Mathématiques pour l'enseignement primaire
2021 - Polycopié version 10

Fernando Costa Jr.

November 10, 2021

1 Ensembles et notations

Un ensemble est une collection d'objets appelés ses **éléments**. Si X est l'ensemble dont les éléments sont a, b, c, on écrit

$$X = \{a, b, c\} \qquad \text{ou} \qquad X = \{a; b; c\}.$$

Observation 1. Dans les représentations ci-dessus, l'ordre dont les éléments sont affichés n'est pas prise en compte. Càd, $\{b, a, c\} = \{c, b, a\} = \{a, c, b\} = etc.$ En plus, la répétition d'un élément ne change pas l'ensemble (et donc ne sert à rien), càd $\{a, b, c\} = \{a, b, a, c, a\}$.

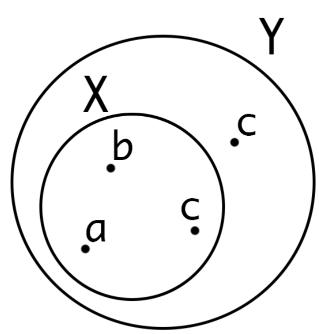
Si x est élément de X on écrit

$$x \in X \qquad (x \textit{ appartient à } X).$$

Soit A, B ensembles. Lorsque **tout** élément de A est aussi élément de B, on dit que A *est inclut dans* B ou que A *est sous-ensemble de* B. Dans ce cas, on écrit

$$A \subset B.$$

Exemple 1. Soit les ensembles $X = \{a, b, c\}$ et $Y = \{b, d, a, c\}$. Alors $X \subset Y$.



2 Les nombres entiers

Afin de compter les éléments d'un ensemble, l'homme a créé les **nombres entiers naturels** $0, 1, 2, 3$, etc. Afin de remarquer qu'une certaine quantité est manquante, l'homme a dû **étendre** ce système aux **nombres entiers négatifs** $-1, -2, -3$, etc. Le tout est appelé **nombres entiers relatifs**. L'importance de ces ensembles de nombres est telle que les mathématiciens on créé des symboles spéciaux pour les désigner.

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}.$$

Observation 2. On note que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

La notion de **nombre négatif** permet de parler de **l'opposé d'un nombre**.

Exemple 2.

- -3 est l'opposé de 3
- 5 est l'opposé de -5
- 0 est le seule nombre qui est son propre opposé

2.1 Opérations et propriétés

Depuis l'antiquité, deux opérations sont définies sur l'ensemble des nombres entiers naturels : la somme '$+$' et la multiplication '$\times$'. Le symbole de multiplication peut aussi être un point '$\cdot$'.

Exemple 3.
$2 + 3 = 5$
$2 \times 3 = 6$ ou $2 \cdot 3 = 6$.

Ces opérations s'étendent aussi aux nombres entiers relatifs.

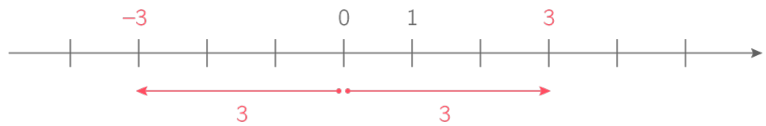
Exemple 4.
$5 + (-2) = 3$
$2 \cdot (-4) = -8$.

La somme avec un nombre entier négatif gagne le nom de **soustraction**, et on se permet d'utiliser le symbole de signe négatif '$-$' comme opérateur.

Exemple 5.
$5 + (-2) = 5 - 2$
$-3 + 4 = (-3) + 4 = 4 + (-3) = 4 - 3$.

L'opposé d'un nombre quelconque a est obtenu en multiplient ce nombre par -1, càd, $-a = (-1) \times a$.

Exemple 6. $-3 = (-1) \times 3$ est l'opposé de 3, etc.



Lorsqu'on fait la multiplication d'un même nombre plusieurs fois, il est convenable d'utiliser la notation de puissance :

$$a^2 = a \cdot a$$
$$a^3 = a \cdot a \cdot a$$
$$a^4 = a \cdot a \cdot a \cdot a$$

et ainsi de suite.

Liste de propriétés 1. Soit $a, b, c \in \mathbb{Z}$ et soit $m, n \in \mathbb{N}$ avec $m, n \geq 1$. Alors :

- $a + b = b + a$
- $(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c$
- $-(a + b) = -a - b$
- $a \cdot b = b \cdot a$
- $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c$
- $-a = (-1) \cdot a$
- $(-a) \cdot b = a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$
- $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
- $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

Observation 3. Attention !

- $(a - b) + c \neq a - (b + c)$
- $(-a)^n \neq -a^n$ (on a égalité que si n est impair)

2.2 Règles de priorité des calculs

Pour la résolution de calculs complexes il faut toujours garder un ordre précis. Ne pas mélanger multiplication soustraction... c'est ce que l'on appelle **l'ordre de priorité des calculs**.

voici plusieurs exemples explicites qui vous aideront à mieux comprendre:

Dans un calcul complexe comme celui-ci:

$$17 + 6 \cdot 7,$$

il faut commencer par la multiplication et seulement ensuite additionner car la multiplication est prioritaire.

Dans un calcul complexe comme

$$17 + \frac{6}{7},$$

il faut tout d'abord commencer par la division puis par l'addition car la division est prioritaire

Donc pour le moment nous remarquons que la division et la multiplication sont prioritaires par rapport à l'addition (mais aussi par rapport à la soustraction).

Ensuite viennent les "parenthèses" notées "( )". Elles signifient qu'il faut tout d'abord faire le calcul à l'intérieur de celles-ci.

Exemple 7.

$$17 + (6 \cdot 7) \quad \text{est différent de} \quad (17 + 6) \cdot 7.$$

Dans le premier cas on fait en premier $6 \cdot 7$ puis 17 + le résultat obtenu ce qui donne $17 + 42 = 59$

Dans le deuxième cas on additionne d'abord $17 + 6$ puis on multiplie le résultat obtenu par 7 ce qui donne $23 \cdot 7 = 161$.

Lorsque l'on trouve plusieurs "parenthèses", par exemple

$$17 + ((5 + 6) \cdot 2),$$

on calcule tout d'abord les parenthèses les plus intérieures puis on continue vers l'extérieur... jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de parenthèse. Voyons comment cela se passe avec l'exemple ci-dessus:

- on commence par $5 + 6 = 11$
- que l'on multiplie par $2 : \ 11 \cdot 2 = 22$
- puis on l'additionne à $17 : \ 17 + 22 = 39$

Alors,

$$17 + ((5 + 6) \cdot 2) = 17 + (11 \cdot 2) = 17 + 22 = 39.$$

Exemple 8. Un autre exemple plus compliqué.

$$\begin{aligned}(((((6+7)\times 3)+4)-9)/2) &= ((((13\times 3)+4)-9)/2)\\ &= (((39+4)-9)/2)\\ &= ((43-9)/2)\\ &= 34/2\\ &= 17\end{aligned}$$

Il y a des petits soucis avec les signes aussi : en effet lorsque devant une parenthèse contenant une somme il y a un signe "$-$" , il faut changer tous les signes dans la parenthèse lorsque les parenthèses sont enlevées.

Exemple 9.

$$4-(-7+2) = 4+7-2 = 9,$$

$$10-(2-3) = 10-2+3 = 8+3 = 11.$$

2.3 La division euclidienne

Il y a longtemps, le mathématicien Euclide a définit la **division euclidienne** sur les nombres entiers naturels : À deux entiers naturels a et b, $b \neq 0$, on associe de façon unique deux entiers naturels, le quotient q et le reste r, qui vérifient

- $a = b \cdot q + r$
- $r < b$.

Observation 4. Ceci est notamment ce qu'on utilise tout le temps lors d'une division : le *dividende* a est égale au *diviseur* b fois le *quotient* q plus le *reste* r.

Cette opérations fonctionne également sur les entiers relatifs, il suffit de permettre que a et b soient négatifs, le reste par contre est toujours positif et $0 \leq r < |b|$, où $|b|$ est la valeur absolue de b.

2.4 Divisibilité, nombres pairs et nombres impairs

On dit qu'un nombre a *est divisible par* b lorsque la division de a pour b est exacte (càd, a pour reste $r = 0$). Dans ce cas on dit que a est *m*ultiple de b car $a = b \cdot q + r = b \cdot q$ ("a est égal à b fois quelqu'un"). On peut dire aussi que b *divise* a.

Dans la division d'un nombre $a \in \mathbb{Z}$ par 2, le reste doit satisfaire $0 \leq r < 2$ et donc soit $r = 0$ soit $r = 1$. Lorsque $r = 0$, ce qui signifie que a est multiple de 2, on dit que a est un **nombre pair**. Si le reste est $r = 1$, on dit que a est un **nombre impair**. Autrement dit, les nombres paires sont ceux qui s'écrivent sous la forme $a = 2q$, et le nombres impairs sont ceux qui s'écrivent sous la forme $a = 2q + 1$.

Exemple 10.

- 28 est un nombre paire car la division de 28 par 2 laisse reste nul :
$$28 = 2 \cdot 14$$
- 35 est un nombre impair car la division de 35 par 2 laisse reste 1 :
$$35 = 2 \cdot 17 + 1$$

Il existent des critères de divisibilité par plusieurs nombres. Voici quelques critères très utiles:

- Un nombre est divisible par 2 s'il se termine par 0, 2, 4, 6 ou 8;
- Un nombre est divisible par 5 s'il se termine par 0 ou 5;
- Un nombre est divisible par 10 s'il se termine par 0;
- Un nombre est divisible par 3 si la somme de ses chiffres est un multiple de 3;
- Un nombre est divisible par 9 si la somme de ses chiffres est un multiple de 9;
- Un nombre est divisible par 4 si le nombre formé par les deux derniers chiffres est divisible par 4.

Observation 5. Pour savoir si un nombre est divisible par 3, on peut calculer la somme des chiffres du nombre obtenu jusqu'à ce qu'on trouve un seul chiffre. Pour 563 387 982, on calcule :

$5 + 6 + 3 + 3 + 8 + 7 + 9 + 8 + 2 = 51$

Puis on calcule $5 + 1 = 6$

6 est divisible par 3 donc 563 387 982 est divisible par 3.

2.5 Les nombres premiers et la décomposition en facteurs premiers

Un **nombre premier** est un entier naturel qui n'est divisible que par 1 et par lui même.

Exemple 11. 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, etc. sont tous des nombres premiers.

Il est intéressant d'utiliser le Crible d'Ératosthène pour trouver les premiers nombres premiers.

Les nombres premiers sont importants pour la décomposition/factorisation des nombres entiers selon le théorème.

Théorème 1 (Théorème fondamental de l'arithmétique)**.** *Tout entier strictement positif peut être écrit comme un produit de nombres premiers d'une unique façon, à l'ordre près des facteurs.*

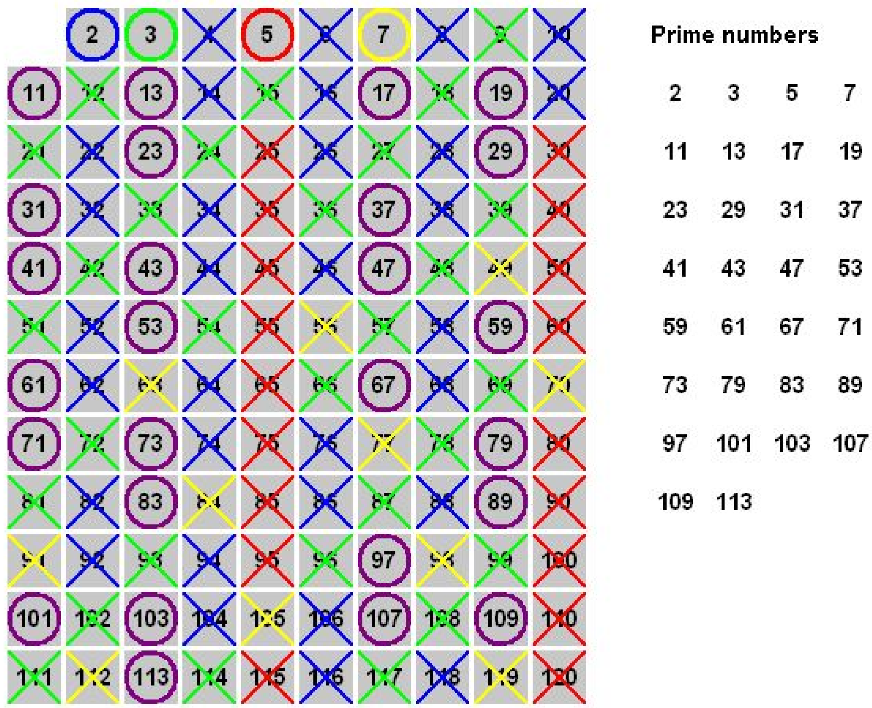


Figure 1: Crible d'Ératosthène

Exemple 12.
$56 = 2 \cdot 28 = 2 \cdot 2 \cdot 14 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7 = 2^3 \cdot 7$
$900 = 2 \cdot 450 = 2 \cdot 2 \cdot 225 = 2^2 \cdot 5 \cdot 45 = 2^2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 9 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 3^2$

Les entiers négatifs en profitent du même théorème, il suffit de séparer d'abord -1 dans la factorisation.

