Chap. 3 Intégration.

L1S1 Portails Math-Info & Math-Physique
Analyse 1

2022-23

1 Intégrale d'une fonction sur un intervalle $[a, b]$

1.1 Introduction : vitesse et distance

On considère un véhicule roulant à la vitesse v_1 (exprimée en $km.h^{-1}$) entre les instants (exprimés en heures) $t = 0$ et $t = t_1$ et à la vitesse v_2 entre les instants $t = t_1$ et $t = t_1 + t_2$. On se demande quelle est la distance d (exprimée en km) parcourue entre les instants $t = 0$ et $t = t_1 + t_2$.

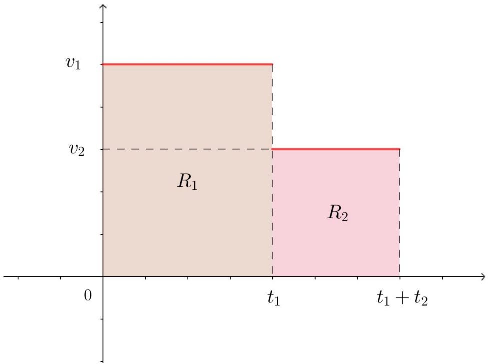
Pendant la première phase, de durée t_1, le véhicule roule à la vitesse v_1 et parcourt donc une distance $d_1 = v_1 \times t_1$. Pendant la deuxième phase, de durée t_2, le véhicule parcourt une distance $d_2 = v_2 \times t_2$. La distance parcourue totale est donc

$$d = v_1 \times t_1 + v_2 \times t_2 \,.$$

La vitesse moyenne du véhicule entre les instants 0 et $t_1 + t_2$ est

$$v_{moy} = \frac{d}{t_1 + t_2} = \frac{v_1 \times t_1 + v_2 \times t_2}{t_1 + t_2} \,.$$

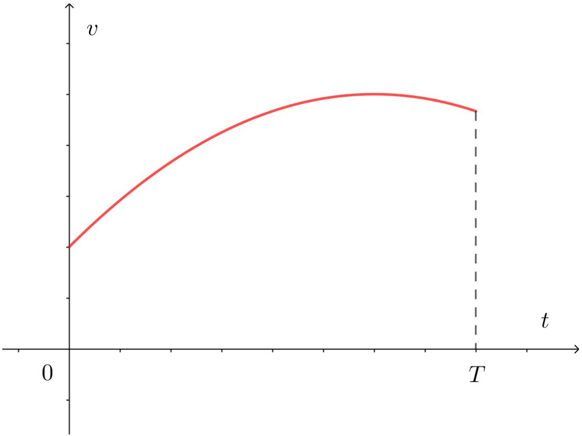
Considérons à présent la courbe représentative de la vitesse (en fonction du temps), dans le plan muni d'un repère orthonormé.



Le domaine D compris entre l'axe des abscisses et la courbe représentative de la vitesse est constitué de deux rectangles R_1 et R_2. L'aire de R_1 est $v_1 \times t_1$ et l'aire de R_2 est $v_2 \times t_2$. On remarque que

$$Aire(D) = Aire(R_1) + Aire(R_2) = v_1 \times t_1 + v_2 \times t_2 = d\,.$$

Supposons à présent que la vitesse du véhicule change de manière continue entre les instants $t = 0$ et $t = T$. La fonction vitesse $(t \mapsto v(t))$ est représentée par la courbe suivante.



Dans ce cas, comment peut-on déterminer la distance parcourue par le véhicule entre les instants 0 et T?

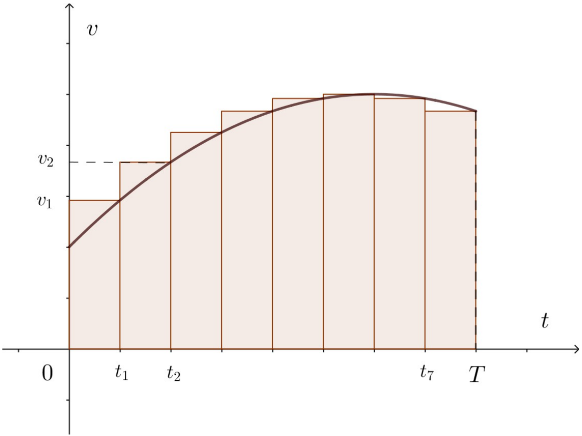
Une méthode pour estimer cette distance est de diviser l'intervalle $[0, T]$ en n sous-intervalles de longueur T/n, en introduisant les temps intermédiaires $t_i = \dfrac{iT}{n}$. Notons $v_i = v(t_i)$ la vitesse à l'instant t_i.
Si n est grand, t_{i-1} est proche de t_i, et on peut considérer qu'entre les instants t_{i-1} et t_i, la vitesse reste "presque" égale à $v_i := v(t_i)$. Ainsi, la distance d_i parcourue par le véhicule entre les instants t_{i-1} et t_i est "presque" égale à $v_i \times (t_i - t_{i-1}) = v_i \times T/n$. L'erreur associée à cette approximation est petite par rapport à $1/n$: $d_i = v_i \times T/n + \epsilon_i$, avec $\epsilon_i << 1/n$ (pour n grand). Finalement, en notant d la distance parcourue total (entre les instants 0 et T), on obtient

