Corrigé du CC1

Exercice 1.
a) Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a\cos(\pi x) + b\sin(\pi x/2)$. Montrer que f est T-périodique, pour une période T à préciser.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(x+4) &= a\cos(\pi(x+4)) + b\sin(\frac{\pi}{2}(x+4)) \\ &= a\cos(\pi x + 4\pi) + b\sin(\frac{\pi x}{2} + 2\pi) \\ &= a\cos(\pi x) + b\sin(\pi x/2) = f(x), \end{aligned}$$

car les fonctions cos et sin sont 2π périodiques. Donc f est 4-périodique.

b) On suppose que f est représentée par la courbe ci-dessous. Déterminer les réels a et b.
Il apparaît sur la représentation graphique de f que $f(0) = -0,5$ et $f(1) = -1,5$ (on peut aussi utiliser : $f(-1) = 2,5$, $f(2) = -0,5$...)
Comme $\cos(0) = 1$ et $\sin(0) = 0$, $f(0) = -0,5$ donne $a = -0,5$.
Comme $\cos(\pi) = -1$ et $\sin(\pi/2) = 1$, $f(1) = -1,5$ donne

$$-a + b = -1,5\,.$$

Donc $b = -1,5 + a = -1,5 - 0,5 = -2$.

Exercice 2. a) Déterminer (sous la forme d'un intervalle ou d'une réunion d'intervalles) le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ défini par la condition sur x suivante : $|x| \leq |x-3|$.
La fonction carré étant strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, on a

$$\begin{aligned} |x| \leq |x-3| &\iff |x|^2 \leq |x-3|^2 \\ &\iff x^2 \leq (x-3)^2 \\ &\iff x^2 \leq x^2 - 6x + 9 \\ &\iff 6x \leq 9 \\ &\iff x \leq 3/2\,. \end{aligned}$$

Le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ cherché est $S =]-\infty, 3/2]$.
Remarque. D'autres arguments sont possibles pour la résolution de cette inéquation. Par exemple on peut utiliser le fait que $|b-a|$ est la distance entre a et b sur la droite réelle.

b) Même question pour la condition $x^2 - 1 > 4$
On a

$$x^2 - 1 > 4 \iff x^2 - 5 > 0 \iff (x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5}) > 0 \iff x > \sqrt{5} \text{ ou } x < -\sqrt{5}\,.$$

Ici $S =]-\infty, -\sqrt{5}[\cup]\sqrt{5}, +\infty[$.

Exercice 3. Résoudre l'équation $\sqrt{2x+3} = x$.
On a

$$\text{(1)} \qquad \sqrt{2x+3} = x \iff \begin{cases} x^2 = 2x+3 \\ x \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - 2x - 3 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

L'équation du second degré $x^2 - 2x - 3 = 0$ a pour discriminant $\Delta = 4 + 12 = 16$. Cette équation a deux solutions réelles, qui sont

$$x_1 = \frac{2+4}{2} = 3 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{2-4}{2} = -1\,.$$

-1 ne convient pas à cause de la condition $x \geq 0$ dans (1). L'équation $\sqrt{2x+3} = x$ a donc 3 comme unique solution.

Exercice 4. On considère la fonction $h : x \mapsto \dfrac{x^2+3x+2}{x^3+x^2}$.

a) Quel est l'ensemble de définition de h?

D_h est l'ensemble des nombres réels x tels que $x^3 + x^2 \neq 0$. Or

$$x^3 + x^2 = 0 \iff x^2(x+1) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = -1\,.$$

Donc $D_h = \mathbb{R}\backslash\{0, -1\}$

b) Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0} h(x)$.

$$h(x) = \frac{x^2(1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2})}{x^3(1+\frac{1}{x})} = \frac{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}{x(1+\frac{1}{x})}\,.$$

Lorsque x tend vers $-\infty$, $1 + \dfrac{3}{x} + \dfrac{2}{x^2}$ tend vers 1 et $x(1+\dfrac{1}{x})$ tend vers $-\infty$. On a donc $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = 0$.

Lorsque x tend vers 0, x^2+3x+2 tend vers 2, et $x^3+x^2 = x^2(x+1)$ tend vers 0_+ (c'est-à-dire : tend vers 0 en ne prenant que des valeurs positives). Donc $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = +\infty$.

c) Trouver une simplification de $h(x)$.

Les solutions de l'équation du second degré $x^2 + 3x + 2 = 0$ sont -1 et -2; $x^2 + 3x + 2$ se factorise en $(x+1)(x+2)$. D'où, pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{0, -1\}$,

$$h(x) = \frac{(x+1)(x+2)}{(x+1)x^2} = \frac{x+2}{x^2}\,.$$

Exercice 5. On considère les fonctions $u : x \mapsto (x+1)^{1/4}$ et $v : x \mapsto x^4 - 1$.

a) Donner l'ensemble de définition de u et celui de v.

$(x+1)^{1/4}$ est défini si $x + 1 \geq 0$: $D_u = [-1, +\infty[$; $D_v = \mathbb{R}$.

b) Déterminer l'ensemble de définition de $v \circ u$ et calculer $v \circ u(x)$.

Comme v est définie sur $\mathbb{R}$, $D_{v\circ u} = D_u = [-1, +\infty[$. Pour $x \in [-1, +\infty[$,

$$v \circ u(x) = v(u(x)) = v((x+1)^{1/4}) = ((x+1)^{1/4})^4 - 1 = (x+1) - 1 = x\,.$$

c) Déterminer l'ensemble de définition de $u \circ v$ et calculer $u \circ v(x)$.

$$D_{u\circ v} = \{x \in D_v \,|\, v(x) \in D_u\} = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x^4 - 1 \geq -1\} = \mathbb{R}\,,$$

car $x^4 \geq 0$ donc $x^4 - 1 \geq -1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$u \circ v(x) = u(x^4 - 1) = ((x^4 - 1) + 1)^{1/4} = (x^4)^{1/4} = |x|\,.$$