Exemple 13.
$-50 = (-1) \cdot 50 = (-1) \cdot 2 \cdot 25 = (-1) \cdot 2 \cdot 5^2$
$-70 = (-1) \cdot 70 = (-1) \cdot 2 \cdot 35 = (-1) \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7$

2.6 Une méthode de décomposition

On peut organiser la décomposition d'un nombre entier en facteurs premiers en faisant des divisions successives par des nombres premiers et en organisant en forme de table. À la fin on multiplie tous les premiers obtenus et on obtient la décomposition. Voyons comment cela se fait avec le nombre 60.

$$\begin{array}{r|ll}
60 & 2 & \text{on divise par } 2 \\
30 & 2 & \text{on divise par } 2 \\
15 & 3 & \text{pas divisible par 2, on divise par } 3 \\
5 & 5 & \text{pas divisible par 3, on divise par } 5 \\
1 & \multicolumn{2}{l}{\text{en arrivant à 1, on obtient } 60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5.}
\end{array}$$

Voyons un second exemple avec 264600.

$$\begin{array}{r|l}
264600 & 2 \\
132300 & 2 \\
66150 & 2 \\
33075 & 3 \\
11025 & 3 \\
3675 & 3 \\
1225 & 5 \\
245 & 5 \\
49 & 7 \\
7 & 7 \\
1 & = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7^2.
\end{array}$$

Donc, on obtient la décomposition

$$264600 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7^2.$$

Cette façon d'organiser sera utile pour le calcul du pgcd et du ppcm.

2.7 PGCD et PPCM

On commence ce paragraphe avec la définition suivante : on dit que deux nombres entiers non-nuls a et b sont **premiers entre eux** si dans leurs décompositions en facteur premiers il n'y a aucun facteur premier en commun.

2.7.1 PGCD

Le **plus grand commun diviseur (PGCD)** de deux nombres entiers non-nuls a et b est le plus grand entier qui les divise simultanément. On le note $\text{pgcd}(a; b)$.

Exemple 14.
Le PGCD de 4 et 6 est $\text{pgcd}(4; 6) = 2$
$\text{pgcd}(9; 12) = 3$
$\text{pgcd}(12; 16) = 4$
$\text{pgcd}(16; 21) = 1$.

Comment calculer : on écrit les décompositions en nombres premiers de a et de b, puis on garde les facteurs en commun et on les multiplie.

Exemple 15.
$9 = \mathbf{3} \cdot 3$, $12 = \mathbf{3} \cdot 4$ et donc 3 est le PGCD de 9 et 12
$12 = \mathbf{2} \cdot \mathbf{2} \cdot 3$ et $16 = \mathbf{2} \cdot \mathbf{2} \cdot 2 \cdot 2$ et donc $2 \cdot 2 = 4$ est le PGCD de 12 et 16.

Liste de propriétés 2. Soit a, b, c des entiers naturels avec c non-nul et soit p un nombre premier.

- a ainsi que b sont divisibles par $\text{pgcd}(a; b)$
- $\text{pgcd}(c \cdot a; c \cdot b) = c \cdot \text{pgcd}(a; b)$
- Si a est diviseur de b alors $\text{pgcd}(a; b) = a$
- Deux nombres a et b sont premiers entre eux ssi $\text{pgcd}(a; b) = 1$.

2.7.2 PPCM

Le **plus petit commun multiple (PPCM)** de deux entiers non-nuls a et b est le plus petit entier strictement positif qui soit multiple de ces deux nombres. On le note $\text{ppcm}(a; b)$.

Exemple 16.
Le PPCM de 4 et 6 est $\text{ppcm}(4; 6) = 12$
$\text{ppcm}(9; 12) = 36$
$\text{ppcm}(3; 5) = 15$.

Comment calculer : on écrit les décompositions en nombres premiers de a et de b, puis on garde tous les premiers élevés aux plus grande puissances qui apparaissent ces décompositions, et on multiplie tout.

Exemple 17. Prenons comme exemple les entiers 45 et 48. Leurs décompositions sont

$$45 = 3^2 \cdot 5 \qquad \text{et} \qquad 48 = 2^4 \cdot 3.$$

Les nombre premiers qui apparaissent dans ces décompositions sont 2, 3 et 5. La plus grande puissance de 2 qui apparaît est 2^4, on garde. La plus grande puissance de 3 qui apparaît est 3^2, on garde. La plus grande puissance de 5 qui apparaît est $5^1 = 5$, on garde. Le PPCM est le produit de ce qu'on a gardé: $\text{ppcm}(45; 48) = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 = 720$.

Liste de propriétés 3. Soit a, b, c des entiers naturels non-nuls.

- a ainsi que b sont multiples de $\text{ppcm}(a; b)$
- $\text{ppcm}(c \cdot a; c \cdot b) = c \cdot \text{ppcm}(a; b)$
- Si a est multiple de b, alors $\text{pgcd}(a; b) = a$
- Si a et b sont premiers entre eux, alors $\text{pgcd}(a; b) = a \cdot b$.

2.7.3 Une égalité utile et un mot sur les nombres négatifs

Pour tous a, b entiers naturels non-nuls,

$$\text{pgcd}(a;b) \cdot \text{ppcm}(a;b) = ab,$$

c'est-à-dire,

$$\text{pgcd}(a;b) = \frac{ab}{\text{ppcm}(a;b)} \qquad \text{et} \qquad \text{ppcm}(a;b) = \frac{ab}{\text{pgcd}(a;b)}.$$

Observation 6. Si l'on veut calculer le PGCD ou le PPCM de n'importe quels nombres entiers non-nuls on peut, il suffit d'oublier leur signe lorsqu'ils sont négatifs. Par exemple, $\text{ppcm}(-5, 12) = \text{ppcm}(5, 12) = 60$.

2.8 Méthodes de calcul

On organisant les diviseurs de deux nombres, comme on a fait dans le paragraphe 2.6 mais avec deux en même temps, on peut calculer facilement le PGCD et le PPCM. Voyons comment le faire avec donnés auparavant.

On commence par calculer $\text{pgcd}(4;6)$.

$$\begin{array}{r|l} 4;6 & 2 \\ 2;3 & \text{il n'est plus possible de diviser par un même premier} \end{array}$$

Donc $\text{pgcd}(4;6) = 2$. Si l'on continue les divisions on peut trouver le $\text{ppcm}(4;6)$.

$$\begin{array}{r|ll} 4;6 & 2 & \\ 2;3 & 2 & \text{ici on divise par 2 mais on répète 3 car il n'est pas divisible par 2} \\ 1;3 & 3 & \text{ici on divise par 3 mais on répète 1 car il n'est pas divisible par 3} \\ 1;1 & \multicolumn{2}{l}{\text{on s'arrête ici et on obtient } 2 \cdot 2 \cdot 3} \end{array}$$

et donc,

$$\text{ppcm}(4;6) = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12.$$

Voyons comment calculer $\text{pgcd}(9;12)$ et $\text{ppcm}(9;12)$

$$\begin{array}{r|l} 9;12 & 3 \\ 3;4 & \Rightarrow \text{pgcd}(9;12) = 3 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 9;12 & 3 \\ 3;4 & 3 \\ 1;4 & 2 \\ 1;2 & 2 \\ 1;1 & \Rightarrow \text{ppcm}(9;12) = 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 36 \end{array}$$

Voyons comment calculer $\text{pgcd}(12;16)$ et $\text{ppcm}(12;16)$

$$\begin{array}{r|l} 12;16 & 2 \\ 6;8 & 2 \\ 3;4 & \Rightarrow \text{pgcd}(12;16) = 2 \cdot 2 = 4 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 12;16 & 2 \\ 6;8 & 2 \\ 3;4 & 2 \\ 3;2 & 2 \\ 3;1 & 3 \\ 1;1 & \Rightarrow \text{ppcm}(12;16) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 48 \end{array}$$

Voyons comment calculer pgcd(16; 21) et ppcm(16; 21).

$$16;21 \;\Big|\; \text{pas de diviseurs} \Rightarrow \mathrm{pgcd}(16;21) = 1$$

$$\begin{array}{r|lll}
16;21 & 2 & & \\
8;21 & 2 & & \\
4;21 & 2 & & \\
2;21 & 2 & & \\
1;21 & 3 & & \\
1;7 & 7 & & \\
1;1 & \mathrm{ppcm}(16;21) & = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 7 \\
 & & = 16\cdot 21 = 336.
\end{array}$$

2.9 Le nombre de diviseurs d'un entier

Soit n un nombre entier naturel non-nul. On considère la question :

Combien y a-t-il de diviseurs (positifs) de n?

Si n est un nombre premier, on sait que les seules diviseurs sont 1 et lui-même. Donc, dans ce cas, n a 2 diviseurs.

Si n est le produit de deux nombres premiers p et q, càs, si $n = pq$, alors les diviseurs de n sont $1, p, q$ et $p + 1$, soit 4 diviseurs. Heureusement il existe une formule générale pour compter les nombre de diviseurs positifs d'un nombre. Voyons deux exemples.

Proposition 1. *On suppose que la décomposition de n en facteur premiers est de la forme*

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} \cdots p_m^{\alpha_m}$$

Alors, le nombre de divierus positifs de n est égal a

$$(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)(\alpha_3 + 1)\cdots(\alpha_m + 1).$$

Exemple 18. Considérons $n = 60$. Alors

$$60 = 2\cdot 2\cdot 3\cdot 5 = 2^2\cdot 3^1\cdot 5^1.$$

Alors, le nombre de diviseurs de 60 est

$$(2 + 1)(1 + 1)(1 + 1) = 3\cdot 2\cdot 2 = 12.$$

En effet, ses diviseurs sont

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60.$$

Exemple 19. Considérons $n = 264600$. Alors

$$264600 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 7 = 2^3\cdot 3^3\cdot 5^2\cdot 7^2.$$

Alors, le nombre de diviseurs de 264600 est

$$(3 + 1)(3 + 1)(2 + 1)(2 + 1) = 4\cdot 4\cdot 3\cdot 3 = 144 \text{ diviseurs de } 264600.$$

3 Les nombres rationnels

Euclide a bien défini la division euclidienne, mais le concept général de division existait bien avant. Les nombres rationnels sont les nombres obtenus par le quotient de deux entiers, à la condition que le dénominateur soit **non-nul**. Soit $a, b \in \mathbb{Z}$ avec $b \neq 0$. Alors le quotient du *numérateur* a par le *dénominateur* b s'écrit

$$\frac{a}{b}.$$

Les **nombres rationnels**, noté $\mathbb{Q}$, est l'ensemble de tous les nombres qui peuvent être écrits de cette façon.

Exemple 20. $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4} \in \mathbb{Q}$.

Observation 7. Si $b = 1$, alors $\frac{a}{b}$ représente la division de a par 1 et donc est égale a a, càd,

$$\frac{a}{1} = a \in \mathbb{Z}.$$

Par conséquent, tous les nombres entiers relatifs sont aussi des nombres rationnels, càd, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Voici les opérations/manipulations qu'on peut faire sur $\mathbb{Q}$.

Liste de propriétés 4. Soit $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ avec b et d non nuls.