$$d = d_1 + d_2 + \ldots + d_n \simeq \widetilde{d}(n),$$

où

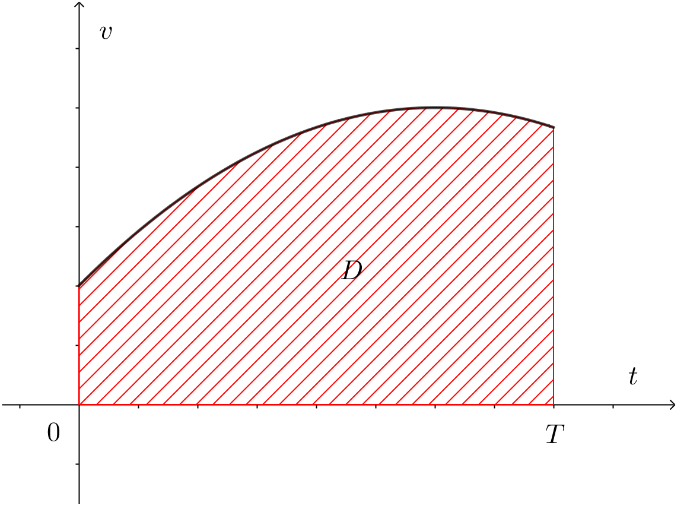
$$\widetilde{d}(n) = v_1 \times \frac{T}{n} + v_2 \times \frac{T}{n} + \ldots + v_n \times \frac{T}{n} \tag{1}$$

Lorsque n devient très grand, $\widetilde{d}(n)$ tend vers la valeur exacte d.



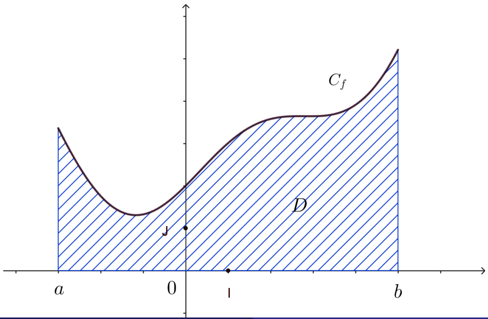
La distance parcourue totale approchée $\widetilde{d}(n)$ obtenue en (1) est la somme des aires des rectangles (de largeur T/n) apparaissant sur le dessin.

Lorsque n devient grand, cette somme d'aires tend vers l'aire sous la courbe représentative de v. La distance parcourue exacte d est donc égale à l'aire sous la courbe représentative de v.

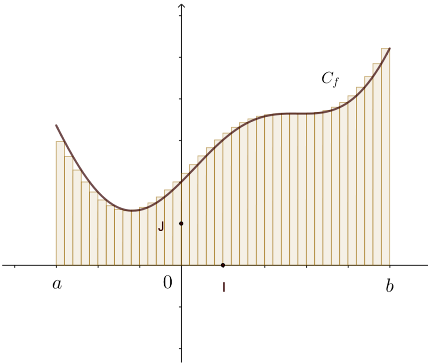


1.2 Intégrale d'une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$

a) Cas d'une fonction à valeurs positives. Notons C_f la courbe représentative, dans un repère orthonormé (O, OI, OJ) du plan, d'une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ne prenant que des valeurs positives. L'intégrale de f entre a et b est définie comme l'aire du domaine situé entre l'axe des abscisses et C_f. Cette intégrale est notée $\int_a^b f(x)\,dx$, ou simplement $\int_a^b f$. Autres notations possibles : $\int_{[a,b]} f(x)\,dx$, $\int_{[a,b]} f$.



Remarque. Supposons la fonction f continue. Comme remarqué en 1.1, l'aire qui définit $\displaystyle\int_a^b f$ peut être approchée par une somme d'aires de rectangles, obtenus en divisant $[a, b]$ en n sous intervalles $[a_{i-1}, a_i]$ de longueur $\dfrac{b-a}{n}$, avec $a_i = a + \dfrac{i(b-a)}{n}$, et en considérant pour chaque i le rectangle de base $[a_{i-1}, a_i]$ et de hauteur $f_i := f(a_i)$.



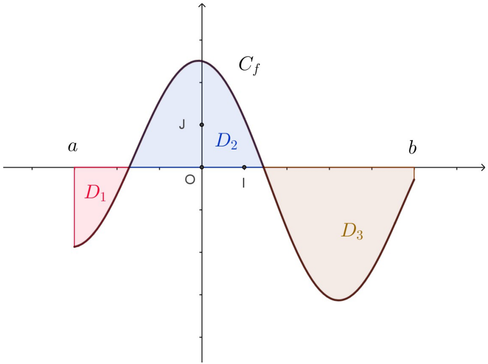
L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ est ainsi approchée par la somme

$$I_n(f; a, b) = \frac{b-a}{n}(f(a_1) + f(a_2) + \ldots + f(a_n)) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a + i(b-a)/n).$$

Lorsque n tend vers $+\infty$, $I_n(f; a, b)$ tend vers $\int_a^b f$.

