Avignon Université - UFR STS | Année 2022/2023

Portails Math-Info/Math-Physique L1 S1 | Analyse 1

TD3

Exercice 1. Un train part d'une gare A au temps $t = 0$ et arrive en gare B au temps $t = 30$ (exprimé en minutes). On note $v(t)$ la vitesse instantanée (exprimée en kilomètres par minute) du train à l'instant t. On a

$$v(t) = \begin{cases} \min(4, t) & \text{pour} \quad 0 \leq t \leq 24 \quad (\min(a, b) \text{ est le plus petit des deux réels } a \text{ et } b) \\ 28 - t & \text{pour} \quad 24 \leq t \leq 26 \\ 2 & \text{pour} \quad 26 \leq t \leq 29 \\ 60 - 2t & \text{pour} \quad 29 \leq t \leq 30 \end{cases}$$

a) Tracer la courbe représentative de la fonction vitesse.

b) Déterminer la distance parcourue par le train entre les gares A et B.

c) Donner la vitesse moyenne du train sur le parcours en $\text{km}\cdot\text{mn}^{-1}$ puis en $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$.

Exercice 2. a) Déterminer la primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \mapsto 1 - 2x + x^2$ qui s'annule en 0, puis celle qui s'annule en 2.

b) Soit $g :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$, définie par $g(t) = \dfrac{2}{t} - t$. Déterminer la primitive de g qui s'annule en 1, puis celle qui vaut 3 en e.

Exercice 3. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par $f(x) = \begin{cases} -1 \text{ si } x < 0 \\ 1 \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$.

a) Déterminer toutes les fonctions $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dérivables en tout point de $\mathbb{R}^*$ et continues en 0, telles que $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ g'(x) = f(x)$.

b) Justifier que les fonctions trouvées en a) ne sont pas dérivables en 0. En déduire que f n'a pas de primitive sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4. Trouver les primitives sur I de la fonction f dans chacun des cas suivants.

a) $I = \mathbb{R}$, $f(x) = (2x + 1)^3$; b) $I = \mathbb{R}$, $f(t) = e^{\lambda t}$ $(\lambda \in \mathbb{R}^*)$;

c) $I = \mathbb{R}$, $f(x) = b^{4x+1}$ $(b \in \mathbb{R}_+^*)$; d) $I =]-1, +\infty[$, $f(x) = (x + 1)^{-\alpha}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$;

e) $I =]-\infty, 3]$, $f(s) = \sqrt{3 - s}$; f) $I =]-\frac{1}{3}, +\infty[$ ou $I =]-\infty, -\frac{1}{3}[$, $f(t) = \dfrac{4}{3t + 1}$.

Exercice 5. Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue. On suppose que $\forall x \in [a, b]$ $m \leq f(x) \leq M$. Montrer que la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[a, b]$ est comprise entre m et M.

Exercice 6. Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_1^4 (x+2)^2\,dx$ b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^3-1}{x^2}\,dx$ c) $\displaystyle\int_a^{3a} \frac{ds}{s}$ $(a \in \mathbb{R}^*)$ d) $\displaystyle\int_1^8 x^{1/3}\,dx$

e) $\displaystyle\int_0^1 e^{3t} - e^{-t}\,dt$ f) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \cos(3s)\,ds$ g) $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

Exercice 7. a) Exprimer $\cos(2x)$ en fonction de $\sin^2 x$. En déduire une primitive de $\sin^2$ sur $\mathbb{R}$.
b) Pour $n \in \mathbb{N}$, donner une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto \cos x(\sin x)^n$. En déduire une primitive de la fonction $\cos^3$.
c) Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/2} (\sin t)^2 - (\cos t)^3\,dt$.

Exercice 8. Calculer les intégrales suivantes. On remarquera que la fonction intégrée peut être écrite sous la forme $x \mapsto f(u(x))u'(x)$.

a) $\displaystyle\int_1^x \frac{\cos\sqrt{t}}{2\sqrt{t}}\,dt$ $(x \in \mathbb{R}_+^*)$ b) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan x\,dx$ c) $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{t}}}{t^2}\,dt$

Exercice 9. a) En utilisant l'identité $x^3 = x(x^2+1) - x$, calculer $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^3}{1+x^2}\,dx$.

b) Calculer $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^4}{1+x^2}\,dx$ par une méthode analogue.