- $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$ (Somme de fractions à dénominateur commun)
- $\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}$ (Soustraction de fractions à dénominateur commun)
- $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+cb}{bd}$ (Somme de fractions à dénominateur différents)
- $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-cb}{bd}$ (Soustraction de fractions à dénom. différents)
- $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ (Multiplication de fractions)
- $c \times \frac{a}{b} = \frac{ac}{b}$ (Multiplication de fraction par nombre)
- $\frac{1}{d} \times \frac{a}{b} = \frac{a}{bd}$ (Multiplication de fraction par l'inverse d'un nombre)
- $-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$ (Changement de signe dans une fraction)
- $\frac{ad}{bd} = \frac{a}{b}$ (Simplification d'une fraction)
- $\frac{1}{\frac{b}{d}} = \frac{d}{b}$ (Inversion d'une fraction)

- $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{d}{c}$, si $c \neq 0$ (Fraction de fractions)
- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$, où $n \in \mathbb{N}$ (Puissance d'une fraction)
- $\dfrac{b^n}{b^m} = b^{n-m}$, où $n, m \in \mathbb{N}$ (Fraction de puissances de même base)
- $b^{-n} = \dfrac{1}{b^n}$, où $n \in \mathbb{N}$ (Puissance négative d'un nombre)
- $\left(\dfrac{b}{d}\right)^{-n} = \left(\dfrac{d}{b}\right)^n$, où $n \in \mathbb{N}$ (Puissance négative d'une fraction)

3.1 Fractions équivalentes et simplification de fractions

On dit que deux fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ sont équivalentes quand elles sont égales. À partir d'une fraction donnée $\frac{a}{b}$, on obtent toutes ses fractions équivalentes en multipliant son numérateur et son dénominateur par un même entier non-nul c, càd, sont toutes équivalentes à $\frac{a}{b}$ les fractions

$$\frac{a}{b}, \frac{2a}{2b}, \frac{3a}{3b}, \frac{4a}{4b}, etc.$$

Exemple 21.

- Sont équivalentes à $\frac{1}{2}$ les fractions : $\frac{2}{4} = \frac{2 \cdot 1}{2 \cdot 1}$, $\frac{3}{6} = \frac{3 \cdot 1}{3 \cdot 2}$, $\frac{5}{10} = \frac{5 \cdot 1}{5 \cdot 2}$, etc.
- Sont équivalentes à $\frac{3}{2}$ les fractions : $\frac{6}{4} = \frac{2 \cdot 3}{2 \cdot 2}$, $\frac{9}{6} = \frac{3 \cdot 3}{3 \cdot 2}$, $\frac{15}{10} = \frac{5 \cdot 3}{5 \cdot 2}$, etc.
- Sont équivalentes à $5 = \frac{5}{1}$ les fractions : $\frac{10}{2} = \frac{2 \cdot 5}{2 \cdot 1}$, $\frac{15}{3} = \frac{3 \cdot 5}{3 \cdot 1}$, $\frac{25}{5} = \frac{5 \cdot 5}{5 \cdot 1}$, ...

On "simplifie" une fraction donnée si on la remplace par une autre fraction qui est équivalente à la fraction de départ.

Exemple 22.

- $\frac{1}{2}$ est la version simplifiée des fractions $\frac{2}{4}, \frac{3}{6}$ et $\frac{5}{10}$.
- $\frac{3}{2}$ est la version simplifié des fractions $\frac{6}{4}, \frac{9}{6}$ et $\frac{15}{10}$.

Afin de simplifier une fraction, on divise numérateur et dénominateur par un même nombre entier qui est diviseur commun entre le numérateur et le dénominateur.

Exemple 23. Considérons $\frac{16}{18}$. Puisque 2 est diviseur commun de 16 et 20 on peut simplifier cette fraction de la façon suivante:

$$\frac{16}{18} = \frac{16 \div 2}{20 \div 2} = \frac{8}{10}.$$

Dans l'exemple précédent, on a simplifié $\frac{16}{18}$ en obtenant $\frac{8}{10}$. Néanmoins, il est possible de simplifier encore plus :

$$\frac{16}{18} = \frac{16 \div 2}{20 \div 2} = \frac{8}{10} = \frac{8 \div 2}{10 \div 2} = \frac{4}{5}.$$

Maintenant, il n'est plus possible de simplifier cette fraction, car 4 et 5 n'ont plus de diviseur communs. En effet, 4 et 5 son des nombres premiers entre eux. Nous avons, donc, trouvé la version la plus simplifié possible de la fraction $\frac{16}{18}$, qui est $\frac{4}{5}$. Cette dernière est appelée **fraction irréductible**. Toute fraction peut être transformée en une fraction équivalente irréductible.

3.2 Comment réduire deux fractions au même dénominateur

Afin de calculer la somme de deux fractions à dénominateurs différents, il est plus simple de "réduire" ses fractions au même dénominateurs. Cela se fait en deux étapes :

- Il nous faut trouver tout d'abord un multiple des dénominateurs, le plus petit multiple commun PPCM.
- On transforme chaque fraction pour une autre équivalente, par dénominateur le PPCM. Pour cela on multiplie les deux membres de chaque fraction par le nombre résultat de diviser le PPCM entre le dénominateur.

Exemple 24. Considérons la somme $\frac{5}{6} + \frac{7}{4}$. On a $\text{ppcm}(6;4) = 12$. Il faut donc multiplier $\frac{5}{6}$ par $\frac{2}{2}$ (car $12 \div 6 = 2$) et multiplier $\frac{7}{4}$ par $\frac{3}{3}$ (car $12 \div 4 = 3$). On trouve donc

$$\frac{5}{6} + \frac{7}{4} = \frac{5 \times 2}{6 \times 2} + \frac{7 \times 3}{4 \times 3} = \frac{10}{12} + \frac{21}{12} = \frac{10 + 21}{12} = \frac{31}{12}.$$

4 Les nombre décimaux

4.1 Les fractions décimales

Une fraction décimale est une fraction dont le dénominateur est

$$1\ ;10\ ;100\ ;1000\ ;10000\ ;\ \text{etc.}$$

4.1.1 Les dixièmes

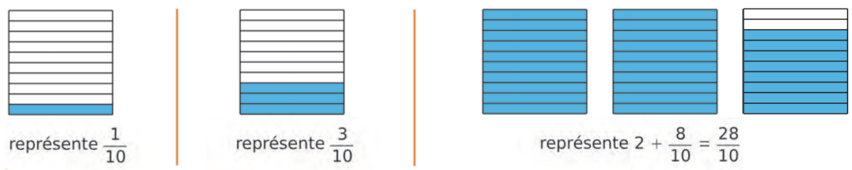
Quand on coupe une unité en 10 parts égales, on obtient des dixièmes. Un dixième peut se noter $\frac{1}{10}$ ou $0,1$.

Sachant que dans une unité, il y a 10 dixièmes, on peut écrire

$$10 \times \frac{1}{10} = \frac{10}{10} = 1.$$

De la même façon, on peut écrire

$$10 \times 0,1 = 1.$$



4.1.2 Les centièmes

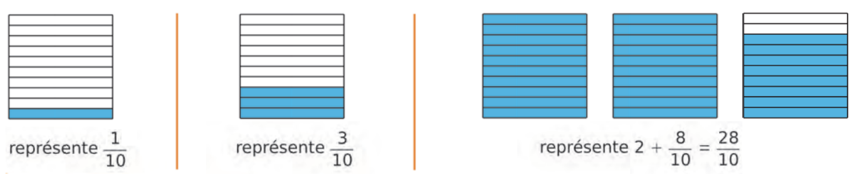
Quand on coupe une unité en 100 parts égales, on obtient des **centièmes**. Un centième peut se noter $\frac{1}{100}$ ou $0,01$.

Sachant que dans une unité, il y a 100 **centièmes**, on peut écrire

$$100 \times \frac{1}{100} = \frac{100}{100} = 1.$$

De la même façon, on peut écrire

$$100 \times 0,01 = 1.$$



4.1.3 Les millièmes

Quand on coupe une unité en 1000 parts égales, on obtient des **millièmes**. Un millième peut se noter $\frac{1}{1000}$ ou $0,001$.

Sachant que dans une unité, il y a 1000 millièmes, on peut écrire

$$1000 \times \frac{1}{1000} = \frac{1000}{1000} = 1.$$

De la même façon, on peut écrire

$$1000 \times 0,001 = 1.$$

4.2 D'autres nombres décimaux

Un nombre qui peut s'écrire sous la forme d'une fraction décimale est appelé un nombre décimal. Un **nombre décimal** possède aussi une écriture décimale dans laquelle la virgule permet de repérer le chiffre des unités. Le tableau ci-dessous “prolonge” le tableau pour les nombres entiers.

centaines de mille	dizaines de mille	unités de mille	centaines	dizaines	unités	dixièmes	centièmes	millièmes	dix-millièmes
100 000	10 000	1 000	100	10	1	$\frac{1}{10}$ ou 0,1	$\frac{1}{100}$ ou 0,01	$\frac{1}{1\,000}$ ou 0,001	$\frac{1}{10\,000}$ ou 0,0001
			3	2	7 ,	6	5		

partie entière — Place de la virgule — partie décimale

Exemple 25. $327,65$ est un nombre décimal car il peut s'écrire $\frac{32765}{100}$.

- Sa partie entière est 327, sa partie décimale est 0,65;
- Son chiffre des dizaines est 2, son chiffre des dixièmes est 6, etc.;
- Son nombre de dizaines est 32.

On ne change pas la valeur d'un nombre si l'on supprime ou si l'on ajoute des zéros à gauche de sa partie entière ou à droite de sa partie décimale. Ce sont les **zéros facultatifs** (parfois appelés zéros inutiles).

Exemple 26.

- $015,89 = 15,89$ (on a supprimé un zéro à gauche de la partie entière);
- $13,1000 = 13,1$ (on a supprimé des zéros à droite de la partie décimale);
- $14,0 = 14$ (on a supprimé un zéro à droite de la partie décimale et donc la virgule).

Observation 8. Un nombre entier est un nombre décimal particulier : sa partie décimale est nulle (c'est-à-dire qu'elle vaut 0). Par exemple le nombre entier 5 est un nombre décimal car il peut s'écrire $\frac{15}{1}$ ou $15,0$.

Un nombre décimal peut s'écrire de plusieurs façons différentes. Voyons un exemple.

Exemple 27. Écrivons $259,38$ de différentes façons.

- Son écriture décimale est
$$259,38.$$

- On peut le décomposer :

$$259,38 = 2 \times 100 + 5 \times 10 + 9 \times 1 + 3 \times 0,1 + 8 \times 0,01.$$

- On peut l'écrire sous forme de fraction décimale :

$$\frac{25938}{100} = \frac{259380}{1000} = \frac{2593800}{10000}.$$

- On peut l'écrire comme la somme de sa partie entière et de sa partie décimale :

$$259,38 = 259 + 0,38.$$

- On peut l'écrire comme la somme d'un entier et d'une fraction décimale inférieure à 1 :

$$259,38 = 259 + \frac{38}{100}$$

ou on peut aussi décomposer

$$259,38 = 259 + \frac{3}{10} + \frac{8}{100}.$$

Observation 9. Pas tous les nombres rationnels sont décimaux. En effet, les nombres décimaux ont une représentation décimale **finie**, mais il existe des nombres rationnels dont la représentation décimale n'est pas finie. Par exemple,

$$\frac{1}{3} = 0.333333...$$

n'est pas un nombre décimal mais il est bien un nombre rationnel.

5 Multiplication décimale

5.1 Multiplication d'un nombre décimal par un nombre entier

Exemple 28. Un sachet de bulbes de tulipes vaut 12,65 €. Quel est le prix de 5 sachets?

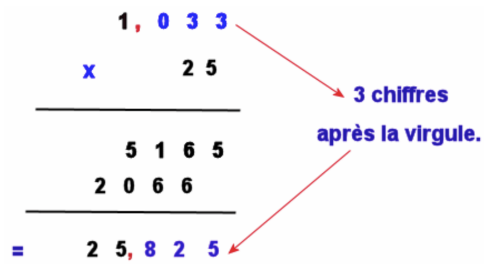
Si j'effectue cette opération avec la calculette , je trouve $12,65 \times 5 = 63,25$€. Posons la multiplication pour comprendre la démarche :

Étape 1 : J'effectue la multiplication comme s'il n'y avait pas de virgule.

Étape 2 : Je place la virgule de façon à ce qu'il y ait autant de décimales au résultat que dans le multiplicande.

Exemple 29. Un litre de lait pèse 1,033 kg. Quel est le poids de 25 litres ?

Posons la multiplication :



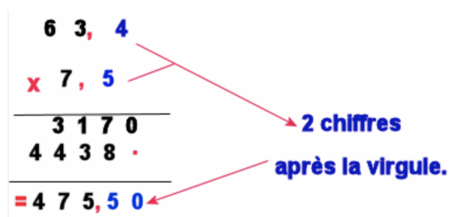
Étape 1 : J'effectue la multiplication comme s'il n'y avait pas de virgule.

Étape 2 : Je place la virgule de façon à ce qu'il y ait autant de décimales au résultat que dans le multiplicande (ici 3).

5.2 Multiplication de deux nombres décimaux

Exemple 30. Dans une papeterie, une boîte de stylos coûte 63,40€. Combien coûte 7,5 boîtes de stylos ?

