)(1+x^2) + 1$

et donc
$$\frac{x^4}{1+x^2} = \frac{(x^2-1)(1+x^2)+1}{1+x^2} = x^2 - 1 + \frac{1}{1+x^2}.$$

$x \mapsto \dfrac{x^3}{3} - x$ est une primitive de $x \mapsto x^2 - 1$ sur $\mathbb{R}$.

De plus $x \mapsto \arctan x$ est une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$.

Par conséquent $x \mapsto \dfrac{x^3}{3} - x + \arctan x$ est une primitive de $x \mapsto \dfrac{x^4}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$.

D'où
$$\int_0^2 \frac{x^4}{1+x^2}dx = \left[\frac{x^3}{3} - x + \arctan x\right]_0^2 = \frac{8}{3} - 2 + \arctan 2 = \frac{2}{3} + \arctan 2.$$

Cours d'Analyse 1

TD n°3

Corrigés des exercices n°11 à 19

Exercice n°11

(a) Donner le domaine de définition D de la fonction $f : x \to \dfrac{1}{x^2 - x - 2}$.

D est l'ensemble des réels x pour lesquels $x^2 - x - 2$ ne s'annule pas. Les racines de ce trinôme sont 2 et -1. Donc $D = \mathbb{R} \setminus \{2, -1\}$.

(b) Trouver deux constantes réelles a et b telles que

$$\forall x \in D, \qquad f(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-2}.$$

Pour que l'égalité soit vraie, il suffit, en réduisant au même dénominateur, que, pour tout $x \in D$,

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - x - 2} = \frac{a(x-2) + b(x+1)}{x^2 - x - 2} \quad \text{ou} \quad 1 = (a+b)x + b - 2a,$$

ou encore $a = -b$ et $3b = 1$. Donc il suffit de fixer $b = \frac{1}{3}$ et $a = -\frac{1}{3}$ pour obtenir

$$\forall x \in D, \qquad f(x) = \frac{1}{x^2 - x - 2} = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+1}\right].$$

(c) Calculer $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$.

$$\int_0^1 f(x)dx = -\frac{1}{3}\int_0^1 \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2-x}dx = -\frac{1}{3}\Big[\ln(1+x) - \ln(2-x)\Big]_0^1$$

$$= -\frac{1}{3}\left[\ln\left(\frac{1+x}{2-x}\right)\right]_0^1 = -\frac{1}{3}\left[\ln(2) - \ln\left(\frac{1}{2}\right)\right]) = -\frac{2}{3}\ln(2).$$

Exercice n°12

Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi} |\cos(t)|dt$. *Indications : étudier le signe de la fonction* $\cos$ *sur* $[0, \pi]$ *et utiliser la relation de Chasles.*

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue. Pour tous $a, b, c \in I$,

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx\,.$$

Si $t \in [0, \pi/2]$, $\cos(t) \geq 0$ et $|\cos(t)| = \cos(t)$.

Si $t \in [\pi/2, \pi]$, $\cos(t) \leq 0$ et $|\cos(t)| = -\cos(t)$.

On peut écrire :

$$\int_0^{\pi} |\cos(t)|dt = \int_0^{\pi/2} |\cos(t)|dt + \int_{\pi/2}^{\pi} |\cos(t)|dt = \int_0^{\pi/2} \cos(t)dt - \int_{\pi/2}^{\pi} \cos(t)dt.$$

Donc

$$\int_0^{\pi} |\cos(t)|dt = \Big[\sin(t)\Big]_0^{\pi/2} - \Big[\sin(t)\Big]_{\pi/2}^{\pi} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(0) - \left[\sin(\pi) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] = 2.$$

Exercice n°13

Calculer les intégrales suivantes en utilisant un changement de variable.