Exercice 10. a) Donner le domaine de définition D de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2-x-2}$
b) Trouver deux constantes réelles a et b telles que

$$\forall x \in D\,,\ f(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-2}$$

c) Calculer $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$.

Exercice 11. Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi} |\cos t\,|\,dt$. *Indication : étudier le signe de la fonction* cos *sur* $[0,\pi]$ *et utiliser la relation de Chasles.*

Exercice 12. Calculer les intégrales suivantes en utilisant un changement de variable.

a) $\displaystyle\int_2^e \frac{(\ln x)^3}{x}\,dx$ *b)* $\displaystyle\int_0^3 x^2\sqrt{1+x}\,dx$ (poser $s = \sqrt{1+x}$)

c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+\sqrt[3]{t}}\,dt$ *d)* $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{2+e^{-t}}\,dt$ (poser $x = e^t$)

Exercice 13. Calculer à l'aide d'une (ou plusieurs) intégration(s) par parties les intégrales suivantes.

$$a)\ \int_1^3 \frac{\ln t}{t^2}\,dt \qquad b)\ \int_0^{2\pi}(x+1)\sin x\,dx \qquad c)\ \int_0^1 x^2e^{-2x}\,dx$$

Exercice 14. En utilisant $u = \arctan$ et $v(x) = x$ pour une intégration par parties, donner toutes les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction arctan.

Exercice 15. En utilisant deux intégrations par parties, calculer $\displaystyle\int_0^x e^t \sin t\,dt$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

EXERCICES COMPLEMENTAIRES

Exercice 16. a) Justifier que la fonction $f : t \mapsto \dfrac{e^t}{t}$ admet une primitive F sur l'intervalle $]0,+\infty[$. On ne cherchera pas à calculer $F(t)$.

b) On considère la fonction $h :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $h(x) = \displaystyle\int_1^{x^2} \frac{e^t}{t}\,dt$. Donner une expression de $h(x)$ qui utilise la fonction F. En déduire que h est dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculer $h'(x)$.

Exercice 17. On définit une fonction $h :]-\pi/2, 3\pi/2[\to \mathbb{R}$ en posant $h(x) = \dfrac{\cos x}{1+\sin x}$. Calculer la dérivée de h. Utiliser le résultat obtenu pour calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\sin x}\,dx$ et $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \frac{1}{1+\sin x}\,dx$.

Exercice 18. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/4} (\tan t)^n\,dt$.

a) Calculer I_0 et I_1.

b) Pour n quelconque, calculer $I_n + I_{n+2}$ (*Indication : mettre* $(\tan t)^n$ *en facteur dans l'intégrale à calculer*).

c) En déduire I_2, I_3, I_4, I_5.

Exercice 19. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une fonction continue et périodique de période T. Soit $a, b \in \mathbb{R}$.

a) Montrer en utilisant un changement de variable que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a+T}^{b+T} f(x)\,dx$.

b) En déduire que $\displaystyle\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_b^{b+T} f(x)\,dx$ (utiliser la relation de Chasles).

Exercice 20. Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\sqrt{x}}{1+x}\,dx$ (utiliser un changement de variable) b) $\displaystyle\int_1^2 x\ln x\,dx$ c) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln x}{x}\,dx$

Exercice 21. Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_0^1 7x(3x^2+1)^4\,dx$ b) $\displaystyle\int_0^2 s\sqrt{s^2+1}\,ds$ c) $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+x^2)\,dx$.

Exercice 22. a) En utilisant l'identité $x^2-4x+5=(x-2)^2+1$, trouver une primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^2-4x+5}$. Calculer $\displaystyle\int_1^3 \frac{dx}{x^2-4x+5}$.

b) Soit a un réel strictement positif. Donner une primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+(x/a)^2}$.

En déduire une primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{a^2+x^2}$.

Application : calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^b \frac{dx}{3+x^2}$ et déterminer sa limite lorsque b tend vers $+\infty$.