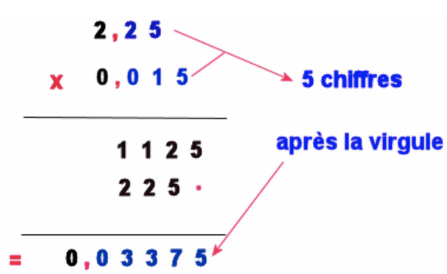
Posons la multiplication :



Étape 1 : J'effectue la multiplication comme s'il n'y avait pas de virgule.

Étape 2 : Je place la virgule de façon à ce qu'il y ait autant de décimales au résultat qu'au total des chiffres après la virgule du multiplicateur et du multiplicande.

Exemple 31. Poser le produit de 2,25 par 0,015.



Étape 1 : J'effectue la multiplication comme s'il n'y avait pas de virgule.

Étape 2 : Je place la virgule de façon à ce qu'il y ait autant de décimales au résultat qu'au total des chiffres après la virgule du multiplicateur et du multiplicande.

Division décimale

FICHE DE COURS

Introduction :

L'objectif de ce cours est de revoir la division décimale qui a déjà été abordée à l'école primaire et de découvrir quelques propriétés de la division.

Dans un premier temps, nous allons revoir la méthode qui permet d'effectuer une division décimale en montrant quelques exemples. Dans un deuxième temps, nous verrons les propriétés des divisions particulières que sont celles par 10, 100 ou $1\ 000$. Enfin, dans un troisième temps, nous verrons des exemples d'exercices dont la résolution nécessite une division décimale.

1 La division décimale

a. Méthode

1. La division d'un nombre décimal par un nombre entier commence comme la division euclidienne : on doit diviser la partie entière du nombre décimal par le nombre entier.
2. Une fois qu'on a trouvé le dernier reste de cette division euclidienne et qu'on est au niveau de la virgule du nombre décimal, on ajoute une virgule au quotient et on abaisse le chiffre après la virgule du dividende.
3. On calcule ensuite chaque chiffre après la virgule du quotient en abaissant à chaque fois le nombre suivant du dividende au reste trouvé, ou un 0 s'il n'y en a pas.

Exemple

Effectuons la division décimale du nombre décimal $21,6$ par 5.

1. On effectue d'abord la division euclidienne de 21 par 5.
   - On obtient le quotient 4 et le reste est 1.
2. On note maintenant la virgule après le quotient 4 et on abaisse le chiffre 6 après le reste 1.
3. Dans 16, il y a 3 fois 5 et il reste 1.
   - On abaisse maintenant le chiffre 0 après le reste 1.
   - Dans 10, il y a 2 fois 5 et il reste 0.

$$\begin{array}{r|l}
21{,}60 & 5 \\ \cline{2-2}
-20 & \\ \cline{1-1}
16 & 4{,}32 \\
-15 & \\ \cline{1-1}
10 & \\
-10 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

À retenir

La **division décimale** d'un nombre a (dividende) par un nombre b non nul (diviseur) permet de calculer le nombre qui, multiplié par b, donne a : c'est le **quotient** de a par b.

$a \div b = ?$ signifie la même chose que $b \times ? = a$

On peut obtenir une **valeur exacte** de ce quotient ou une **valeur approchée**.

→ Dans l'exemple précédent, $21,60 \div 5 = 4,32$ signifie la même chose que $5 \times 4,32 = 21,60$.

Exemple

Effectuons la division décimale du nombre décimal $34,91$ par 7.

1. On effectue d'abord la division euclidienne de 34 par 7.
   - On obtient le quotient 4 et le reste est 6.
2. On note maintenant la virgule après le quotient 4 et on abaisse le chiffre 9 après le reste 6.
3. Dans 69, il y a 9 fois 7 $(9 \times 7 = 63)$ et il reste 6.
   - On abaisse ensuite le chiffre 1 après le reste 6.
   - Dans 61, il y a 8 fois 7 $(8 \times 7 = 56)$ et il reste 5.
   - On abaisse maintenant un 0 après le reste 5.
   - Dans 50, il y a 7 fois 7 $(7 \times 7 = 49)$ et il reste 1.
   - On abaisse un autre 0 après le reste 1.
   - Dans 10, il y a 1 fois 7 et il reste 3.

$$
\begin{array}{rrrrrrr|l}
3 & 4, & 9 & 1 & 0 & 0 & & 7 \\ \cline{8-8}
-2 & 8 & & & & & & 4,9871 \\ \cline{1-2}
 & 6 & 9 & & & & & \\
 & -6 & 3 & & & & & \\ \cline{2-3}
 & & 6 & 1 & & & & \\
 & & -5 & 6 & & & & \\ \cline{3-4}
 & & & 5 & 0 & & & \\
 & & & -4 & 9 & & & \\ \cline{4-5}
 & & & & 1 & 0 & & \\
 & & & & - & 7 & & \\ \cline{5-6}
 & & & & & 3 & &
\end{array}
$$

On s'aperçoit que la division **ne s'arrête pas**.

→ On ne peut donc obtenir ici qu'une **valeur approchée** du résultat.

- La **valeur approchée** au **millième** près **par défaut** est $4,987$ et celle **par excès** est $4,988$.
- La **valeur approchée** au **centième** près **par défaut** est $4,98$ et celle **par excès** est $4,99$.
- La **valeur approchée** au **dixième** près **par défaut** est $4,9$ et celle **par excès** est $5,0$ $(= 5)$.

b. Résoudre une division décimale à l'aide du calcul mental

Certaines divisions peuvent être calculées mentalement. On a donc intérêt à les calculer de tête plutôt que de poser l'opération.

$26 \div 4 = 24 \div 4 + 2 \div 4 = 6 + 0,5 = 6,5$

→ Diviser 26 par 4 revient à diviser 24 par 4 (ce qui donne 6) et 2 par 4 (ce qui donne $0,5$).

$15 \div 6 = 12 \div 6 + 3 \div 6 = 2 + 0,5 = 2,5$

→ Diviser 15 par 6 revient à diviser 12 par 6 (ce qui donne 2) et 3 par 6 (ce qui donne $0,5$).

$33 \div 4 = 32 \div 4 + 1 \div 4 = 8 + 0,25 = 8,25$

→ Diviser 33 par 4 revient à diviser 32 par 4 (ce qui donne 8) et 1 par 4 (ce qui donne $0,25$).

$24,8 \div 2 = 24 \div 2 + 0,8 \div 2 = 12 + 0,4 = 12,4$

→ Diviser $24,8$ par 2 revient à diviser 24 par 2 (ce qui donne 12) et $0,8$ par 2 (ce qui donne $0,4$).

Astuce

Pour les divisions décimales du type $7,8 \div 6$, on peut diviser 78 par 6 (ce qui donne 12), puis diviser cette valeur par 10 car $7,8$ est 10 fois plus petit que 78.
On obtient ainsi : $7,8 \div 6 = 1,2$

c. Résoudre une division décimale à la calculatrice

Il faut aussi savoir calculer le résultat d'une division à la calculatrice.

On pourra obtenir :

- un résultat exact : $\boxed{21,60 \div 5 = 4,32}$
- ou un résultat approché : $\boxed{34,91 \div 7 = 4,987142857}$

2 Divisions par 10, 100 et $1\ 000$

a. Propriété

Propriété

- Diviser un nombre décimal **par** 10 revient à décaler la virgule de ce nombre **d'un rang** vers la gauche.
- Diviser un nombre décimal **par** 100 revient à décaler la virgule de ce nombre **de deux rangs** vers la gauche.
- Diviser un nombre décimal **par** $1\ 000$ revient à décaler la virgule de ce nombre **de trois rangs** vers la gauche.

Attention

Pour appliquer cette règle, on peut avoir besoin de rajouter des zéros au nombre de départ.

b. Exemples

Exemple

- $24,6 \div 10 = 2,46$ → Il faut décaler la virgule d'**un rang** vers la gauche.
- $192,7 \div 100 = 1,927$ → Il faut décaler la virgule de **deux rangs** vers la gauche.
- $38,5 \div 1\ 000 = 0,0385$ → Il faut décaler la virgule de **trois rangs** vers la gauche en rajoutant des 0.

3 Exercices utilisant la division décimale

Nous allons voir maintenant quelques exemples dans lesquels une division décimale est nécessaire pour résoudre l'exercice. Ici, nous utiliserons la calculatrice pour effectuer le calcul.

Exemple

1

Pour des travaux chez un particulier, un artisan a facturé 975 € de main d'œuvre.

Sachant qu'il a travaillé 30 heures pour ces travaux, quel est son tarif horaire ?

Pour 30 heures de travail, l'artisan a facturé 975 €.

Son tarif horaire en euros est donc de $975 \div 30$

À la calculatrice, on trouve : $\boxed{975 \div 30 = 32,5}$

Le résultat peut aussi être trouvé de tête en remarquant que :

$975 \div 30 = 900 \div 30 + 60 \div 30 + 15 \div 30 = 30 + 2 + 0,5 = 32,5$

→ Le tarif horaire de cet artisan est donc de $32,50$ €.

2

Ce même artisan fait un plein d'essence. Il paye $79,75$ € pour 55 litres de gasoil.

Quel prix paye-t-il au litre de gasoil ?

Pour 55 litres de gasoil, il paye $79,75$ €.

Un litre de gasoil coûte donc, en euros, $79,75 \div 55$

À la calculatrice, on trouve : $\boxed{79,75 \div 55 = 1,45}$

→ Le prix du gasoil est donc de $1,45$ €/L.

3

Ce même artisan s'arrête acheter des pêches dans une supérette. Il paye $3,25$ € pour $1,250$ kilos de pêches.

Quel est le prix au kilogramme de ces pêches ?

Pour $1,250$ kilos de pêches, il paye $3,25$ €.

Un kilogramme de pêches coûte donc, en euros, $3,25 \div 1,250$

À la calculatrice, on trouve : $\boxed{3,25 \div 1,25 = 2,60}$

→ Le prix au kilogramme des pêches est donc de $2,60$ €.

Conclusion :

Dans ce cours, nous avons vu la méthode pour poser et effectuer une division décimale, puis le cas particulier des divisions décimales par 10, 100 ou $1\,000$ où il s'agit de décaler la virgule du dividende de 1, 2 ou 3 rangs vers la gauche pour obtenir le résultat.

Nous avons également vu que certaines divisions décimales pouvaient être calculées de tête, et donc ne nécessitaient pas de poser la division.

Concernant le résultat d'une division décimale, nous avons pu remarquer qu'elle pouvait « tomber juste » ou que nous pouvions donner une valeur approchée du résultat.

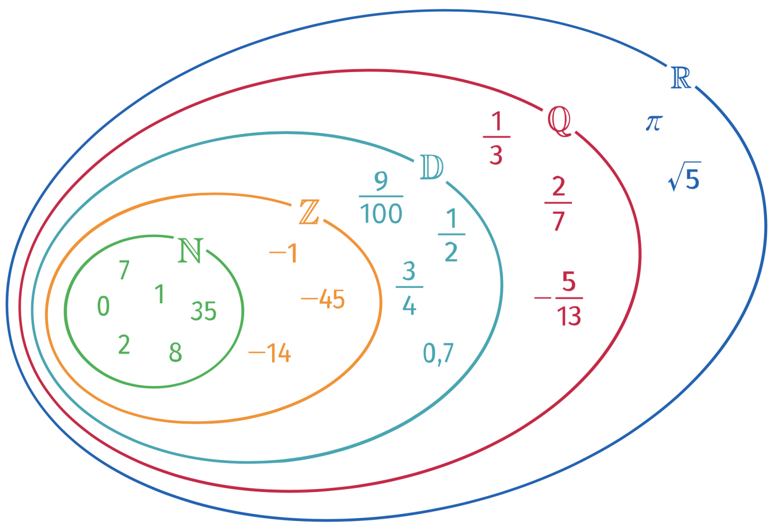
6 Les nombres réels

Pas tous les nombres sont rationnels ! En effet, il existe des nombres que ne peuvent pas être obtenus par la division de deux nombres entiers. Par exemple,

$$\sqrt{2}$$

n'est pas un nombre rationnel.

Tous les nombres qui ne sont pas rationnels sont appelés **nombres irrationnels**. L'ensemble de tous les nombres les nombres qu'on a vus jusqu'ici, rationnels et irrationnels, est noté $\mathbb{R}$ est appelé l'ensemble des **nombres réels**.



Les ensembles numériques

7 Un peut de pourcentage

7.1 Pourcentage

Un pourcentage est l'**écriture** mathématique **de la comparaison** d'un nombre **avec 100**.

- a étant positif, on écrit $a\%$ ou $\frac{a}{100}$;
- $a\%$ est aussi appelé un **taux de pourcentage**.