b) Dans le cas d'une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ pouvant prendre des valeurs négatives, on adopte la convention suivante pour définir l'intégrale $\int_a^b f$: l'aire d'un domaine situé au-dessus de l'axe des abscisses est comptée positivement; l'aire d'un domaine situé au-dessous de l'axe des abscisses est comptée négativement. Par exemple, pour la fonction f représentée ci-dessous, on a :

$$\int_a^b f(x)\,dx = -Aire(D_1) + Aire(D_2) - Aire(D_3)$$



Comme dans le cas des fonctions à valeurs positives, si f est continue, $\int_a^b f$ est la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de $I_n(f; a, b)$, où

$$I_n(f; a, b) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(a + i(b-a)/n)\,.$$

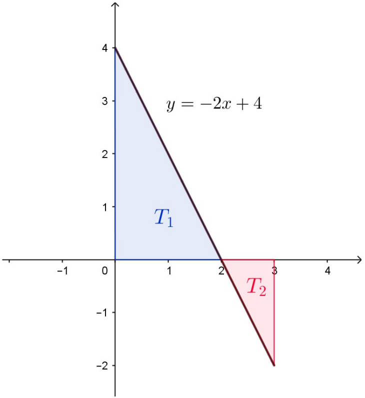
Les sommes $I_n(f; a, b)$ sont appelées sommes de Riemann pour l'intégrale $\int_a^b f$.

Remarque. Si $a = b$, l'intégrale est nulle : $\displaystyle\int_a^a f = 0$.

c) Exemples.

i) Dans le cas où f est une fonction constante : $f(x) = k$ pour tout $x \in [a, b]$,
$$\int_a^b f(x)\,dx = k(b-a).$$

ii) Considérons la fonction
$g : [0,3] \to \mathbb{R}$ définie par
$g(x) = -2x + 4$. On a



$$\begin{aligned}\int_0^3 g(x)\,dx &= Aire(T_1) - Aire(T_2)\\ &= \frac{2\times 4}{2} - \frac{1\times 2}{2}\\ &= 4 - 1 = 3\,.\end{aligned}$$

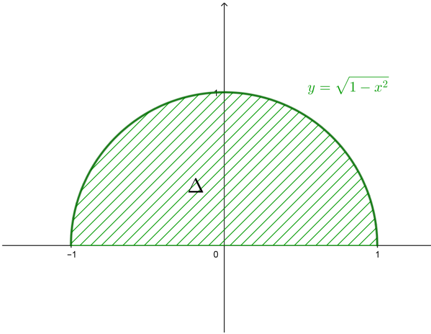
iii) Considérons la fonction $h : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ définie par $h(x) = \sqrt{1 - x^2}$. Si le point M de coordonnés (x, y) appartient à la courbe représentative de h, alors

$$x^2 + y^2 = x^2 + \sqrt{1 - x^2}^2 = x^2 + (1 - x^2) = 1 \quad \text{et} \quad y \geq 0\,.$$

En fait la courbe représentative de h est le demi-cercle supérieur de centre O et de rayon 1.

$\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\, dx$ est donc l'aire du domaine Δ, qui est un demi-disque :

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\, dx = \mathrm{Aire}(\Delta) = \frac{\pi}{2}\,.$$



d) Valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle $[a, b]$. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ (avec $a < b$). La valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[a, b]$ est définie par

$$VM(f; a, b) = \frac{1}{b-a} \int_{[a,b]} f(x)\, dx$$

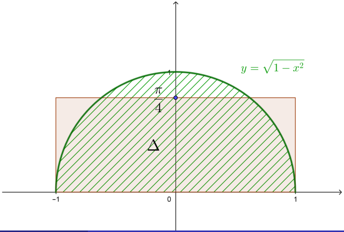
Remarque. Si $VM(f, a, b) = m$, alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f(x)\, dx = \int_{[a,b]} m\, dx$.

Exemples. Reprenons les exemples ii) et iii) de c).

- La valeur moyenne sur $[0, 3]$ de la fonction $g : x \mapsto -2x + 4$ est $VM(g; 0, 3) = \dfrac{1}{3} \displaystyle\int_0^3 g = \dfrac{3}{3} = 1.$
- La valeur moyenne sur $[-1, 1]$ de la fonction $h : x \mapsto \sqrt{1 - x^2}$ est

$$VM(h; -1, 1) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} h = \frac{\pi}{4}.$$

Ci-contre, l'aire du domaine hachuré est égale à l'aire du rectangle.

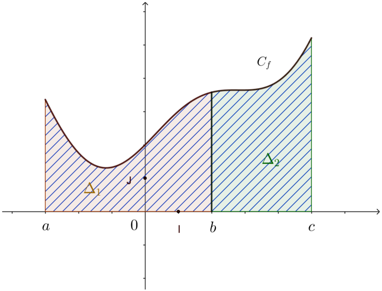


1.3 Premières propriétés

a) Relation de Chasles. Soit $f : [a, c] \to \mathbb{R}$ (continue). Pour tout $b \in [a, c]$,

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

Dans le cas des fonctions à valeurs positives, cette relation se déduit facilement de la définition de l'intégrale comme une aire :



$$\begin{aligned}\int_a^c f &= \text{Aire de la partie hachurée} \\ &= \mathrm{Aire}(\Delta_1) + \mathrm{Aire}(\Delta_2) \\ &= \int_a^b f + \int_b^c f\end{aligned}$$

Pour le moment, nous n'avons défini $\displaystyle\int_a^b f$ que dans le cas où $a \leq b$. On va étendre la définition de la manière suivante: :

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue. Pour $a, b \in I$ avec $a > b$, on pose

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx = -\int_{[b,a]} f\,.$$

Avec la convention ci-dessus, la relation de Chasles se généralise ainsi.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue. Pour tous $a, b, c \in I$,

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx\,.$$

b) Comparaison. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue. Si f ne prend que des valeurs positives, alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f(x)\, dx \geq 0$.