(a) $\displaystyle\int_2^e \frac{(\ln(x))^3}{x}\,dx.$

4.2 Changement de variable

a) Soient I, J, deux intervalles de $\mathbb{R}$, $\varphi : I \to J$ une fonction de classe C^1 et $f : J \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors, pour tous $a, b \in I$, on a la formule de changement de variable

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx\,. \qquad (2)$$

Si on pose, pour $x > 0$,

$\varphi(x) = \ln(x)$ (ou $y = \ln(x)$),

$\varphi'(x) = \frac{1}{x}$ (ou $dy = (\ln(x))'dx = \frac{1}{x}dx$),

$\varphi(e) = \ln(e) = 1$, $\varphi(2) = \ln(2)$ (ou $y = \ln(e) = 1$ pour $x = 1$, $y = \ln(2)$ pour $x = 2$),

$$\int_2^e (\ln(x))^3\frac{1}{x}dx = \int_2^e (\varphi(x))^3\varphi'(x)dx = \int_{\varphi(2)=\ln(2)}^{\varphi(e)=1} y^3\,dy = \left[\frac{y^4}{4}\right]_{\ln(2)}^1 = \frac{1}{4}\left[1 - \ln^4(2)\right].$$

Exercice n°13

Calculer les intégrales suivantes en utilisant un changement de variable.

(b) $\displaystyle\int_0^3 x^2\sqrt{1+x}dx$ (poser $y=\sqrt{1+x}$).

Si on pose, pour $x>0$,

$y=\sqrt{1+x}$ ou $x^2=(y^2-1)^2$,

$dy=\frac{1}{2\sqrt{1+x}}dx$ ou $2ydy=dx$,

$y=1$ pour $x=1$, $y=\sqrt{4}=2$ pour $x=3$),

$$\begin{aligned}
\int_0^3 x^2\sqrt{1+x}dx &= \int_1^2 (y^2-1)^2.y.(2y)dy,\\
&= 2\int_1^2 (y^2-1)^2y^2dy = 2\int_1^2 (y^3-y)^2dy,\\
&= 2\int_1^2 y^6-2y^4+y^2dy = 2\left[\frac{y^7}{7}-2\frac{y^5}{5}+\frac{y^3}{3}\right]_1^2,\\
&= 2\left[y^3\left(\frac{y^4}{7}-2\frac{y^2}{5}+\frac{1}{3}\right)\right]_1^2 = 2\left[8\left(\frac{16}{7}-\frac{8}{5}+\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{7}-\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\right)\right],\\
&= 16\left(\frac{107-1}{105}\right) = = \frac{1696}{105}.
\end{aligned}$$

Exercice n°14

En utilisant le changement de variable $x = e^t$, calculer les intégrales suivantes.

(a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{e^t}{1+e^{2t}}\,dt$.

Si on pose, pour $t \in \mathbb{R}$,
$x = e^t$, $dx = e^t dt$, $x = \frac{1}{e}$ pour $t = -1$, $x = e$ pour $t = 1$,

$$\int_{-1}^{1} \frac{e^t}{1+e^{2t}}\,dt = \int_{-1}^{1} \frac{e^t}{1+(e^t)^2}\,dt = \int_{1/e}^{e} \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$= \Big[\arctan(x)\Big]_{1/e}^{e} = \arctan(e) - \arctan\left(\frac{1}{e}\right).$$

(b) $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{dt}{1+e^{-t}}$.

Si on pose, pour $t \in \mathbb{R}$,
$x = e^t$, $dx = e^t dt$ ou $dt = \frac{1}{x}dx$, $x = e^2$ pour $t = 2$, $x = 1$ pour $t = 0$,

$$\int_{0}^{2} \frac{1}{1+e^{-t}}\,dt = \int_{1}^{e^2} \frac{1}{1+\frac{1}{x}}\,\frac{1}{x}\,dx = \int_{1}^{e^2} \frac{1}{1+x}\,dx$$

$$= \Big[\ln(1+x)\Big]_{1}^{e^2} = \ln(1+e^2) - \ln(2) = \ln\left(\frac{1+e^2}{2}\right).$$

Exercice n°15

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et périodique de période T. Soient $a, b \in \mathbb{R}$.

(a) Montrer, en utilisant un changement de variable, que $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_{a+T}^{b+T} f(x)dx$.

On fait le changement de variable $y = x + T$. Alors $dy = (x+T)'dx = dx$, $y = a + T$ quand $x = a$, $y = b + T$ quand $x = b$, d'où , comme f est T-périodique, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(x+T)$, et

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(x+T)dx = \int_{a+T}^{b+T} f(y)dy = \int_{a+T}^{b+T} f(x)dx.$$

(b) En déduire $\displaystyle\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_b^{b+T} f(x)dx$ (utiliser la relation de Chasles).

$$\begin{aligned}\int_a^{a+T} f(x)dx &= \int_a^b f(x)dx + \int_b^{b+T} f(x)dx + \int_{b+T}^{a+T} f(x)dx \\ &= \int_a^b f(x)dx + \int_b^{b+T} f(x)dx - \int_a^b f(x)dx = \int_b^{b+T} f(x)dx,\end{aligned}$$

car, d'après la question précédente, $\displaystyle\int_{b+T}^{a+T} f(x)dx = -\int_{a+T}^{b+T} f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$.