Exemple 32. Jean a été élu délégué avec 22 voix sur 50. Le rapport de voix avec lequel il a été élu est $\frac{22}{50}$; soit en pourcentage : $\frac{44}{100}$ (ou 44%).

Règle : Calculer $a\%$ d'un nombre revient à le multiplier par $\frac{a}{100}$.

Exemple 33. Au campus aujourd'hui il y a 3125 étudiant.es, 32% d'entre eux ne savent pas calculer les pourcentages. Cela correspond à combien de personnes ?

Réponse : 32% de 3125 correspond à

$$3125 \times \frac{32}{100} = \frac{3125 \times 32}{100} = \frac{100000}{100} = 1000.$$

Donc 1000 étudiant.es ne savent pas calculer les pourcentages.

Observation 10. Calculer ou appliquer un pourcentage, c'est utiliser la proportionnalité. Dans plusieurs situations on peut donc utiliser une règle de trois simple.

Exemple 34. Pendant un vide-greniers, Zoé a réussi à vendre 54 de ses 72 bandes dessinées. Quel pourcentage de ses bandes dessinées a-t-elle vendues ?

Réponse : On cherche le pourcentage x de bandes dessinées vendues par Zoé. 72 correspond à 100%, 54 correspond à x.

$$\begin{aligned} 72 &\longrightarrow 100\% \\ 54 &\longrightarrow x \end{aligned}$$

d'où,

$$x = \frac{54 \times 100}{72} = 75\%.$$

Zoé a donc vendu 75% de ses bandes dessinées.

7.2 Variation en pourcentage

Règle : Pour augmenter une quantité d'un pourcentage $t\%$, il suffit de la multiplier par : $1 + \frac{t}{100}$. Pour diminuer une quantité d'un pourcentage $t\%$, il suffit de la multiplier par $1 - \frac{t}{100}$.

Exemple 35. Si les prix augmentent de 200%, cela signifie que les prix ont triplé ; en effet les nouveaux prix Q sont égaux aux anciens P multipliés par $(1 + \frac{200}{100})$, donc

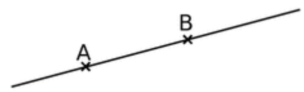
$$Q = P \times \left(1 + \frac{200}{100}\right) = P \times (1 + 2) = P \times 3 = 3P.$$

Premiers éléments de géométrie euclidienne

(Définitions et Propriétés)

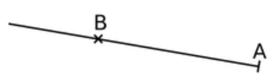
I- Les tracés

Droite : Une droite est un tracé rectiligne, sans début ni fin.



On note (AB)

Demi droite : Une demi-droite est un tracé rectiligne possède une origine mais se poursuit à l'infini.

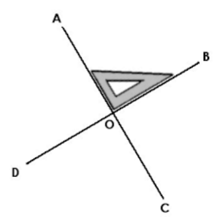


On note [AB)

Segment : Le segment est un tracé rectiligne possédant deux extrémités définies.

On note [AB]

Droites perpendiculaires : Deux droites sont perpendiculaires si elles forment un angle droit (90°).



On note $AC \perp BD$

▪ **Propriété 1** : Si deux droites sont parallèles et si une troisième droite est perpendiculaire à l'une d'elles alors elle est perpendiculaire à l'autre

▪ **Propriété 2** : Si une droite est la médiatrice d'un segment alors elle est perpendiculaire à ce segment en son milieu.

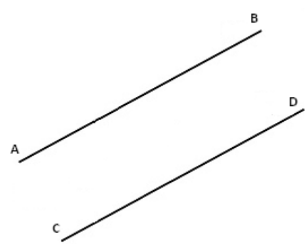
▪ **Propriété 3 :** Si une droite passant un sommet d'un triangle est une hauteur du triangle alors elle est perpendiculaire au côté opposé à ce sommet

▪ **Propriété 4 :** Si un triangle est rectangle alors il a deux côtés perpendiculaires

▪ **Propriété 5 :** Si un quadrilatère est un rectangle alors ses côtés consécutifs sont perpendiculaires

▪ **Propriété 6 :** Si un quadrilatère est un losange alors ses diagonales sont perpendiculaires.

Droites parallèles : Deux droites sont parallèles si elles sont confondues ou si elles n'ont aucun point en commun (elles ne seront jamais concourantes). Si elles ne sont pas confondues, on dit parfois qu'elles sont strictement parallèles.



On note AB // CD

▪ **Propriété 1** : Si deux droites sont parallèles à une même troisième alors elles sont parallèles entre elles.

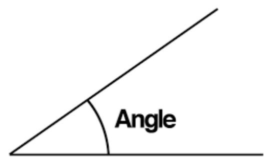
▪ **Propriété 2** : Si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième alors elles sont parallèles.

▪ **Propriété 3 :** Si un quadrilatère est un parallélogramme alors ses côtés opposés sont parallèles.

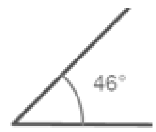
▪ **Propriété 4 :** Si deux droites sont symétriques par rapport à un point alors elles sont parallèles.

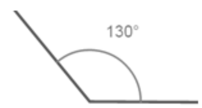
II- Les angles

Angle : Un angle est une portion de plan limitée par deux demi-droites de même origine. L'origine commune est appelée sommet.



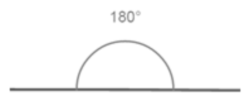
• S'il est inférieur à un angle droit (90°), l'angle est aigu.





• S'il est compris entre un angle droit et un angle plat (180°), il est obtus.

• Un angle est plat est un angle de 180°.

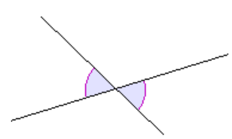


Angles complémentaires : Deux angles sont complémentaires si la somme de leur mesure est égale à 90°.

Angles supplémentaires : Deux angles sont supplémentaires si la somme de leur mesure est égale à 180°.

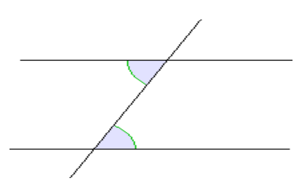
Angles adjacents : Deux angles sont adjacents s'ils ont un sommet et un côté communs et s'ils sont situés de part et d'autre de ce côté.

Angles opposés par le sommet : Deux angles sont opposés par le sommet s'ils ont leur sommet en commun et que leurs côtés sont dans le prolongement l'un de l'autre.



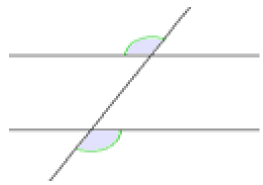
Angles alternes/internes : Deux angles formés par deux droites coupées par une sécante sont dits alternes-internes si :

- ils sont situés de part et d'autre d'une sécante,
- ils sont situés entre deux droites,
- ils ne sont pas adjacents.



Angles alternes/externes : Deux angles formés par deux droites coupées par une sécante sont dits alternes-internes si :

- ils sont situés de part et d'autre de la sécante,
- ils ne sont pas adjacents,
- ils sont situés à l'extérieur des deux droites.



III- Les polygones

Polygone : Un polygone est une figure géométrique limitée par des côtés qui sont tous des segments.

Polygone régulier : Un polygone régulier est un polygone qui a tous ses angles et ses côtés égaux.

IV- Les quadrilatères

Rectangle : Un rectangle est un quadrilatère qui a les deux côtés opposés parallèles et de même longueur et qui possède quatre angles droits.

Carré : Un carré est un rectangle qui a deux côtés consécutifs de même longueur.

Losange : Un losange est un quadrilatère qui a quatre côtés de même longueur.

Parallélogramme : Un parallélogramme est un quadrilatère qui a les deux côtés opposés parallèles et de même longueur.

Trapèze : Un trapèze est un quadrilatère qui a deux côtés opposés parallèles.
Un trapèze isocèle est un quadrilatère qui a deux côtés opposés de même longueur.
Un trapèze rectangle est un trapèze qui a deux angles droits.

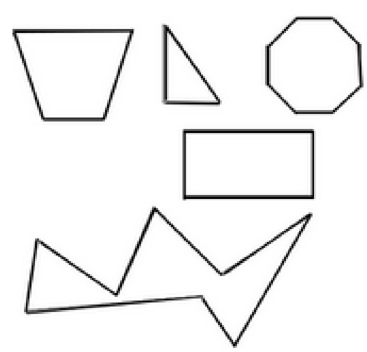
Voir fiche sur « Les quadrilatères »

Les quadrilatères
(Définitions et Propriétés)

I- Classement des quadrilatères

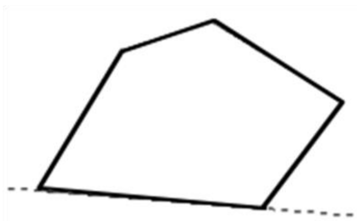
I-1 Polygones

Polygone : Un polygone est une ligne brisée fermée.
Les côtés du polygone sont les segments qui le composent.
Les sommets du polygone sont les extrémités de ses côtés.
A chaque sommet du polygone est associé un angle. Il y a donc autant d'angles que de côtés.
Une diagonale d'un polygone est un segment joignant deux sommets non consécutifs.

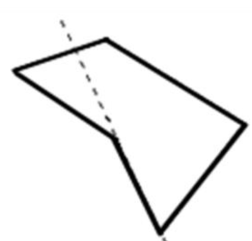


Polygones

Polygone convexe : Un polygone à n côtés est convexe, si pour toute droite (d) portée par l'un quelconque de ses côtés, le (n-1) côtés restants appartiennent au même demi-plan de frontière *(d).*
Dans le cas contraire il est concave.

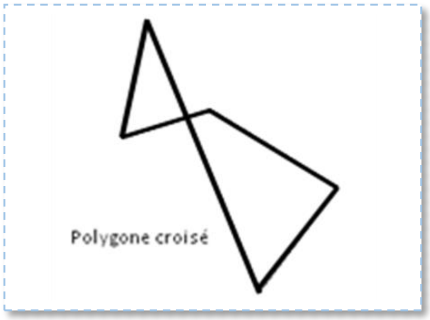


Polygone convexe



Polygone concave

Polygone croisé : Un polygone dont deux côtés au moins sont sécants.

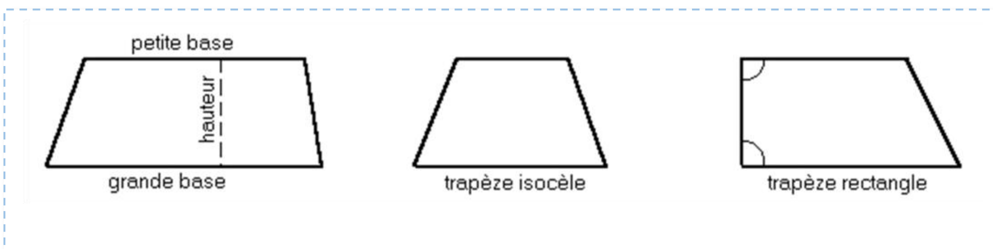


Principaux polygones non croisés :

Nombre de côtés	Nature polygone	Nombre de côtés	Nature polygone
3	Triangle	8	Octogone
4	Quadrilatère	9	Ennéagone
5	Pentagone	10	Décagone
6	Hexagone	11	Hendécagone
7	Heptagone	12	Dodécagone

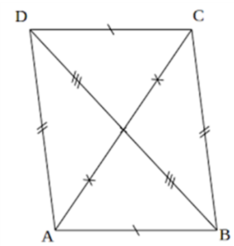
I-2 Trapèze

Définition : Le trapèze est un quadrilatère convexe qui a deux côtés parallèles.
Il est isocèle s'il a deux côtés égaux ou deux angles à la base égaux.
Il est rectangle s'il a deux angles droits.



I-3 Parallélogramme

Définition : Un parallélogramme est un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles (deux à deux)



Dans cette figure :
- (AB) // (DC) et (AD) // (BC)
- (AB) = (DC) et (AD) = (BC)

Propriétés :

- **Propriété 1 : Centre de symétrie**

Le point d'intersection des diagonales est le centre de symétrie du parallélogramme.

- **Propriété 2 : Diagonales**

Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu.

- **Propriété 3 : Côtés opposés**

Un parallélogramme a ses côtés opposés deux à deux de même longueur.

Un parallélogramme a deux côtés opposés parallèles et de même longueur.

- **Propriété 4 : Angles opposés**

Un parallélogramme a des angles opposés de même mesure.

- **Propriété 5 : Angles consécutifs**

Un parallélogramme a des angles consécutifs supplémentaires ($= 180°$)

I-4 Losange

Définition : Un losange est un quadrilatère qui a 4 côtés de même longueur.