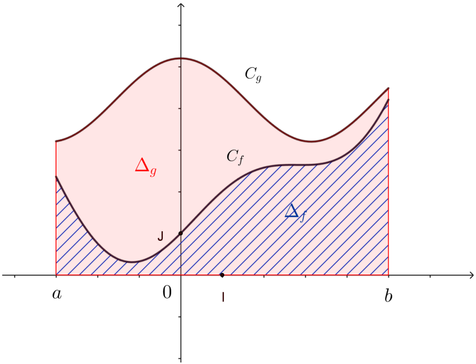
Cette propriété est une conséquence évidente de la définition de l'intégrale d'une fonction positive qu'on a donnée.

Attention, l'implication $f \geq 0 \Longrightarrow \displaystyle\int_a^b f(x)\, dx \geq 0$ n'est valide que si $a \leq b$.

Plus généralement, on a :

Soit $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continues. Si $\forall x \in [a, b]\,,\ f(x) \leq g(x)$, alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f(x)\, dx \leq \int_{[a,b]} g(x)\, dx$.

Dans le cas où f et g sont à valeurs positives, cette propriété est une conséquence immédiate de la définition de l'intégrale.



Si $f \leq g$, la courbe représentative de f est sous la courbe représentative de g, et $\Delta_f \subset \Delta_g$. On a donc $\mathrm{Aire}(\Delta_f) \leq \mathrm{Aire}(\Delta_g)$, c'est-à-dire $\displaystyle\int_{[a,b]} f \leq \int_{[a,b]} g$.

Comme précédemment, l'implication $\displaystyle f \leq g \Longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$ n'est valide que si $a \leq b$.

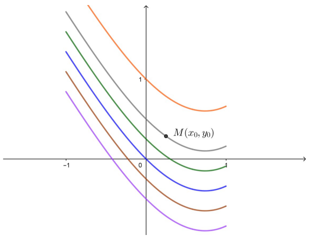
2 Primitives d'une fonction

2.1 Définition

On considère une fonction $f : I \to \mathbb{R}$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. Une primitive de f est une fonction $F : I \to \mathbb{R}$ dérivable dont la dérivée est égale à f :

$$F \text{ est une primitive de } f \iff F' = f\,.$$

Propriété. Soit $f : I \to \mathbb{R}$, une fonction définie sur un intervalle I, admettant une primitive F. Les primitives de f sont les fonctions $F + c$ où $c \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire les fonctions obtenues en ajoutant une constante à F. De plus, pour tout couple $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$, il existe une unique primitive de f prenant en x_0 la valeur y_0.



Ci-contre sont représentées les courbes représentatives de primitives sur $]-1, 1[$ de $f : x \mapsto x - \cos(x)$. Tout point M d'abscisse dans $]-1, 1[$ appartient à la courbe représentative d'une (unique) primitive de f.

Remarque. Certaines fonctions définies sur un intervalle I n'admettent pas de primitive sur I. C'est le cas par exemple de la fonction $u :]-1,1[\to \mathbb{R}$ définie par $u(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-1,0[\\ 1 & \text{si } x \in [0,1[\end{cases}$. Pour une fonction définie sur un intervalle I, on a donc deux situations possibles :

- soit f n'a aucune primitive sur I ;
- soit f possède une infinité de primitives sur I, la différence entre deux primitives quelconques étant une fonction constante sur I.

Nous verrons dans la partie 3 les deux résultats fondamentaux suivants.

- Toute fonction continue sur un intervalle I possède des primitives sur I.
- Si f est continue sur l'intervalle $[a,b]$ et F est une primitive de f sur $[a,b]$, alors

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F|_a^b \stackrel{def}{=} F(b) - F(a)\,.$$

2.2 Tableau de primitives usuelles

Nom de la fonction f	Intervalle	Expression	Primitive F
Constante	$\mathbb{R}$	$f(x) = a$	$F(x) = ax + C$
Affine	$\mathbb{R}$	$f(x) = ax + b$	$F(x) = \frac{1}{2}ax^2 + bx + C$
Puissance d'exposant n $(n \in \mathbb{Z}\ ,\ n \neq -1)$	$\mathbb{R}$ $(n \geq 0)$ $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$ $(n < 0)$	$f(x) = x^n$	$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
Inverse	$\mathbb{R}_+^*$ $\mathbb{R}_-^*$ $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$	$f(x) = 1/x$	$F(x) = \ln(x) + C$ $F(x) = \ln(-x) + C$ $F(x) = \ln(\lvert x\rvert) + C$
Puissance d'exposant α $(\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{-1\})$	$]0, +\infty[$	$f(x) = x^\alpha$	$F(x) = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$

Nom de la fonction f	Intervalle	Expression	Primitive F
Exponentielle	$\mathbb{R}$ $\mathbb{R}$	$f(x) = e^x$ $f(x) = a^x = e^{x\ln(a)}$ $(a > 0, a \neq 1)$	$F(x) = e^x + C$ $F(x) = \dfrac{a^x}{\ln(a)} + C$
Cosinus	$\mathbb{R}$	$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x + C$
Sinus	$\mathbb{R}$	$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x + C$
	$\mathbb{R}$	$f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$	$F(x) = \arctan(x) + C$
	$]-1,1[$	$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$F(x) = \arcsin(x) + C$

Remarque. Les primitives sur $]-1,1[$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ prennent aussi la forme $-\arccos + C$, avec C constante réelle.

