## Exercice 1

Pour $a \in \mathbb{R}$, on a l'équivalence : $|a| > 3 \iff a > 3$ ou $a < -3$.

$|x+5| > 3 \iff x+5 > 3$ ou $x+5 < -3$

$\iff x > -2$ ou $x < -8$

Donc on a $|x+5| > 3$ lorsque $\underline{x \in ]-\infty, -8[ \cup ]-2, +\infty[}$

## Exercice 2

a) • $f$ est strictement décroissante sur $[0,4]$. Donc

pour $x \in [0,4]$, $f(4) \leq f(x) \leq f(0)$, c'est-à-dire $-2 \leq f(x) \leq 3$

Par ailleurs, $f$ est strictement croissante sur $[4,7[$. Donc

pour $x \in [4,7[$, $f(4) \leq f(x) < f(7)$, c'est-à-dire $-2 \leq f(x) < 0$.

Finalement, on peut dire que $\underline{\text{pour } x \in [0,7[}$, $\underline{-2 \leq f(x) \leq 3}$

• $f$ est strictement croissante sur $[7,10]$. Donc

pour $x \in ]7,10]$, $f(7) < f(x) \leq f(10)$, c'est-à-dire $\underline{0 < f(x) \leq 5}$

b) • $f$ est strictement décroissante sur $[0,4]$ et $f(2)=0$.

Donc si $x \in [0,2[$, $f(x) > 0$ et si $x \in [2,4]$, $f(x) \leq 0$

• $f$ est strictement croissante sur $[4,10]$ et $f(7)=0$.

Donc si $x \in [4,7]$, $f(x) \leq 0$ et si $x \in ]7,10]$, $f(x) > 0$.

Finalement $\underline{f(x) > 0}$ $\underline{\text{lorsque } x \in [0,2[ \cup ]7,10]}$

## Exercice 3

a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $1+|x| \geq 1$ ; l'ensemble de définition de $f$ est $\mathbb{R}$

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f \circ f(x) = f(f(x)) = \dfrac{1}{1+|f(x)|}$

$1+|x| \geq 1 > 0$ donc $f(x) = \dfrac{1}{1+|x|} > 0$, donc $|f(x)| = f(x)$.

On obtient : $f \circ f(x) = \dfrac{1}{1+f(x)} = \dfrac{1}{1+\frac{1}{1+|x|}} = \dfrac{1+|x|}{1+|x|+1} = \underline{\dfrac{1+|x|}{2+|x|}}$

## Exercice 4

a) • $f \circ f$ a pour ensemble de définition $\mathbb{R}$ :

$\underline{f \circ f(x)} = f(f(x)) = f(x)^2 + 1 = (x^2+1)^2 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 + 1 = \underline{x^4 + 2x^2 + 2}$.

• $f \circ g$ a pour ensemble de définition $]0, +\infty[$

$\underline{f \circ g(x)} = f(g(x)) = g(x)^2 + 1 = \underline{\dfrac{1}{x^2} + 1}$

• $g \circ f$ a pour ensemble de définition $\mathbb{R}$ (car $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2+1 \in ]0,+\infty[$ )

$g \circ f(x) = g(f(x)) = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x^2+1}$.

• $g \circ g$ a pour ensemble de définition $]0,+\infty[$

$g \circ g(x) = g(g(x)) = \frac{1}{g(x)} = x$.

b) $g : ]0,+\infty[ \to ]0,+\infty[ \subset \mathbb{R}$ est décroissante sur $]0,+\infty[$.

et $f$ est croissante sur $]0,+\infty[$, donc $f \circ g$ est décroissante sur $]0,+\infty[$.

## Exercice 5

a) $x^3+x=0 \iff x(x^2+1)=0 \iff x=0$.