Remarque *: Comme le losange est un parallélogramme, il possède toutes les propriétés de ce dernier.*

Propriétés :

▪ **Propriété 1 : Axes de symétrie**

Les droites portées par ses diagonales sont des axes de symétrie.

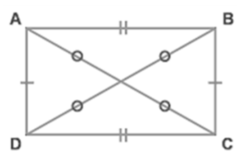
▪ **Propriété 2 : Losange et Parallélogramme**

Un parallélogramme qui a deux côtés consécutifs de même longueur est un losange.

Un parallélogramme qui a deux diagonales perpendiculaires est un losange.

I-5 Rectangle

Définition : Un rectangle est un quadrilatère qui a 4 angles droits.



Dans cette figure :

▪ (AB) // (CD) et (AD) // (BC)

▪ (AB) = (CD) et (AD) = (BC)

Remarque : Comme le rectangle est un parallélogramme, il possède toutes les propriétés de ce dernier.

Propriétés :

▪ **Propriété 1 : Rectangle et Parallélogramme**

Un parallélogramme qui a deux côtés consécutifs perpendiculaire est un rectangle.

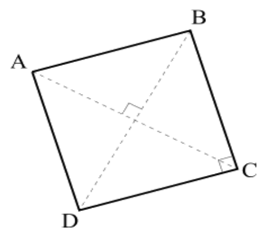
Un parallélogramme qui a des diagonales égales est un rectangle.

▪ **Propriété 2 : Rectangle et axes de symétrie**

Un rectangle admet deux axes de symétrie : les médiatrices de ses côtés.

I-6 Carré

Définition : Un carré est un quadrilatère qui a quatre côtés de même longueur et un angle droit



Dans cette figure :
- (AB) ⊥ (CD) ⊥ (AD) ⊥ (BC)
- (AB) = (BC) et (CD) = (DA)
- AC = BD et AC ⊥ BD

Remarque : *Comme le carré est à la fois un parallélogramme, un losange et un rectangle, il possède toutes les propriétés de ces derniers.*

Propriétés :

- **Propriété 1 : Carré et Parallélogramme**

Un parallélogramme qui a deux côtés consécutifs de même longueur et perpendiculaire est un carré.

Un parallélogramme qui a des diagonales de même longueur et perpendiculaires est un carré

- **Propriété 2 : Carré et Losange**

Un losange qui a des diagonales de même longueur est un carré.

Un losange qui a deux côtés consécutifs perpendiculaires est un carré.

- **Propriété 3 : Carré et Rectangle**

Un rectangle qui a des diagonales perpendiculaires est un carré.

Un rectangle qui a deux côtés consécutifs de même longueur est un carré.

- **Propriété 4 : Carré et Axes de symétrie**

Un carré admet quatre axes de symétrie : ses diagonales et les médiatrices de ses côtés.

II- Polygones réguliers

Définition : Un polygone est dit régulier s'il a tous ses côtés de même longueur et tous ses angles de même mesure.

Remarque : *Cas du triangle ⇨ équilatéral ; Cas du quadrilatère ⇨ carré*

I-1 Pentagone

Définition : Un pentagone régulier est un polygone régulier qui a 5 côtés.

Propriété : L'angle interne entre deux côtés consécutifs d'un pentagone régulier vaut 108°.

I-2 Hexagone

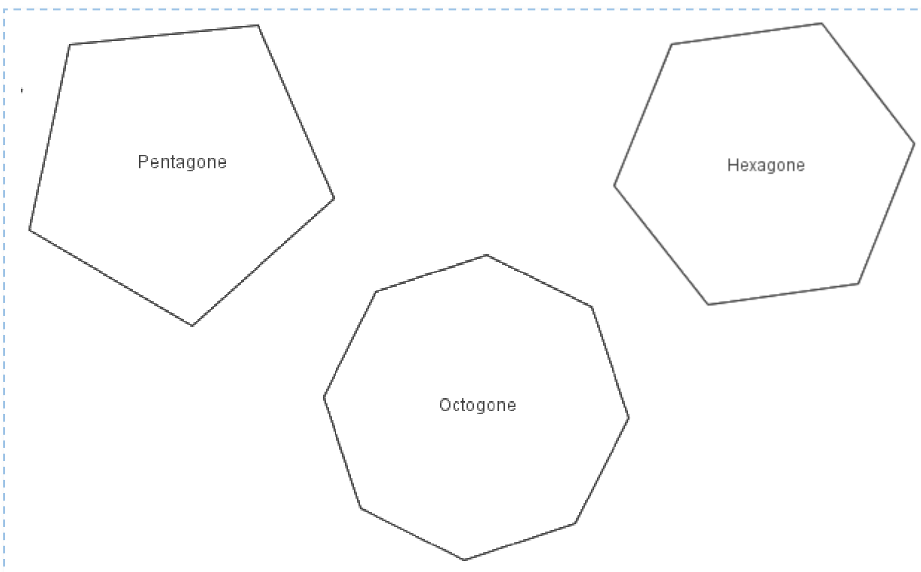
Définition : Un hexagone régulier est un polygone régulier qui a 6 côtés.

Propriété : L'angle interne entre deux côtés consécutifs d'un hexagone régulier vaut 120°. Un hexagone est formé de 6 triangles équilatéraux.

I-3 Octogone

Définition : Un octogone régulier est un polygone régulier à 8 côtés.

Propriété : L'angle interne entre deux côtés consécutifs d'un octogone régulier vaut 135°.

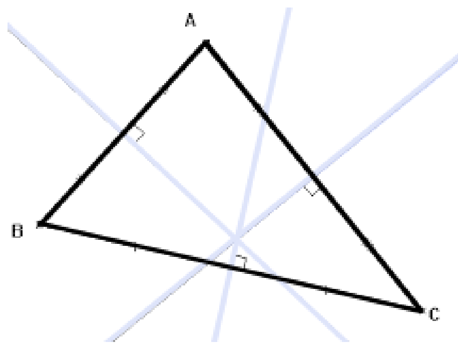


Géométrie du triangle

I- Droites remarquables dans un triangle

I-I Médiatrices d'un triangle

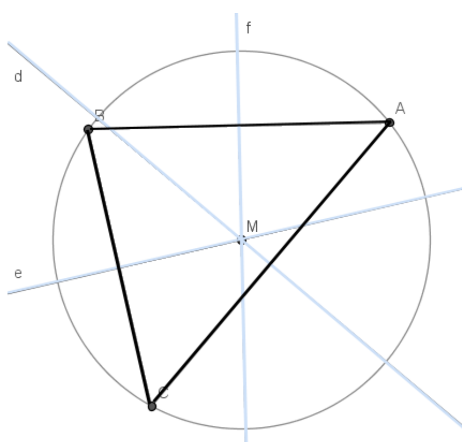
Définition : La médiatrice d'un segment est la droite qui passe par le milieu du segment et qui est perpendiculaire à ce segment.



Propriété :

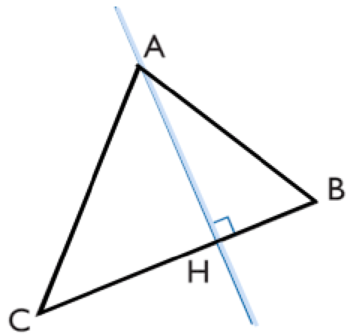
- Les trois médiatrices des côtés d'un triangle sont concourantes en un point. Ce point de concours est appelé le centre du cercle circonscrit au triangle.

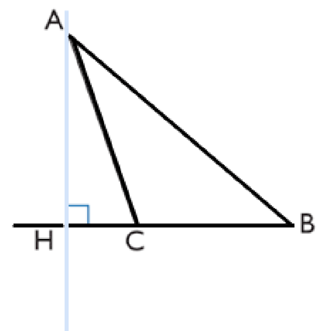
- Si une droite passe par le milieu d'un côté d'un triangle et par le centre du cercle circonscrit du triangle, alors cette droite est la médiatrice de ce côté.



I-2 Hauteurs d'un triangle

Définition : Dans un triangle, la hauteur est la droite issue d'un sommet qui est perpendiculaire au côté opposé.

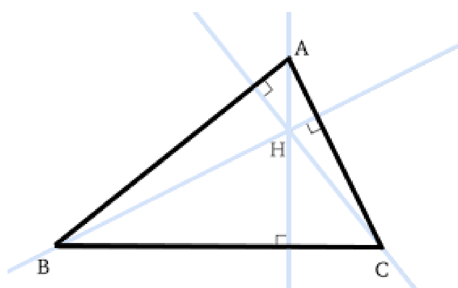




Propriété :

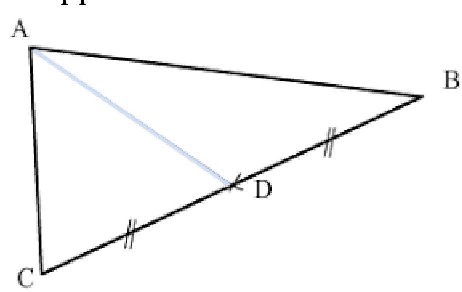
- Les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes en un point. Ce point de concours est appelé l'orthocentre.

- Si une droite passe par le sommet d'un triangle et son orthocentre, alors cette droite est une hauteur de ce triangle.



I-3 Médianes d'un triangle

Définition : Dans un triangle, la médiane est la droite issue d'un sommet qui passe par le milieu du côté opposé.

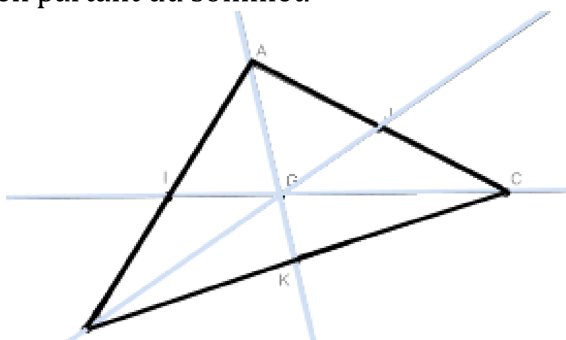


Propriété :

- Les trois médianes d'un triangle sont concourantes en un point. Ce point de concours est appelé le centre de gravité.

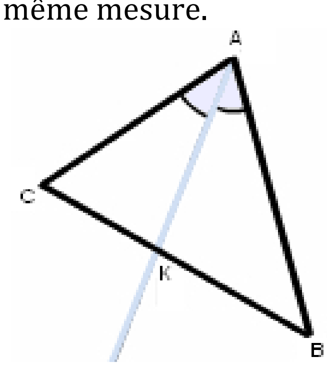
- Si une droite passe par le sommet d'un triangle et son centre de gravité, alors cette droite est une médiane de ce triangle.

- Si un point est le centre de gravité d'un triangle, alors il est situé aux deux tiers de chaque médiane en partant du sommet.



I-4 Bissectrice d'un triangle

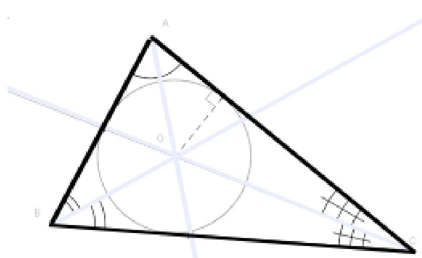
Définition : La bissectrice d'un angle est la demi-droite qui partage cet angle en deux angles adjacents de même mesure.



Propriété 1 :

- Les trois bissectrices d'un triangle sont concourantes en un point. Ce point de concours est appelé le centre du cercle inscrit

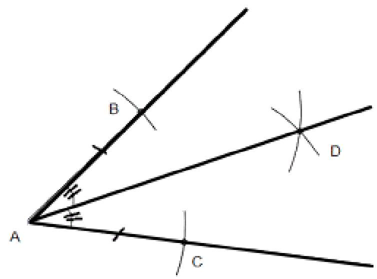
- Si une droite passe par un sommet et le centre du cercle inscrit d'un triangle, alors cette droite est une bissectrice de l'angle en ce sommet.



Propriété 2 :

- Si un point appartient à la bissectrice d'un angle, alors il est équidistant des côtés de cet angle.

