L1S2 Analyse2
Plan détaillé du cours. Année 2021-2022

SUITES DE NOMBRES REELS
C 2 : Notion de limite.

1 Suites convergentes.

On rappelle la

Définition 1. On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie une propriété P **à partir d'un certain rang**, ou **pour** n **assez grand**, lorsqu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que P soit vérifiée par tous les termes u_n pour $n \geqslant n_0$.

La convergence d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers une limite l signifie, d'une manière intuitive, que le terme u_n est aussi près que l'on veut de l à condition de choisir n assez grand.

Définition 2. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge vers** $l \in \mathbb{R}$, ou **tend vers** l, ou **admet** l **pour limite**, quand n tend vers l'infini, lorsque $(u_n)_n$ vérifie une des conditions équivalentes suivantes :

1. tout intervalleI ouvert contenant l contient les u_n pour tous les $n \in \mathbb{N}$, sauf un nombre fini,
2. pour tout intervalle I ouvert contenant l, on a $u_n \in$ I à partir d'un certain rang,
3. $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N$, alors $|u_n - l| < \epsilon$.

Définition 3. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **convergente** s'il existe un élément $l \in \mathbb{R}$ tel que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l. Une suite qui n'est pas convergente est dite **divergente**.

Déterminer la **nature d'une suite** signifie déterminer si elle converge ou si elle diverge.

lemme 1. *Si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, alors sa limite est unique.*

Conséquence Le nombre l est appelé *la limite* de la suite et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ ou $l = \lim u$ ou $u_n \to l$.

Exemple *à retenir :* la suite de terme général $u_n = (-1)^n$ est divergente.

Proposition 1. Exemples fondamentaux de suites convergentes

— *Toute suite constante converge : si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = a$ alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$.*

— *Soit α un réel* **strictement positif**, *alors* $\dfrac{1}{n^\alpha} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

— *Soit $a \in]-1,1[$, alors $a^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.*

Une conséquence immédiate mais *importante* de la convergence d'une suite est donnée par la proposition suivante :

Proposition 2. *Toute suite convergente est bornée.*

Proposition 3. *Soit $l \in \mathbb{R}$.*

1. *Si $u_n \to l$ alors $|u_n| \to |l|$.*

2. *$(u_n)_n$ tend vers $l \Leftrightarrow (u_n - l)_n$ tend vers 0.*

Définition 4. Soit $u = (u_n)_n$ une suite convergeant vers un réel l ; Si, à partir d'un certain rang, on a $u_n > l$ (resp. $u_n < l$), on dit que u **tend vers** l **par valeurs supérieures** (resp. **inférieures**) et on note $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l^+$ (resp. $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l^-$).

2 Opérations sur les limites.

Proposition 4. *Soient* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites convergentes vers* l *et* l' *respectivement :*

1. *leur somme est une suite convergente dont la limite est la somme des limites* $l + l'$
2. *leur produit est une suite convergente de limite le produit* ll'
3. *soit* $\lambda \in \mathbb{R}$, *la suite* $\lambda(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente de limite* λl,
4. *on suppose que tous les* v_n *sont non nuls et que* l' *est non nulle, alors la suite quotient de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *par* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente de limite* l/l'

3 Extension de la notion de limite

Définition 5.

1. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers l'infini, lorsque $\forall A \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N$, alors $u_n > A$.
2. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$ quand n tend vers l'infini, lorsque $\forall A \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N$, alors $u_n < -A$.

Remarque importante : une suite qui tend vers $+\infty$ n'est pas majorée.

Proposition 5. *Si* (u_n) *tend vers* $+\infty$, (u_n) *est minorée et non majorée.*
Si (u_n) *tend vers* $-\infty$, (u_n) *est majorée et non minorée.*
Les réciproques sont fausses.

Proposition 6. Exemples fondamentaux de suites admettant $+\infty$ pour limite

- *Soit* α *un réel* **strictement positif**, *alors* $n^\alpha \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
- *Soit* $a \in]1, +\infty[$ *alors* $a^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

3.1 Somme

Proposition 7. *Soient* (u_n) *et* (v_n) *deux suites réelles.*

1. *Si* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ *et si* (v_n) *est minorée, alors la suite* $(u_n + v_n)$ *tend vers* $+\infty$.
2. *Si* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ *et si* (v_n) *est majorée, alors la suite* $(u_n + v_n)$ *tend vers* $-\infty$

3.2 Produit

Proposition 8.

1. *Si* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ *et si* (v_n) *est minorée* **par un réel strictement positif**, *à partir d'un certain rang, alors la suite* $(u_n\, v_n)$ *tend vers* $+\infty$.
2. *Si* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ *et si* (v_n) *est minorée* **par un réel strictement positif**, *à partir d'un certain rang , alors la suite* $(u_n\, v_n)$ *tend vers* $-\infty$.

3.3 Quotient

Proposition 9.

1. *Si* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ *et si ses termes sont strictement positifs, alors la suite* $(1/u_n)$ *tend vers* $+\infty$.
2. *Si* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ *et si ses termes sont strictement négatifs, alors la suite* $(1/u_n)$ *tend vers* $-\infty$.
3. *Si* $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = +\infty$ *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = 0$.

4 Composition de limites

On note $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ la droite réelle achevée.

Théorème 10. *Soit $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction et (u_n) une suite réelle qui tend vers $a \in \overline{\mathbb{R}}$ telle que $u_n \in \mathcal{D}$ à partir d'un certain rang. Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = l$.*

Soit (u_n) une suite définie par récurrence, associée à la fonction f :
soit une partie E de $\mathbb{R}$, $a \in E$, une application f de E dans E. Il existe une et une seule suite (u_n) telle que :

$$u_0 = a, \quad u_{n+1} = f(u_n), \quad n \geqslant 0\,.$$

Théorème 11. *Soit $l \in E$. Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$ et si f est* **continue** *en l, alors $f(l) = l$.*

Le réel l est appelé *point fixe* de f. On recherche donc les limites réelles éventuelles de (u_n) parmi les points fixes de f.

5 Valeur d'adhérence d'une suite.

Définition 6. On dit qu' **un nombre** $l \in \mathbb{R}$ est une **valeur d'adhérence** de (u_n) s'il est limite d'une suite extraite de (u_n).

Remarque : une suite peut posséder plusieurs valeurs d'adhérence; par exemple pour la suite de terme général $u_n = (-1)^n$ ses valeurs d'adhérence sont 1 et -1.

Proposition 12. *Si (u_n) possède une limite, alors toute suite extraite de (u_n) a la même limite.*

Conséquences importantes de la proposition précédente.
— Si une suite admet deux sous-suites convergeant vers deux limites distinctes, alors elle diverge.
— Si une suite admet une sous-suite divergente, alors elle diverge.

Proposition 13. *Soit $l \in \overline{\mathbb{R}}$. Si les deux sous-suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ ont même limite l, alors $(u_n)_n$ a pour limite l.*

Généralisation
Si p suites extraites de u, (u_{φ_k}), $1 \leqslant k \leqslant p$ converge vers l et si $\cup_{1 \leqslant k \leqslant p} \varphi_k(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$ alors u converge vers l.