$D_F = \mathbb{R}^*$

b) $F(x) = \frac{(x^2+1)^2}{x(x^2+1)} = \frac{x^2+1}{x}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x + \frac{1}{x} = +\infty$ (car $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ )

$\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x+\frac{1}{x} = -\infty$

## Exercice 6

a) $(x-2)(x^3+1) = 0 \iff x-2=0$ ou $x^3+1=0$

$\iff x=2$ ou $x=-1$

$D_G = \mathbb{R} \setminus \{2,-1\}$.

b) $x^4-16 = (x^2)^2-4^2 = (x^2-4)(x^2+4) = (x-2)(x+2)(x^2+4)$

$G(x) = \frac{(x-2)(x+2)(x^2+4)}{(x-2)(x^3+1)} = \frac{(x+2)(x^2+4)}{x^3+1}$

c) $G(x) = \frac{x(1+2/x) \times x^2(1+4/x^2)}{x^3(1+1/x^3)} = \frac{(1+2/x)\times(1+4/x^2)}{1+1/x^3}$

lorsque $x$ tend vers $+\infty$ ou $-\infty$, $2/x$, $4/x^2$ et $1/x^3$ tendent vers 0.

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} G(x) = 1$.

$\lim\limits_{x\to2} G(x) = \frac{(2+2)\times(2^2+4)}{2^3+1}$ (d'après b) )

$= \frac{32}{9}$

## Exercice 7

a) On suppose $b = 0$ : $f(x) = a + c \sin\left(\frac{\pi}{2} x\right)$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x+4) = a + c \sin\left(\frac{\pi}{2}(x+4)\right)$

$= a + c \sin\left(\frac{\pi}{2}x + 2\pi\right)$

$= a + c \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ car sin est $2\pi$-périodique

$= f(x)$

Donc $f$ est <u>périodique de période 4</u>.

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = a + b \times (-x) + c \times \sin\left(-\frac{\pi}{2}x\right)$

$= a - b x - \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ car sin est impaire

$= -f(x) + 2a$.

$f$ est impaire si $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = -f(x)$, donc si <u>$a = 0$</u>

c) $f(0) = 2$ donne <u>$a = 2$</u> (car $\sin(0) = 0$)

$f(1) = 0$ donne $a + b + c \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, c'est-à-dire

$a + b + c = 0$

$f(2) = -1$ donne $a + 2b + c \sin(\pi) = -1$, c'est-à-dire

$a + 2b = -1$

$a = 2$ et $a + 2b = -1$ donc $2b = -3$, <u>$b = -\frac{3}{2}$</u>.

Comme $a + b + c = 0$, $2 - \frac{3}{2} + c = 0$. D'où <u>$c = -\frac{1}{2}$</u>

## Exercice 8

a) $f(x) = \sqrt{x}\left(\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1}\right) = \dfrac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1}\right)}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1}}$

$f(x) = \dfrac{\sqrt{x}\left((x+2) - (x+1)\right)}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1}} = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1}}$

Pour $x > 0$, $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+2/x} + \sqrt{1+1/x}\right)} = \dfrac{1}{\sqrt{1+2/x} + \sqrt{1+1/x}}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{1+2/x} = \sqrt{1} = 1$ (car $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 + \frac{2}{x} = 1$ et la fonction $\sqrt{\ }$ est continue

De même $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{1+1/x} = 1$.

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \frac{1}{2}$

b) $f(x) = \dfrac{x^5\left(3 - 1/x + 2/x^4\right)}{x^6\left(1 + 1/x - 3/x^4 + 4/x^6\right)} = \dfrac{3 - 1/x + 2/x^4}{x\left(1 + \frac{1}{x} - \frac{3}{x^4} + \frac{4}{x^6}\right)}$

Lorsque $x$ tend vers $+\infty$, $3 - 4/x + 2/x^4$ tend vers 3 et $1 + \frac{1}{x} - \frac{3}{x^4} + \frac{4}{x^6}$ tend vers 1. Donc $\underline{\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0}$.

## Exercice 9

a) L'ensemble de définition de $f$ est $\mathbb{R}^*$ ; $f$ est dérivable en tout point $t$ de $\mathbb{R}^*$, et $\underline{f'(t) = 4t^3 - \frac{1}{t^2}}$

b) $\lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = f'(2) = 4 \times 2^3 - \frac{1}{2^2} = 32 - \frac{1}{4} = \underline{\frac{127}{4}}$

## Exercice 10

a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$

$f'(t) = \frac{\sin'(t)(t+3) - \sin t \times 1}{(t+3)^2} = \underline{\frac{(t+3)\cos(t) - \sin t}{(t+3)^2}}$

b) $\forall t \in \mathbb{R}$, $4 + \cos t \geq 4 + (-1) \geq 3$. Donc $D_f = \mathbb{R}$