2.3 Propriétés

Les règles de calcul des dérivées ont pour conséquence les propriétés suivantes.

- Si F est une primitive de f, alors pour toute constante réelle λ, λF est une primitive de λf.
- Si F est une primitive de f et G est une primitive de g, alors $F + G$ est une primitive de $f + g$.
- Soit u une fonction définie sur un intervalle I, supposée dérivable et à valeurs dans un intervalle J, et soit F une fonction définie et dérivable sur J, de dérivée $F' = f$. Alors la fonction $F \circ u$ est une primitive sur I de la fonction $(f \circ u)u' : x \mapsto f(u(x))u'(x)$.

En particulier :

- $x \mapsto e^{u(x)}$ est une primitive de $x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$.
- $x \mapsto \ln(|u(x)|)$ est une primitive de $x \mapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.
- $x \mapsto \dfrac{u(x)^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ est une primitive de $x \mapsto u'(x)u(x)^{\alpha}$.

- $x \mapsto \sin(u(x))$ est une primitive de $x \mapsto u'(x)\cos(u(x))$.
- $x \mapsto -\cos(u(x))$ est une primitive de $x \mapsto u'(x)\sin(u(x))$.

Exemples.

- Primitives (sur $\mathbb{R}$) de $x \mapsto \frac{x^2}{2} - 3x + 2$: ce sont les fonctions $x \mapsto \frac{x^3}{6} - \frac{3x^2}{2} + 2x + C$, avec C constante réelle.
- Primitives sur $]0, +\infty[$ de la fonction $f : x \mapsto \frac{x^2 - 2x + 1}{x}$. On a
$$f(x) = x - 2 + \frac{1}{x}.$$
Les primitives sur $]0, +\infty[$ de f sont les fonctions $x \mapsto \frac{x^2}{2} - 2x + \ln(x) + C$.

- Primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction $g : x \mapsto \dfrac{5x}{x^2+1}$. On a

$g(x) = \dfrac{5}{2} \cdot \dfrac{2x}{x^2+1} = \dfrac{5}{2} \cdot \dfrac{u'(x)}{u(x)}$, où $u(x) = x^2+1$. Les primitives de g sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \mapsto \dfrac{5}{2}\ln(x^2+1) + C$

- Primitives (sur $\mathbb{R}$) de la fonction $h : x \mapsto \dfrac{1}{1+4x^2}$. On a

$$h(x) = \frac{1}{1+(2x)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{1+(2x)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{u'(x)}{1+u(x)^2} = \frac{1}{2} u'(x) \arctan'(u(x)),$$

avec $u(x) = 2x$. Les primitives de h sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{2}\arctan(2x) + C$.

- Primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction $k : x \mapsto (\cos x)e^{-\sin x}$. On a

$$(\cos x)e^{-\sin x} = -u'(x)e^{u(x)}, \quad \text{avec } u(x) = -\sin x\,.$$

Donc les primitives de k sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \mapsto -e^{-\sin x} + C$.

- Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ ne contenant ni -1, ni 0, ni 1. On considère la fonction ℓ définie sur I par $\ell(x) = \dfrac{3x^2 - 1}{(x^3 - x)^4}$. On a

$$\ell(x) = \frac{u'(x)}{u(x)^4} = u'(x)u(x)^{-4}\,, \quad \text{avec } u(x) = x^3 - x$$

Les primitives de ℓ sur I sont les fonctions

$$x \mapsto \frac{u(x)^{-4+1}}{-4+1} + C = -\frac{u(x)^{-3}}{3} + C\,,$$

c'est-à-dire les fonctions $\quad x \mapsto -\dfrac{1}{3(x^3 - x)^3} + C$.

3 Théorèmes fondamentaux du calcul différentiel et intégral

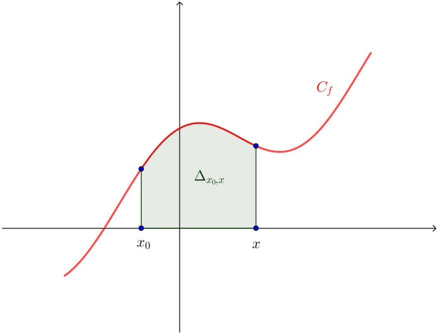
a) Au début du chapitre, nous avons vu comment, à partir de la fonction qui donne la vitesse en fonction du temps, on peut trouver la distance parcourue. La distance parcourue entre les instants t_0 et t_1 peut être obtenue comme l'aire du domaine compris entre l'axe des abscisses et la courbe représentative de la fonction vitesse entre t_0 et t_1 : il s'agit de l'intégrale entre t_0 et t_1 de la fonction vitesse.

D'autre part la fonction vitesse est la dérivée de la fonction "distance parcourue". On passe de la fonction distance à la fonction vitesse par dérivation et inversement, on passe de la fonction vitesse à la fonction distance par intégration. Il semble donc que l'intégration soit une anti-dérivation.