Exercice n°16

Calculer à l'aide d'une (ou plusieurs) intégration(s) par parties les intégrales suivantes.
(a) $\displaystyle\int_0^2 xe^{x-1}dx$.

Théorème (formule d'intégration par parties). Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soient $u, v : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe C^1. Alors, pour tous $a, b \in I$,

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx\,.$$

On intègre par parties en choisissant

$$\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = e^{x-1} \end{cases} \qquad \text{d'où} \qquad \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = e^{x-1} \end{cases}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \int_0^2 xe^{x-1}dx &= \left[xe^{x-1}\right]_0^2 - \int_0^2 e^{x-1}dx, \\ &= 2e - \left[e^{x-1}\right]_0^2 = 2e - e + \frac{1}{e} = e + \frac{1}{e}. \end{aligned}$$

Exercice n°16

(b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} (x+1)\sin(x)dx.$

On intègre par parties en choisissant

$$\begin{cases} u(x) = x+1 \\ v'(x) = \sin(x) \end{cases} \qquad \text{d'où} \qquad \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -\cos(x) \end{cases}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} (x+1)\sin(x)dx &= \Big[-(x+1)\cos(x)\Big]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \cos(x)dx, \\ &= -(2\pi+1)\cos(2\pi) + \cos(0) + \Big[\sin(x)\Big]_0^{2\pi}, \\ &= -2\pi + sin(2\pi) - \sin(0) = -2\pi. \end{aligned}$$

Exercice n°16

(c) $\int_0^1 x^2 e^{-2x} dx.$

On intègre par parties en choisissant $\left\{ \begin{array}{l} u(x) = x^2 \\ v'(x) = e^{-2x} \end{array} \right.$ d'où $\left\{ \begin{array}{l} u'(x) = 2x \\ v(x) = -\frac{e^{-2x}}{2} \end{array} \right.$.

On en déduit

$$\int_0^1 x^2 e^{-2x} dx = \left[-x^2 \frac{e^{-2x}}{2} \right]_0^1 + \int_0^1 x e^{-2x} dx = -\frac{1}{2e^2} + \int_0^1 x e^{-2x} dx.$$

On intègre à nouveau par parties avec $\left\{ \begin{array}{l} u(x) = x \\ v'(x) = e^{-2x} \end{array} \right.$ d'où $\left\{ \begin{array}{l} u'(x) = 1 \\ v(x) = -\frac{e^{-2x}}{2} \end{array} \right.$,

et

$$\int_0^1 x e^{-2x} dx = \left[-x \frac{e^{-2x}}{2} \right]_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-2x} dx = -\frac{1}{2e^2} + \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2} e^{-2x} \right]_0^1$$

$$= -\frac{1}{2e^2} - \frac{1}{4e^2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \left[1 - \frac{3}{e^2} \right].$$

Puis

$$\int_0^1 x^2 e^{-2x} dx = -\frac{1}{2e^2} + \frac{1}{4} \left[1 - \frac{3}{e^2} \right] = \frac{1}{4} \left[1 - \frac{5}{e^2} \right].$$

Exercice n°17

En utilisant $u = \arctan$ et $v(x) = x$ pour une intégration par parties, donner toutes les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction *arctan*.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, x_0 un point de I et soit f une fonction définie et continue sur I. Alors la fonction $\mathcal{K}$ définie sur I par $\mathcal{K}(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ est une primitive de f. Plus précisément, $\mathcal{K}$ est l'unique primitive de f qui s'annule en x_0.

$x \to \displaystyle\int_0^x \arctan(t)dt$ est donc une primitive de arctan.

