UAPV - UFR STS — Année 2018/2019

Portails Math-Info/Math-Physique L1 S1 — Analyse 1

Exercice 1. Pour quels réels x a-t-on $|x+5| > 3$?

Exercice 2. On considère une fonction f d'ensemble de définition $[0,10]$ à valeurs réelles. On suppose que f est strictement décroissante sur $[0,4]$, strictement croissante sur $[4,10]$, et qu'on a : $f(0)=3$, $f(4)=-2$, $f(10)=5$, $f(2)=f(7)=0$.

a) Pour $x \in [0,7[$, quel encadrement a-t-on pour $f(x)$? Et pour $x \in]7,10]$?

b) Pour quels $x \in [0,10]$ a-t-on $f(x) > 0$?

Exercice 3. On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+|x|}$.

a) Déterminer l'ensemble de définition de f.

b) Calculer $f \circ f$.

Exercice 4. On consière la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2+1$ et la fonction $g :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = 1/x$.

a) Calculer les fonction $f \circ f$, $f \circ g$, $g \circ f$, $g \circ g$ en précisant à chaque fois l'ensemble de définition.

b) Quel est le sens de variation de la fonction $f \circ g$? Justifier la réponse.

Exercice 5. On considère la fonction rationnelle $F : x \mapsto \dfrac{x^4+2x^2+1}{x^3+x}$.

a) Quel est l'ensemble de définition de F?

b) Simplifier $F(x)$.

c) Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ de la fonction F.

Exercice 6. On considère la fonction rationnelle $G : x \mapsto \dfrac{x^4-16}{(x-2)(x^3+1)}$.

a) Quel est l'ensemble de définition de G?

b) Simplifier $G(x)$.

c) Déterminer les limites en $+\infty$, en $-\infty$ et en 2 de la fonction G.

Exercice 7. On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a + bx + c\sin(\frac{\pi}{2}x)$; a, b, c sont des paramètres réels.

a) Montrer que si $b = 0$, la fonction f est périodique, de période à préciser.

b) A quelle condition (sur les paramètres) la fonction f est-elle impaire?

c) On suppose à présent que $f(0) = 2$, $f(1) = 0$ et $f(2) = -1$. Déterminer a,b et c.

Exercice 8. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ dans les cas suivants.

a) $f(x)=\sqrt{x}(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1})$ b) $f(x)=\dfrac{3x^5-x^4+2x}{x^6+x^5-3x^2+4}$.

Exercice 9. On pose $f(t)=t^4+\dfrac{1}{t}$.

a) Donner la fonction dérivée de f (et dire où cette fonction est définie).

b) A quoi est égal $\lim_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}$?

Exercice 10. Donner le domaine de définition et calculer la dérivée de la fonction f dans les exemples suivants. Préciser le domaine de définition de f' dans le cas où il ne coïncide pas avec celui de f.

a) $t\mapsto \dfrac{\sin t}{t+3}$ *b)* $t\mapsto \dfrac{1}{4+\cos t}$ *c)* $t\mapsto (t^2-2)^3$ *d)* $t\mapsto \sin(t^4+t)$

e) $x\mapsto \cos(1/x)$ *f)* $x\mapsto \sqrt{2-\sin x}$ *g)* $x\mapsto \sqrt{x^2-3x+2}$ *h)* $x\mapsto \arcsin(x^3/8)$.

Exercice 11. On considère une fonction dérivable $f\ :]0,+\infty[\to\mathbb{R}$. On suppose que $\forall x\in]0,+\infty[,\ f(1/x)=f(x)$. Montrer que

$$\forall x\in]0,+\infty[,\ f'(1/x)=-x^2f'(x)\,.$$

Exercice 12. Déterminer $\lim_{h\to 0}\dfrac{\tan(\frac{\pi}{3}+h)-\tan(\frac{\pi}{3})}{h}$.

Exercice 13. Montrer que pour tout $x\in[-1,1]$,

$$\arccos(x)+\arccos(-x)=\pi\,.$$