- Si un point est équidistant des côtés d'un angle, alors il appartient à la bissectrice de cet angle

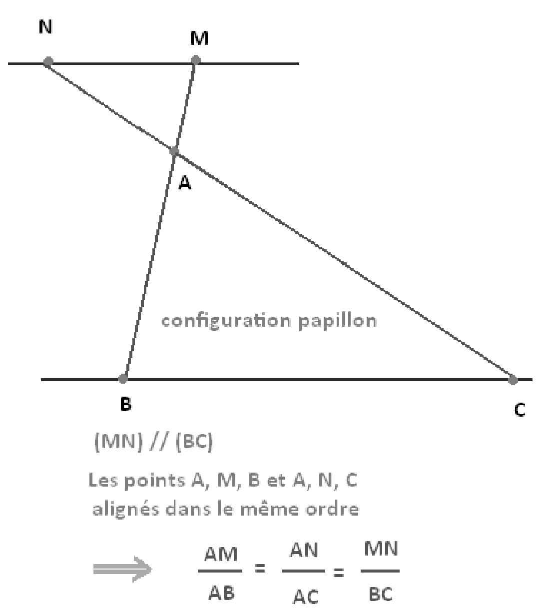


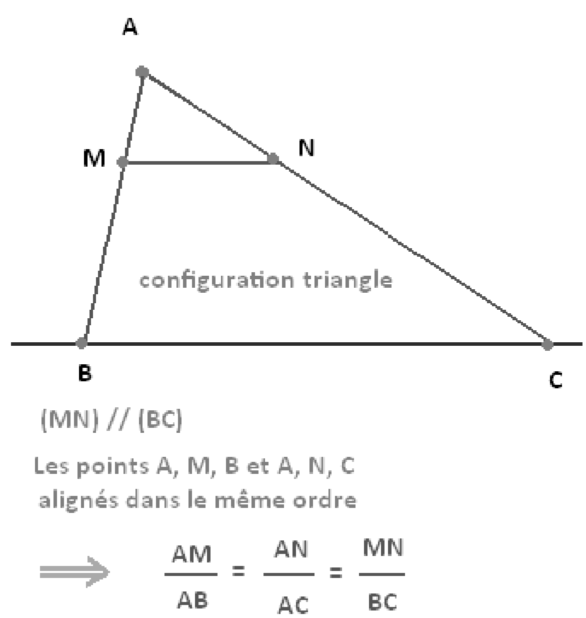
II- Triangles semblables et Théorème de Thalès

Propriété :

- Si les points A, M et B, d'une part, et A, N et C, d'autre part, sont alignés dans le même ordre et que (MN)//(BC) alors :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$





Réciproque :

‣ Si les points A, M et B, d'une part, et A, N et C, d'autre part, sont alignés dans le même ordre et si AM AB = AN AC alors les droites (BC) et (MN) sont parallèles.

Contraposée :

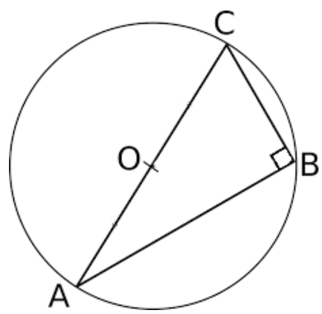
‣ Si les points A, M et B, d'une part, et A, N et C, d'autre part, sont alignés dans le même ordre et si AM AB ≠ AN AC alors les droites (BC) et (MN) ne sont pas parallèles.

III- Dans le triangle rectangle

III-1 Triangle rectangle et cercle circonscrit

Propriété :

‣ Si un triangle est rectangle alors son hypoténuse est un diamètre de son cercle circonscrit.



Conséquence directe :

‣ Le cercle circonscrit à un triangle rectangle a :
- pour centre, le milieu de l'hypoténuse
- pour rayon, la moitié de la longueur de l'hypoténuse.

Réciproque :

‣ Si le côté d'un triangle est le diamètre de son cercle circonscrit alors ce triangle est rectangle et ce côté est son hypoténuse.

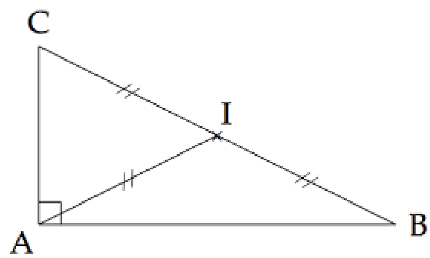
III-2 Triangle rectangle et Médiane

Propriété :

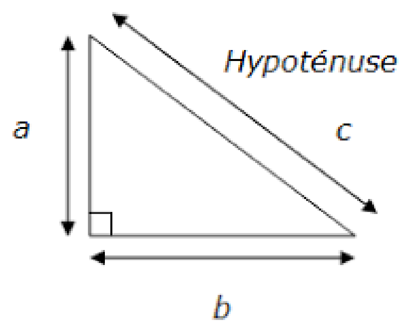
- Si un triangle est rectangle alors la médiane issue de l'angle droit a pour longueur la moitié de la longueur de l'hypoténuse.

Réciproque :

- Si un côté d'un triangle a pour longueur le double de la longueur de la médiane relative à ce côté alors ce triangle est rectangle et ce côté est son hypoténuse



III-3 Théorème de Pythagore



$$c^2 = a^2 + b^2$$

Propriété :

- Si un triangle est rectangle, alors le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des côtés de l'angle droit.

Réciproque :

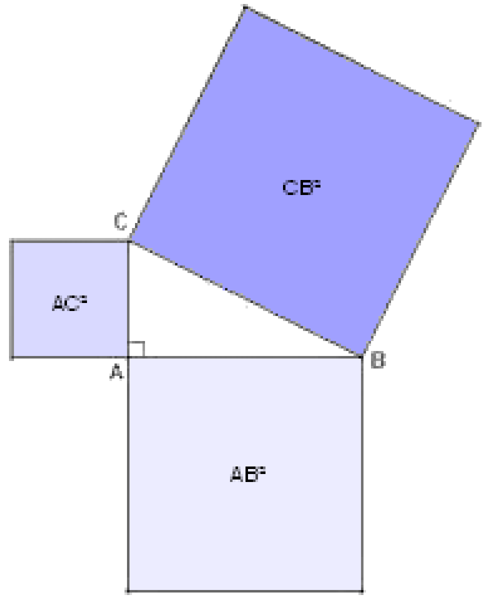
- Si dans un triangle le carré de la longueur du plus grand côté est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés, alors ce triangle est rectangle.

Contraposée :

- Si dans un triangle le carré de la longueur du plus grand côté n'est pas égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés, alors ce triangle n'est pas rectangle.

Remarque :

‣ Pour tout triangle ABC rectangle en B, on a l'égalité $\mathrm{AC}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2$. Les carrés de la longueur de chaque côté correspondent aux aires des carrés représentés ci-contre ce qui signifie que l'aire rouge est la somme des aires verte et bleue.



III-3 Trigonométrie dans le triangle rectangle

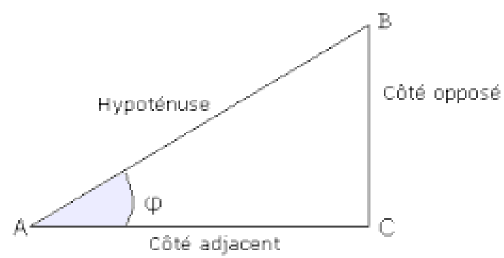
Définition :

Dans un triangle rectangle, on a les égalités suivantes :

- $\cos(\text{angle}) = \dfrac{côté\ adjacent}{hypothénuse}$

- $\sin(\text{angle}) = \dfrac{côté\ opposé}{hypothénuse}$

- $\tan(\text{angle}) = \dfrac{côté\ opposé}{côté\ adjacent}$



Propriétés :

‣ Pour tout angle x, $\cos(x)\ 2 + \sin(x)\ 2 = 1$

‣ Pour tout angle x, $\tan(x) = \sin(x)\ \cos(x)$

‣ Pour $0° \leq x \leq 90°$, $0 \leq \cos(x) \leq 1$ et $0 \leq \sin(x) \leq 1$

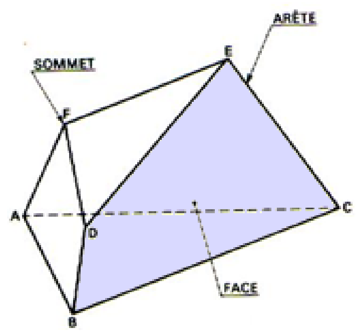
Polyèdre et solides de révolution (Définitions et Propriétés)

I- Présentation des polyèdres

Définition : On appelle polyèdre tout volume de l'espace dont les faces sont des polygones.

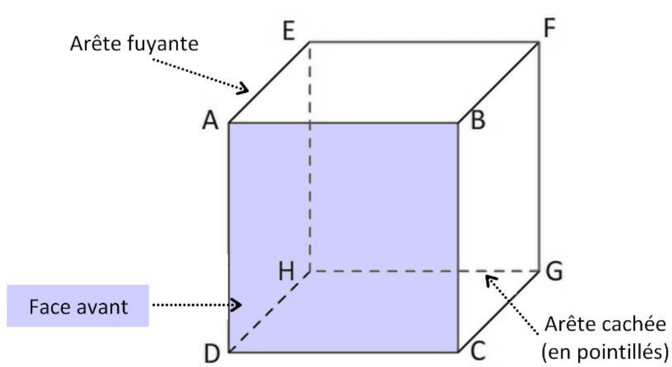
Il faut savoir

Les faces d'un polyèdre sont planes.
Les côtés des polygones forment les arêtes du polyèdre.
Les sommets des polygones sont aussi les sommets du polyèdre.



Représentation des polyèdres : On peut représenter les polyèdres de deux manières : en perspective cavalière et en perspective à points de fuite.

- Perspective cavalière : Représentation plane d'un solide qui donne l'impression de volume.

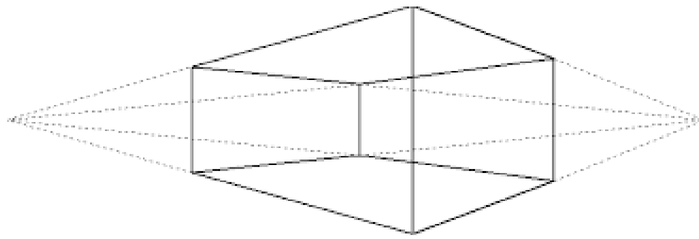


▪ **Propriétés**

Propriété 1 : Les représentations de deux droites parallèles sont deux droites parallèles.

Propriété 2 : Le rapport des longueurs de deux segments parallèles est conservé.

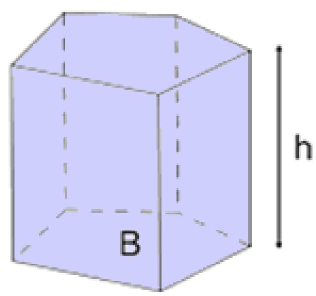
- Perspective à points de fuite : Représentation plane d'un polyèdre, dans laquelle les droites parallèles de ce dernier, convergent vers un même point.



II- Classement des polyèdres

II-I Prisme

Définition : Un prisme est un polyèdre dont les deux faces de base sont situées dans des plans parallèles et sont superposables et dont toutes les arêtes latérales sont parallèles.



- Propriétés

Propriété 1 : La hauteur d'un prisme est la distance séparant les deux plans de bases.

Propriété 2 : Les faces latérales sont des parallélogrammes.

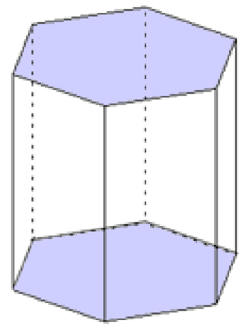
Propriété 3 : Les arêtes latérales ont la même longueur.

Remarque : *Il existe plusieurs types de prisme.*

- *Le prisme à base trapézoïdale : Comme son nom l'indique les bases de ce prisme sont des trapèzes.*
- *Le prisme à base hexagonale : Comme son nom l'indique les bases de ce prisme sont des hexagones.*
- *Le parallélépipède : Les bases de ce prisme sont des parallélogrammes.*

II-2 Prisme droit

Définition : Un prisme droit est un prisme dont les arêtes latérales sont orthogonales aux plans des bases.



▪ **Propriété**

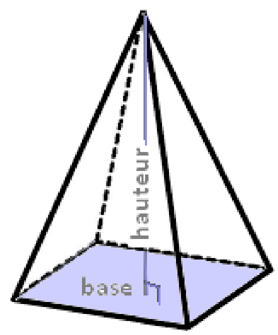
Propriété 1 : Les faces latérales des prismes droits sont des parallélogrammes possédant un angle droit, ce sont donc des rectangles.

Remarque *: Il existe plusieurs types de prisme droit.*

- *Le prisme droit à base triangulaire : Comme son nom l'indique les bases de ce prisme sont des triangles.*
- *Le prisme droit à base rectangulaire (= le parallélépipède rectangle ou pavé droit) : Ce prisme à six faces rectangulaires, douze arêtes égales et parallèles 4 à 4. Chaque arête est perpendiculaire à deux faces opposées. Enfin, les quatre diagonales intérieures sont égales et se coupent en leur milieu.*
- *Le prisme droit à base carré : Comme son nom l'indique les bases de ce prisme sont des carrés.*
  Par exemple, ***le cube*** : Il possède 6 faces carrées, douze arêtes de même longueur et les mêmes propriétés que le parallélépipède rectangle (car un carré est un rectangle particulier).

