Corrigé du CC2

Exercice 1. a) $f(x) = \arctan(u(x))$, avec $u(x) = 1/x$. Par la formule de dérivation de la composée de deux fonctions,

$$f'(x) = \arctan'(u(x)) \cdot u'(x) = \frac{u'(x)}{1 + u(x)^2} = \frac{-\frac{1}{x^2}}{1 + (\frac{1}{x})^2} = -\frac{1}{x^2+1}\,.$$

b) On a $f(1) = \arctan(1) = \pi/4$. Donc

$$\lim_{x\to 1} \frac{\arctan(1/x) - \frac{\pi}{4}}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = f'(1) = -\frac{1}{1^2+1} = -\frac{1}{2}\,.$$

Exercice 2. a) g est continue sur $[0, +\infty[$ et dérivable sur $]0, +\infty[$. Par la formule de dérivation d'un produit de fonctions,

$$g'(x) = \sqrt{x} + (x-6) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x}^2 + (x-6)}{2\sqrt{x}} = \frac{3x-6}{2\sqrt{x}}\,.$$

On a

$$g'(x) = 0 \iff 3x - 6 = 0 \iff x = 2\,.$$

2 est donc le seul point critique de g.

b) On a $\lim_{x\to+\infty}(x-6) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$, donc $\lim_{x\to+\infty}(x-6)\sqrt{x} = +\infty$. D'où $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

c) D'après a), $g'(x)$ est du signe de $3x - 6$, c'est-à-dire : $g'(x) < 0$ si $0 < x < 2$, $g'(2) = 0$ et $g'(x) > 0$ si $x > 2$. D'où le tableau de variation suivant, où on a calculé $g(0) = -1$ et $g(2) = -4\sqrt{2} - 1$

x	0		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	-1	$\searrow$	$-4\sqrt{2}-1$	$\nearrow$	$+\infty$

D'après ce tableau de variation, l'équation $g(x) = 0$ a une unique solution, qui est dans l'intervalle $]2, +\infty[$.

Exercice 3. a) On a les équivalences suivantes

$$u(x) = 8v(x) \iff e^{2x} = 8e^{-x} \iff \frac{e^{2x}}{e^{-x}} = 8 \iff e^{3x} = 8 \iff 3x = \ln(8) \iff x = \frac{\ln(8)}{3}\,.$$

L'équation a donc une unique solution dans $\mathbb{R}$, qui est $\dfrac{\ln(8)}{3} = \dfrac{\ln(2^3)}{3} = \ln(2)\,.$

b) On a : $h'(x) = 2e^{2x} - 2e^{-x}$ et $h''(x) = 4e^{2x} + 2e^{-x}$.

c) Formule de Taylor-Young pour la fonction h en 0 à l'ordre 2 :

$$h(x) = h(0) + h'(0)x + \frac{h''(0)}{2}x^2 + x^2\epsilon(x) \quad \text{avec } \lim_{x\to 0}\epsilon(x) = 0\,.$$

On a $h(0) = 3$, $h'(0) = 0$ et $h''(0) = 6$. D'où

$$h(x) = 3 + 3x^2 + x^2\epsilon(x) \quad \text{avec } \lim_{x\to 0} \epsilon(x) = 0\,.$$

d) D'après c),

$$\frac{e^{2x} + 2e^{-x} - 3}{x^2} = \frac{h(x) - 3}{x^2} = \frac{3x^2 + x^2\epsilon(x)}{x^2} = 3 + \epsilon(x)$$

Puisque $\lim_{x\to 0} \epsilon(x) = 0$, $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{2x} + 2e^{-x} - 3}{x^2} = 3$.

Exercice 4. a) Posons $u(t) = (t^2 + 1)$. On a $u'(t) = 2t$, d'où

$$I = \int_0^1 \frac{1}{2} u'(t)u(t)^2\, dt = \frac{1}{2}\Big[\frac{u(t)^3}{3}\Big]_0^1 = \frac{1}{6}[(t^2+1)^3]_0^1 = \frac{1}{6}(2^3 - 1) = \frac{7}{6}\,.$$

b) On a

$$J = \int_0^{\pi/2} \sin'(x)\sin(x)\, dx = \Big[\frac{(\sin(x))^2}{2}\Big]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}\,,$$

puisque $\sin(\pi/2) = 1$ et $\sin(0) = 0$.

c) On a

$$\begin{aligned} K &= \int_1^e \frac{1}{s} - s\, ds = \Big[\ln(s) - \frac{s^2}{2}\Big]_1^e = \Big(\ln(e) - \frac{e^2}{2}\Big) - \Big(\ln(1) - \frac{1}{2}\Big) \\ &= 1 - \frac{e^2}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3 - e^2}{2}\,. \end{aligned}$$