Cette relation est exprimée de manière rigoureuse par le théorème suivant.

Théorème 3.1

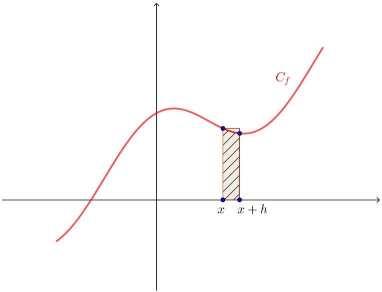
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, x_0 un point de I et soit f une fonction définie et continue sur I. Alors la fonction $\mathcal{K}$ définie sur I par $\mathcal{K}(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ est une primitive de f. Plus précisément, $\mathcal{K}$ est l'unique primitive de f qui s'annule en x_0.



$$\mathcal{K}(x) = \int_{x_0}^{x} f = \mathrm{Aire}(\Delta_{x_0,x})$$

Idée de la preuve lorsque f est à valeurs positives. On fixe $x \in I$ quelconque et on étudie la limite lorsque h tend vers 0 de $\tau_x(h) := \frac{\mathcal{K}(x+h)-\mathcal{K}(x)}{h}$. Regardons d'abord ce qui se passe lorsque h tend vers 0 en restant strictement positif. D'après la relation de Chasles,

$$\mathcal{K}(x+h) - \mathcal{K}(x) = \int_{x_0}^{x+h} f - \int_{x_0}^{x} f = \int_{x_0}^{x+h} f + \int_{x}^{x_0} f = \int_{x}^{x+h} f\,.$$



Dans le dessin ci-dessus, $\mathcal{K}(x+h) - \mathcal{K}(x)$ est l'aire du domaine hachuré ; le rectangle coloré en brun est lui d'aire $hf(x)$.

Lorsque h est très proche de 0, pour tout $t \in [x, x+h]$, $f(t)$ est très proche de $f(x)$, car f est continue en x. Ainsi

$\mathcal{K}(x+h) - \mathcal{K}(x) = \displaystyle\int_x^{x+h} f(t)\, dt = hf(x) + h\epsilon(h)$, où $\epsilon(h)$ est très petit ($h\epsilon(h)$, qui est l'erreur obtenue lorsqu'on approche l'aire du domaine hachuré par l'aire du rectangle, est très petit par rapport à h) : on a $\lim_{h\to 0, h>0} \epsilon(h) = 0$. On trouve ainsi

$$\lim_{h\to 0, h>0} \frac{\mathcal{K}(x+h) - \mathcal{K}(x)}{h} = \lim_{h\to 0, h>0} (f(x) + \epsilon(h)) = f(x)\,.$$

On obtient de manière analogue $\lim_{h\to 0, h<0} \frac{\mathcal{K}(x+h)-\mathcal{K}(x)}{h} = f(x)$. Donc $\mathcal{K}$ est dérivable en x, de nombre dérivé $f(x)$. Finalement, x étant un élément quelconque de I, $\mathcal{K}$ est dérivable en tout point de I et sa dérivée est la fonction f.

b) Voici à présent une conséquence du théorème 3.1.

Théorème 3.2. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit f une fonction définie et continue sur I. Alors

i) f possède des primitives sur I.

ii) Si F est une primitive de f sur I, alors pour tous $a, b \in I$,

$$\int_a^b f = F(b) - F(a)$$

Preuve. Fixons $x_0 \in I$ et considérons $\mathcal{K}$ la fonction définie dans le théorème 3.1; $\mathcal{K}$ est une primitive de f sur I, ce qui donne i). Soit F une primitive quelconque de f sur I. Les fonctions F et $\mathcal{K}$ ayant la même dérivée et I étant un intervalle, il existe une constante C telle que $\forall x \in I,\ F(x) = \mathcal{K}(x) + C$. On obtient, pour tous $a, b \in I$,

$$F(b) - F(a) = (\mathcal{K}(b) + C) - (\mathcal{K}(a) + C) = \mathcal{K}(b) - \mathcal{K}(a) = \int_{x_0}^b f - \int_{x_0}^a f = \int_a^b f\,.$$

Remarque. D'après le théorème précédent, si f est une fonction de classe C^1 sur un intervalle I, alors pour tous $a, b \in I$, $\displaystyle\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$, puisque f est une primitive sur I de f'. La continuité de f' n'est pas essentielle, la formule reste vraie avec des hypothèses plus faibles.

Notation. La différence $F(b) - F(a)$ est couramment notée $[F]_a^b$, ou $[F(x)]_a^b$, ou $[F(x)]_{x=a}^{x=b}$.

c) Exemples de calculs d'intégrales par l'application du théorème précédent.

- $\displaystyle\int_2^4 \frac{dx}{x^2} = \Big[-\frac{1}{x}\Big]_2^4 = -\frac{1}{4} - \Big(-\frac{1}{2}\Big) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$.
- $\displaystyle\int_0^1 e^{-3x} = \Big[-\frac{e^{-3x}}{3}\Big]_0^1 = -\frac{e^{-3}}{3} + \frac{1}{3}$.
- $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x^3} = \Big[-\frac{1}{2x^2}\Big]_{-2}^{-1} = -\frac{1}{2(-1)^2} + \frac{1}{2(-2)^2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{8} = -\frac{3}{8}$.