On intègre par parties en choisissant

$$\begin{cases} u(t) = \arctan(t) \\ v'(t) = 1 \end{cases} \qquad \text{d'où} \qquad \begin{cases} u'(t) = \frac{1}{1+t^2} \\ v(t) = t \end{cases}$$

On en déduit

$$\int_0^x \arctan(t)dt = \Big[t\arctan(t)\Big]_0^x - \int_0^x \frac{t}{1+t^2}dt = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\int_0^x \frac{2t}{1+t^2}dt,$$

$$= x\arctan(x) - \left[\frac{1}{2}\ln(1+t^2)\right]_0^x = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2).$$

Comme $\mathbb{R}$ est un intervalle, toutes les primitives de arctan sont de la forme

$$x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Exercice n°18

En utilisant deux intégrations par parties, calculer $\int_0^x e^t \sin(t)dt$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

On intègre par parties en choisissant $\left\{ \begin{array}{l} u(t) = \sin(t) \\ v'(t) = e^t \end{array} \right.$ d'où $\left\{ \begin{array}{l} u'(t) = \cos(t) \\ v(t) = e^t \end{array} \right.$. On en déduit

$$\int_0^x e^t \sin(t)dt = \Big[e^t \sin(t)\Big]_0^x - \int_0^x e^t \cos(t)dt = e^x \sin(x) - \int_0^x e^t \cos(t)dt.$$

On intègre à nouveau par parties avec $\left\{ \begin{array}{l} u(t) = \cos(t) \\ v'(t) = e^t \end{array} \right.$ d'où $\left\{ \begin{array}{l} u'(t) = -\sin(t) \\ v(t) = e^t \end{array} \right.$, et

$$\int_0^x e^t \cos(t)dt = \Big[e^t \cos(t)\Big]_0^x + \int_0^x e^t \sin(t)dt = e^x \cos(x) - 1 + \int_0^x e^t \sin(t)dt.$$

Puis

$$\int_0^x e^t \sin(t)dt = e^x \sin(x) - \left[e^x \cos(x) - 1 + \int_0^x e^t \sin(t)dt\right],$$

et enfin

$$\int_0^x e^t \sin(t)dt = \frac{1}{2}\left[1 + e^x \Big(\sin(x) - cos(x)\Big)\right].$$

Exercice n°19

Calculer $\displaystyle\int_1^3 \frac{\ln(t)}{t^2}\,dt.$

On a

$$\int_1^3 \frac{\ln(t)}{t^2}\,dt = \int_1^3 \ln(t).\frac{1}{t^2}\,dt.$$

On intègre par parties en choisissant

$$\begin{cases} u(t) = \ln(t) \\ v'(t) = \frac{1}{t^2} \end{cases} \qquad \text{d'où} \qquad \begin{cases} u'(t) = \frac{1}{t} \\ v(t) = -\frac{1}{t} \end{cases}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \int_1^3 \frac{\ln(t)}{t^2}\,dt &= \left[-\frac{\ln(t)}{t}\right]_1^3 + \int_1^3 \frac{1}{t^2}\,dt, \\ &= -\frac{\ln(3)}{3} + \left[-\frac{1}{t}\right]_1^3, \\ &= -\frac{\ln(3)}{3} + 1 - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\left[2 - \ln(3)\right]. \end{aligned}$$

TD3. Corrigé des exercices complémentaires.

L1S1 Portails Math-Info & Math-Physique
Analyse 1

2020-21

Exercice 20. a) Justifier que la fonction $f : t \mapsto \frac{e^t}{t}$ admet une primitive F sur l'intervalle $]0, +\infty[$. On ne cherchera pas à calculer $F(t)$.

On a $f = u/v$, où les fonctions u et v sont définies sur $I =]0, +\infty[$ par $u(t) = e^t$ et $v(t) = t$; u et v sont continues sur I, v ne s'annule pas sur I donc f est continue sur I. Toute fonction continue sur un intervalle admet une primitive sur cet intervalle, donc f admet une primitive F sur I.

b) On considère la fonction $h :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $h(x) = \displaystyle\int_1^{x^2} \frac{e^t}{t}\, dt$.
Donner une expression de $h(x)$ qui utilise la fonction F. En déduire que h est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer $h'(x)$.