$f'(t) = -\frac{\cos'(t)}{(4+\cos t)^2} = \underline{\frac{\sin t}{(4+\cos t)^2}}$.

c) $D_f = \mathbb{R}$

$f'(t) = 3 \times (t^2 - 2)^2 \times 2t = \underline{6t(t^2-2)^2}$

(on utilise la formule $(u^3)' = 3u^2 \times u'$)

d) $D_f = \mathbb{R}$

$f'(t) = \sin'(t^4 + t) \times (4t^3 + 1) = \underline{(4t^3+1)\cos(t^4+t)}$

e) $D_f = \mathbb{R}^*$

$f'(x) = \cos'\left(\frac{1}{x}\right) \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{x^2} \times \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

f) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin x \leq 1$ donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $2 - \sin x \geq 1 > 0$.

Donc $D_f = \mathbb{R}$, et $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (c'est la composée de la fonction $x \mapsto 2 - \sin x$, dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $]0, +\infty[$ et de la fonction $\sqrt{\ }$, dérivable sur $]0, +\infty[$)

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2-\sin x}} \times (-\sin)'(x) = \underline{-\frac{\cos x}{2\sqrt{2-\sin x}}}$$

g) $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$

$x^2 - 3x + 2 \geq 0 \iff x \leq 1$ ou $x \geq 2$

$D_f = ]-\infty, 1] \cup [2, +\infty[$.

$D_{f'}$, le domaine de dérivabilité de $f$, est $]-\infty, 1[ \cup ]2, +\infty[$.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2-3x+2}} \times (2x-3) = \underline{\frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x+2}}}.$$

h) La fonction arcsin a pour domaine de définition $[-1, 1]$.

Donc $x \in D_f \iff -1 \leq \frac{x^3}{8} \leq 1$

$\iff -8 \leq x^3 \leq 8$ $\qquad \underline{D_f = [-2, 2]}$

$\iff -2 \leq x \leq 2$

la fonction arcsin étant dérivable sur $]-1, 1[$,

$D_{f'} = ]-2, 2[$ et

$$f'(x) = \arcsin'\left(\frac{x^3}{8}\right) \times \frac{3x^2}{8} = \underline{\frac{3x^2}{8\sqrt{1 - x^6/64}}} = \underline{\frac{3x^2}{\sqrt{64 - x^6}}}.$$

## Exercice 11

Soit $g : \begin{array}{l} ]0, +\infty[ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(1/x) \end{array}$

D'après la formule donnant la dérivée d'une composée, on a

$\forall x \in ]0, +\infty[$, $g'(x) = f'(1/x) \times \left(-\frac{1}{x^2}\right)$

Par hypothèse, $g = f$, donc $g' = f'$.

On a donc $\forall x \in ]0, +\infty[$ $f'\left(\frac{1}{x}\right) \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = f'(x)$, c'est-à-dire :

$$\underline{\forall x \in ]0, +\infty[, \ f'\left(\frac{1}{x}\right) = -x^2 f'(x)}$$

## Exercice 12

$$\lim_{h\to 0} \frac{\tan\left(\frac{\pi}{3}+h\right) - \tan(\pi/3)}{h} = \tan'(\pi/3) \quad , \text{ car}$$

la fonction tan est dérivable en $\pi/3$. On a :

$$\tan'(\pi/3) = \frac{1}{\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 4.$$

La limite est donc $\underline{4}$.

## Exercice 13

Soit $x \in [-1,1]$. Posons $\theta = \pi - \arccos(x)$.

On veut montrer que $\theta = \arccos(-x)$. Cela revient à dire que

$$\begin{cases} \cos\theta = -x & (1) \\ \theta \in [0,\pi] & (2) \end{cases}$$

On a $\cos\theta = \cos(\pi - \arccos(x)) = -\cos(-\arccos(x))$ (car $\cos(\pi+a) = -\cos a$)

$= -\cos(\arccos(x))$ (car cos est paire)

$= -x$ (par définition de arccos).

Donc (1) est vérifiée.

On sait que $0 \leq \arccos(x) \leq \pi$. Donc $-\pi \leq -\arccos x \leq 0$,

donc $0 \leq \pi - \arccos x \leq \pi$ : on a bien $\theta \in [0,\pi]$.

On a montré que $\pi - \arccos(x) = \arccos(-x)$.