- Soit f la fonction définie sur $[0,3]$ par $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{si } 1 < x \leq 3 \end{cases}$. En utilisant la relation de Chasles, on trouve

$$\begin{aligned} \int_0^3 f(x)\,dx &= \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^3 f(x)\,dx \\ &= \int_0^1 x^3\,dx + \int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{x}} \\ &= \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 + \left[2\sqrt{x}\right]_1^3 \\ &= \frac{1}{4} + 2\sqrt{3} - 2 \\ &= 2\sqrt{3} - \frac{7}{4} \end{aligned}$$

4 Deux autres propriétés de l'intégration

4.1 Linéarité

On considère deux fonctions f et g définies et continues sur un intervalle I contenant $[a, b]$. Soit λ et μ des constantes réelles. Alors

- $\displaystyle\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx\,;$
- $\displaystyle\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx\,;$
- $\displaystyle\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx + \mu \int_a^b g(x)\,dx\,.$

Preuve. Cette propriété peut être vue comme une conséquence de la linéarité de la dérivation. Montrons la troisième formule. Les fonctions f et g étant continues sur I, elles possèdent des primitives sur I. Soit F (resp. G) une primitive de f (resp. de g). Alors $(\lambda F + \mu G)' = \lambda F' + \mu G' = \lambda f + \mu g$, donc la fonction $\lambda F + \mu G$ est une primitive sur I de $\lambda f + \mu g$. On a donc

$$\begin{aligned} \int_a^b (\lambda f + \mu g) &= (\lambda F + \mu G)(b) - (\lambda F + \mu G)(a) \\ &= \lambda(F(b) - F(a)) + \mu(G(b) - G(a)) \\ &= \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g\,. \end{aligned}$$

Les deux premières formules sont des cas particuliers de la troisième.

Exemple. On pourra écrire $\displaystyle\int_1^5 (\frac{3}{\sqrt{x}} - 4x)\,dx = 3\int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{x}} - 4\int_1^5 x\,dx$.

4.2 Changement de variable

a) Soit I, J, deux intervalles de $\mathbb{R}$, $\varphi : I \to J$ une fonction de classe C^1 et $f : J \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors, pour tous $a, b \in I$, on a la formule de changement de variable

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx\,. \tag{2}$$

Preuve. La fonction f étant continue sur J, elle possède des primitives sur J. Notons F l'une de ces primitives. Posons $G = F \circ \varphi$. Alors

$$G'(t) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)\,.$$

Ainsi la fonction $G = F \circ \varphi$ est une primitive sur I de la fonction $t \mapsto f(\varphi(t))\varphi'(t)$. On a donc

$$\begin{aligned}\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt &= [F \circ \varphi]_a^b = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) \\ &= [F]_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx\,.\end{aligned}$$

b) On peut appliquer la formule (2) de gauche à droite lorsqu'on reconnaît une expression de la forme $t \mapsto f(\varphi(t))\varphi'(t)$ dans la fonction qu'on veut intégrer.

Exemples.

- $$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{\pi}} 2t\sin(t^2)\,dt &= \int_0^{\sqrt{\pi}} \varphi'(t)\sin(\varphi(t))\,dt \quad \text{avec } \varphi(t)=t^2\\ &= \int_0^{(\sqrt{\pi})^2} \sin(x)\,dx\\ &= \int_0^{\pi} \sin(x)\,dx = [-\cos x]_0^{\pi} = 2\,.\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{t^3}{(t^4+1)^2}\,dt &= \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)^2}\,dt \quad \text{avec } \varphi(t)=t^4+1\\ &= \frac{1}{4}\int_{\varphi(0)}^{\varphi(1)} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{4}\int_1^2 \frac{dx}{x^2}\\ &= \frac{1}{4}\Big[-\frac{1}{x}\Big]_1^2 = \frac{1}{4}(-\frac{1}{2}+1) = \frac{1}{8}\end{aligned}$$

c) On peut aussi appliquer la formule (2) de droite à gauche. On part d'une intégrale $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ et on effectue le changement de variable $x = \varphi(t)$. On trouve a et b tels que $\alpha = \varphi(a)$, $\beta = \varphi(b)$. Dans l'intégrale $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$, on remplace x par $\varphi(t)$, dx par $\varphi'(t)dt$, et les bornes α et β de l'intégrale par a et b.

Exemple. Calculons $I = \int_4^7 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$. On utilise le changement de variable
$x = t^2$, pour se débarrasser de la racine carrée ;
$4 = 2^2$, $7 = (\sqrt{7})^2$: les nouvelles bornes de l'intégrale après ce changement de variable seront 2 et $\sqrt{7}$;
x est remplacé par t^2 et dx est remplacé par $2tdt$. On obtient

$$\begin{aligned} I &= \int_2^{\sqrt{7}} \frac{2t}{1+\sqrt{t^2}}\,dt = \int_2^{\sqrt{7}} \frac{2t}{1+t}\,dt \\ &= \int_2^{\sqrt{7}} \frac{2(1+t)-2}{1+t}\,dt = \int_2^{\sqrt{7}} 2 - \frac{2}{1+t}\,dt \\ &= 2(\sqrt{7}-2) - 2[\ln(t+1)]_2^{\sqrt{7}} = 2\sqrt{7} - 4 - 2\ln(1+\sqrt{7}) + 2\ln 3 \end{aligned}$$

5 Intégration par parties

L'intégration par parties est une technique de calcul de primitives et d'intégrales qui repose sur la formule de dérivation d'un produit de fonctions.