Soit $x \in I$; 1 et x^2 appartiennent à I donc, comme F est une primitive de f sur I,

$$h(x) = \int_1^{x^2} f(t)\, dt = \Big[F(t)\Big]_{t=1}^{t=x^2} = F(x^2) - F(1)\,.$$

$x^2 \in I$ pour tout $x \in I$, et F est dérivable sur I, donc h est dérivable sur I et

$$h'(x) = F'(x^2) \cdot 2x = 2xf(x^2) = 2x\frac{e^{x^2}}{x^2} = \frac{2e^{x^2}}{x}\,.$$

Exercice 21. On définit une fonction $h :]-\pi/2, 3\pi/2[\to \mathbb{R}$ en posant $h(x) = \dfrac{\cos x}{1+\sin x}$. Calculer la dérivée de h. Utiliser le résultat obtenu pour calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\sin x}\,dx$ et $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \frac{1}{1+\sin x}\,dx$.

On a

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{\cos'(x)(1+\sin x) - \cos x \sin'(x)}{(1+\sin x)^2} = \frac{-\sin x(1+\sin x) - (\cos x)^2}{(1+\sin x)^2} \\ &= \frac{-\sin x - 1}{(1+\sin x)^2} = -\frac{1}{1+\sin x}\,. \end{aligned}$$

Ainsi, la fonction $-h$ est une primitive sur $]-\pi/2, 3\pi/2[$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+\sin x}$. On a donc

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\sin x}\,dx = -h(\pi/2) + h(0) = 0 + 1 = 1\,;$$

$$\int_0^{\pi/3} \frac{1}{1+\sin x}\,dx = -h(\pi/3) + h(0) = -\frac{1/2}{1+(\sqrt{3}/2)} + 1 = -\frac{1}{2+\sqrt{3}} + 1 = \frac{1+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\,.$$

Exercice 22. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/4} (\tan t)^n \, dt$.

a) Calculer I_0 et I_1.

b) Pour n quelconque, calculer $I_n + I_{n+2}$ (*Indication : mettre* $(\tan t)^n$ *en facteur dans l'intégrale à calculer*).

a) $I_0 = \displaystyle\int_0^{\pi/4} dt = \frac{\pi}{4}$ et

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{\pi/4} \tan t \, dt = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin t}{\cos t} \, dt \\ &= \Big[-\ln(\cos t) \Big]_0^{\pi/4} = -\ln(1/\sqrt{2}) + \ln(1) = \ln(\sqrt{2}) = \frac{\ln(2)}{2} \, . \end{aligned}$$

b) On a

$$\begin{aligned} I_n + I_{n+2} &= \int_0^{\pi/4} (\tan t)^n + (\tan t)^{n+2} \, dt = \int_0^{\pi/4} (\tan t)^n (1 + (\tan t)^2) \, dt \\ &= \int_0^{\pi/4} (\tan t)^n \tan'(t) \, dt = \left[\frac{(\tan t)^{n+1}}{n+1} \right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{n+1} \, . \end{aligned}$$

c) En déduire I_2, I_3, I_4, I_5.

On a vu en a) : $I_0 = \frac{\pi}{4}$, $I_1 = \frac{\ln(2)}{2}$

et en b) : $I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$.

On en déduit :

$I_0 + I_2 = 1$, donc $I_2 = 1 - \frac{\pi}{4}$;

$I_1 + I_3 = \frac{1}{2}$, donc $I_3 = \frac{1}{2} - \frac{\ln 2}{2}$;

$I_2 + I_4 = \frac{1}{3}$, donc $I_4 = \frac{1}{3} - (1 - \frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}$;

$I_3 + I_5 = \frac{1}{4}$, donc $I_5 = \frac{1}{4} - (\frac{1}{2} - \frac{\ln 2}{2}) = \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{4}$.

Exercice 23. a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et soit $a \in \mathbb{R}$. Justifier l'égalité $\displaystyle\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(-x)\,dx$.

b) Montrer que si f est paire, alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$.

a) Par le changement de variable $x = -t$ (et donc $dx = -dt$), on obtient

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \int_{a}^{0} f(-t)\,(-dt) = \int_{0}^{a} f(-t)\,dt = \int_{0}^{a} f(-x)\,dx\,.$$

b) D'après a),

$$(*) \qquad \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(-x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx\,.$$

Si f est paire, $f(-x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc $(*)$ donne $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$.

c) Montrer que si f est impaire, alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.