Considérons deux fonctions u et v de classe C^1 sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On a $(uv)' = u'v + uv'$. La fonction uv est donc une primitive de la fonction $u'v + uv'$ sur I. On en déduit, pour tous $a, b \in I$,

$$\int_a^b (u'v + uv') = [uv]_a^b = u(b)v(b) - u(a)v(a)$$

D'autre part, par la linéarité de l'intégration, $\displaystyle\int_a^b (u'v + uv') = \int_a^b u'v + \int_a^b uv'$.

On en déduit le résultat suivant.

Théorème (formule d'intégration par parties). Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $u, v : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe C^1. Alors, pour tous $a, b \in I$,

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx\,.$$

Exemple 1 : calcul d'une primitive de ln.

D'après le théorème 3.1, la fonction $F : x \mapsto \int_1^x \ln(t)\,dt$ est une primitive de la fonction ln sur l'intervalle $]0,+\infty[$. Calculons $F(x)$ par une intégration par parties.

On pose $\begin{cases} u(t) = \ln(t)\ ,\ u'(t) = \dfrac{1}{t} \\ v'(t) = 1 \quad ,\ v(t) = t \end{cases}$. Les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et on a

$$\begin{aligned} \int_1^x \ln(t)\,dt &= \int_1^x u(t)v'(t)\,dt \\ &= [uv]_1^x - \int_1^x u'(t)v(t)\,dt \\ &= [t\ln(t)]_{t=1}^{t=x} - \int_1^x \frac{t}{t}\,dt \\ &= x\ln(x) - \int_1^x dt = x\ln(x) - (x-1) = x\ln(x) - x + 1 \end{aligned}$$

Remarque. F est l'unique primitive s'annulant en 1 de ln sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exemple 2 : calcul d'une primitive de la fonction $x \mapsto x^2 \cos x$ sur $\mathbb{R}$.

La fonction $G : x \mapsto \displaystyle\int_0^x t^2 \cos t \, dt$ est une primitive de la fonction $g : x \mapsto x^2 \cos x$. Calculons $G(x)$. On pose $\begin{cases} u(t) = t^2 \quad , \; u'(t) = 2t \\ v'(t) = \cos t \; , \; v(t) = \sin t \end{cases}$.

Les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. On obtient

$$\begin{aligned} \int_0^x t^2 \cos t \, dt &= \int_0^x t^2 \sin'(t) \, dt = [t^2 \sin t]_{t=0}^{t=x} - \int_0^x 2t \sin t \, dt \\ &= x^2 \sin x - 2 \int_0^x t \sin t \, dt \end{aligned}$$

On effectue une deuxième intégration par parties pour calculer cette dernière intégrale. On pose cette fois $u(t) = t$, $u'(t) = 1$; $v'(t) = \sin t$, $v(t) = -\cos t$.

$$\begin{aligned} \int_0^x t \sin t \, dt &= [t \cdot (-\cos t)]_{t=0}^{t=x} - \int_0^x (-\cos t) \, dt \\ &= -x \cos x + [\sin t]_{t=0}^{t=x} = -x \cos x + \sin x \, . \end{aligned}$$

Finalement $G(x) = x^2 \sin x - 2(-x \cos x + \sin x) = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x$.

Exemple 3 : calcul de $I = \int_0^{3\pi/2} \cos^2 x \, dx$. On pose

$\begin{cases} u(x) = \cos x \ , \ u'(x) = -\sin x \\ v'(x) = \cos x \ , \ v(x) = \sin x \end{cases}$. Par une intégration par parties, on trouve

$$\begin{aligned} I = \int_0^{3\pi/2} \cos^2 x \, dx &= [\cos x \sin x]_0^{3\pi/2} - \int_0^{3\pi/2} (-\sin x) \sin x \, dx \\ &= 0 + \int_0^{3\pi/2} \sin^2 x \, dx \,, \end{aligned}$$

où on utilise le fait que $\sin 0 = 0$ et $\cos(3\pi/2) = 0$. On peut ensuite utiliser la relation entre $\cos^2$ et $\sin^2$: on remplace $\sin^2 x$ par $1 - \cos^2 x$ dans la dernière intégrale, ce qui donne

$$I = \int_0^{3\pi/2} (1 - \cos^2 x) \, dx = \int_0^{3\pi/2} dx - I = \frac{3\pi}{2} - I \,.$$

Ainsi $2I = 3\pi/2$. On a donc $\int_0^{3\pi/2} \cos^2 x \, dx = 3\pi/4$.

Remarque. Il y a une autre méthode pour calculer I, qui utilise la formule

$$\cos(2x) = (\cos x)^2 - (\sin x)^2 = (\cos x)^2 - (1 - (\cos x)^2) = 2(\cos x)^2 - 1\,.$$

On en déduit

$$(\cos x)^2 = \frac{\cos(2x) + 1}{2}\,,$$

et

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{3\pi/2} \frac{\cos(2x) + 1}{2}\,dx \\ &= \left[\frac{\sin(2x)}{4} + \frac{x}{2}\right]_0^{3\pi/2} \\ &= 3\pi/4\,. \end{aligned}$$