On a vu en b) l'égalité

$$(*) \qquad \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(-x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx\,.$$

Si f est impaire, $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc $(*)$ donne

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = -\int_{0}^{a} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 0\,.$$

Exercice 24. Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\sqrt{x}}{1+x}\,dx$ (utiliser un changement de variable)

Par le changement de variable $x = t^2$ (et donc $dx = 2tdt$),

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \frac{\sqrt{x}}{1+x}\,dx &= \int_1^{\sqrt{2}} \frac{t}{1+t^2} 2t\,dt = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{2t^2}{1+t^2}\,dt = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{2(t^2+1)-2}{1+t^2}\,dt \\
&= \int_1^{\sqrt{2}} 2 - \frac{2}{1+t^2}\,dt = 2(\sqrt{2}-1) - [2\arctan(t)]_1^{\sqrt{2}} \\
&= 2(\sqrt{2}-1-\arctan(\sqrt{2})+\arctan(1)) \\
&= 2\sqrt{2}-2-2\arctan(\sqrt{2})+\frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

b) $\int_1^2 x \ln x \, dx$ c) $\int_1^2 \frac{\ln x}{x} \, dx$

b) Par une intégration par parties, avec $\begin{cases} u(x) = \ln(x) \\ v'(x) = x \end{cases}$ et $\begin{cases} u'(x) = 1/x \\ v(x) = x^2/2 \end{cases}$,

on obtient

$$\begin{aligned} \int_1^2 x \ln(x) \, dx &= \left[\frac{x^2}{2} \ln(x)\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x}{2} \, dx \\ &= 2\ln(2) - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^2 = 2\ln(2) - 1 + \frac{1}{4} = 2\ln(2) - \frac{3}{4} \, . \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{\ln(x)}{x} \, dx &= \int_1^2 \ln(x) \ln'(x) \, dx = \left[\frac{(\ln(x))^2}{2}\right]_1^2 \\ &= \frac{(\ln(2))^2}{2} \end{aligned}$$

Exercice 25. Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_0^1 7x(3x^2+1)^4\,dx$

En posant $u(x) = 3x^2 + 1$,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 7x(3x^2+1)^4\,dx &= \frac{7}{6}\int_0^1 6x(3x^2+1)^4\,dx \\
&= \frac{7}{6}\int_0^1 u'(x)u(x)^4\,dx = \frac{7}{6}\left[\frac{u(x)^5}{5}\right]_0^1 \\
&= \frac{7}{6}\left[\frac{(3x^2+1)^5}{5}\right]_0^1 = \frac{7}{6}\times\frac{4^5-1}{5} \\
&= \frac{7\times 341}{30} = 238,7\,.
\end{aligned}$$

b) $\displaystyle\int_0^2 s\sqrt{s^2+1}\,ds$

Posons $\varphi(s) = s^2 + 1$. On a $\varphi'(s) = 2s$, donc $s\sqrt{s^2+1} = \dfrac{1}{2}\varphi'(s)\varphi(s)^{1/2}$.

Ainsi la fonction $s \mapsto \dfrac{1}{2}\dfrac{\varphi(s)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $s \mapsto s\sqrt{1+s^2}$. Il vient

$$\int_0^2 s\sqrt{s^2+1}\,ds = \left[\frac{1}{2}\frac{\varphi(s)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^2 = \left[\frac{1}{3}(s^2+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^2 = \frac{5^{\frac{3}{2}}-1}{3} = \frac{5\sqrt{5}-1}{3}.$$

c) $\int_0^1 \ln(1+x^2)\,dx$

On fait une intégration par parties, en posant $\begin{cases} u(x) = \ln(1+x^2) \\ v'(x) = 1 \end{cases}$ et $\begin{cases} u'(x) = \dfrac{2x}{1+x^2} \\ v(x) = x \end{cases}$:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \ln(1+x^2)\,dx &= \int_0^1 u(x)v'(x)\,dx = [u(x)v(x)]_0^1 - \int_0^1 u'(x)v(x)\,dx \\
&= [x\ln(1+x^2)]_0^1 - \int_0^1 \frac{2x^2}{1+x^2}\,dx \\
&= \ln(2) - \int_0^1 \frac{2(x^2+1-1)}{1+x^2}\,dx \\
&= \ln(2) - \int_0^1 2 - \frac{2}{1+x^2}\,dx \\
&= \ln(2) - 2 + [2\arctan(x)]_0^1 = \ln(2) - 2 + \frac{\pi}{2}\,.
\end{aligned}$$