II-3 Pyramide

Définition : Une pyramide est un polyèdre dont la base est un polygone et les faces latérales des triangles qui ont un sommet commun.



Remarque *: Il existe plusieurs types de pyramide.*

- *La pyramide à base triangulaire (le tétraèdre) : Il possède 6 arêtes et 4 faces triangulaires, donc chaque face peut être considérée comme la base du tr*
- *La pyramide à base carrée : Comme son nom l'indique la base de cette pyramide est un carré.*

II-4 Pyramide régulière

Définition : Une pyramide régulière est une pyramide dont la base est un polygone régulier et dont la hauteur passe par le centre du cercle circonscrit au polygone de base.

- **Propriétés**

Propriété 1 : Les arêtes latérales ont la même longueur.

Propriété 2 : Les faces latérales sont des triangles isocèles superposables.

Remarque *: Il existe plusieurs types de pyramide régulière.*

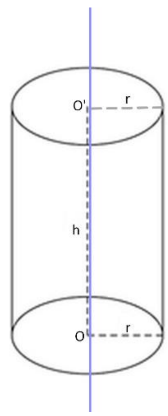
- *La pyramide régulière à base carrée : Comme son nom l'indique la base de cette pyramide est un carré.*
- *La pyramide régulière à base hexagonale : Comme son nom l'indique la base de cette pyramide est un hexagone.*
- *La pyramide régulière à base triangulaire (le tétraèdre régulier) : C'est un tétraèdre dont les faces sont des triangles équilatéraux. Toutes ses faces sont donc superposables.*

III- Solides de révolution

Définition : Un solide de révolution est engendré par la révolution d'une surface plane fermée tournant autour d'un axe situé dans le même plan qu'elle et ne possédant en commun avec elle aucun point ou seulement des points de sa frontière.

III-1 Cylindre droit

Définition : Un cylindre droit est un solide formé par une droite qui se déplace parallèlement à elle-même, en s'appuyant sur une courbe plane.



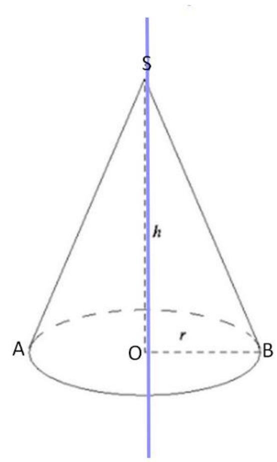
- **Propriétés**

Propriété 1 : Les bases du cylindre sont les deux disques. Ces deux disques sont superposables.

Propriété 2 : La face latérale est un rectangle dont l'une des dimensions est égale au périmètre de la base, et l'autre dimension est égale à O_1 et O_2 .

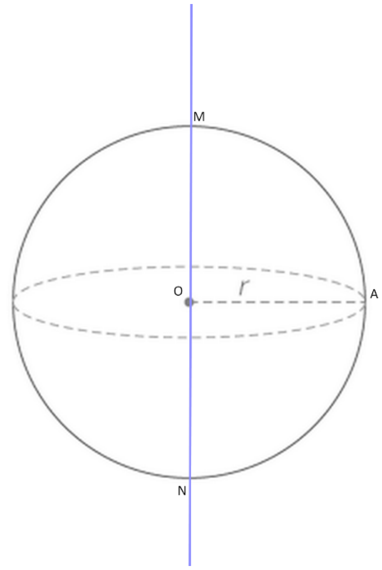
III-2 Cône droit

Définition : Le cône droit est engendré par la révolution du triangle rectangle SOA autour de l'axe de révolution (SO).



III-3 Boule

Définition : Une boule est un solide de révolution engendré par la rotation d'un demi-disque de centre O et de rayon [AO] autour de l'axe de révolution (MN).



La Sphère

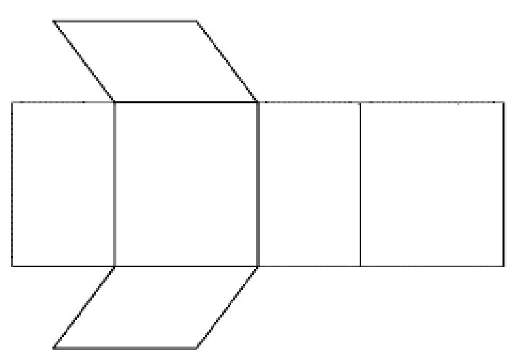
Une sphère est une surface constituée des points de l'espace situés à égale distance d'un point appelé centre de la sphère. Cette distance correspond au rayon de la sphère.

IV- Patrons

Définition : Un patron est la représentation d'un solide « dépliée dans un plan.
Le patron est un assemblage de surfaces planes qui permet de construire un solide.
Il doit donc respecter : le nombre, la forme, les dimensions et l'ordonnancement des faces identifiées dans le solide.

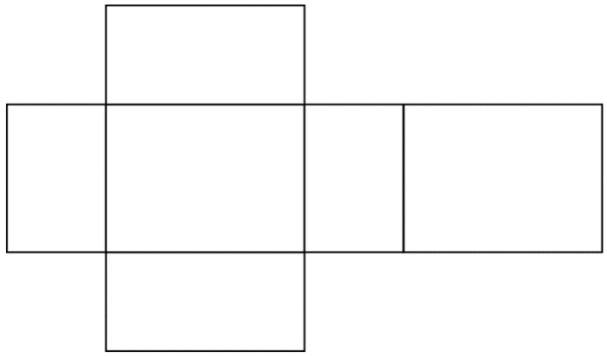
IV-1 Parallélépipède droit

Description : Deux faces sont des parallélogrammes et les quatre faces latérales sont des rectangles.



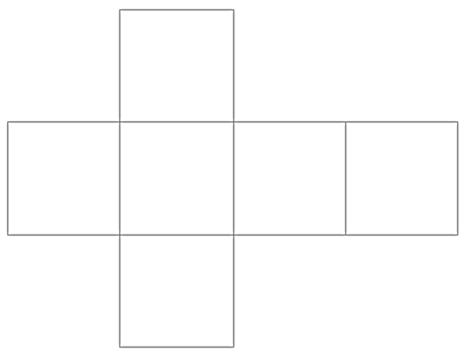
IV-2 Parallélépipède rectangle

Description : Toutes les faces sont rectangulaires.

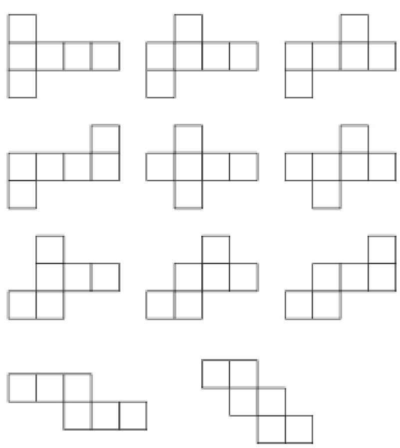


IV-3 Cube

Description : Les six faces sont des carrés.

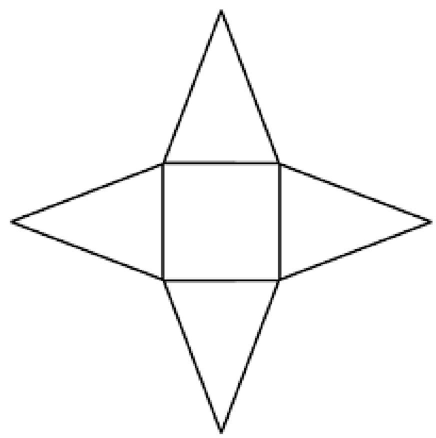


Remarque : *Il existe onze patrons différents pour un même cube.*



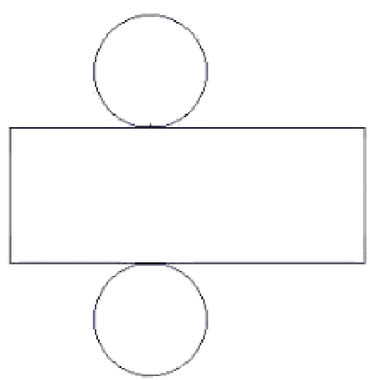
IV-4 Pyramide régulière à base carrée

Description : Les quatre faces latérales sont des triangles isocèles superposables.



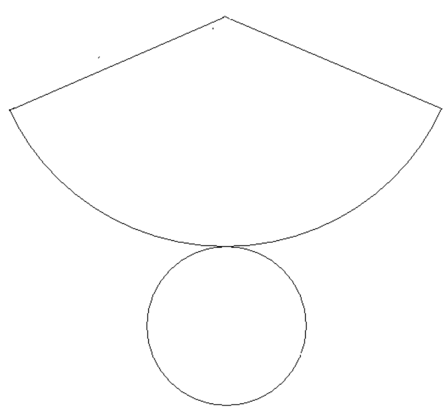
IV-5 Cylindre droit (ou de révolution)

Description : La face latérale est un rectangle. Le périmètre de la base est égal à la longueur du rectangle.



IV-4 Cône droit (ou de révolution)

Description : La face latérale est une portion de disque.



Grandeurs et mesure - notion : longueurs, périmètres, aires, volumes

1. Longueurs

a) Unités de longueur

Le **mètre** est l'unité de longueur du Système International (SI), il est défini, depuis 1983 comme la distance parcourue par la lumière dans le vide en 1/299 792 458 seconde.

Tableau de conversion :

km	hm	dam	m	dm	cm	mm
	1	2	3			

Exemple :

123 m = 0,123km = 12 300 cm

b) Périmètre

Le périmètre est la longueur d'une courbe fermée.

Périmètre d'un polygone :
C'est la somme des longueurs des côtés.

Périmètre d'un cercle :
Le périmètre d'un cercle de diamètre D et de rayon R est égal à $\pi \times D = 2\ \pi \times R$.

2. Aires

a) Unités d'aires

L'unité légale d'aire est le mètre carré qui est défini comme l'air d'un carré de côté 1 m.

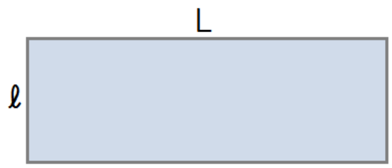
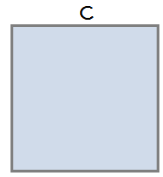
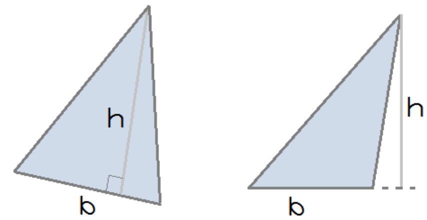
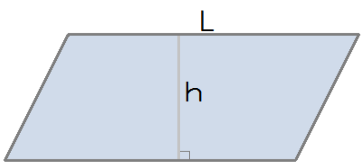
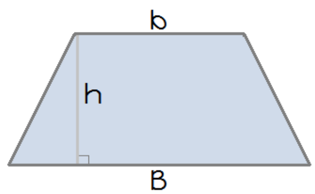
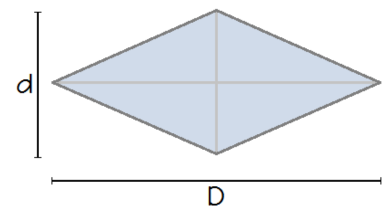
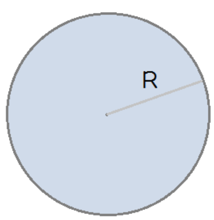
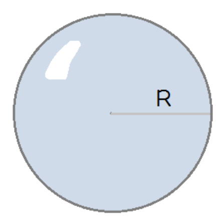
Tableau de conversion :

km²		hm²		dam²		m²		dm²		cm²		mm²	
			3	5	6	1	0						

Exemple :

35 610 m² = 0,03561 km² = 356 100 000 cm²

b) Formules d'aires

Aire d'un **rectangle**	Aire d'un **carré**	Aire d'un **triangle** : *de base b et de hauteur h*
		
$A = L \times \ell$	$A = c^2$	$A = \frac{b \times h}{2}$
Aire d'un **parallélogramme** : *de côté L et de hauteur relative h*	Aire d'un **trapèze** : *de hauteur h dont une base a comme longueur B et l'autre b*	Aire d'un **losange** : *de diagonales D et d*
		
$A = L \times h$	$A = \frac{(B + b) \times h}{2}$	$A = \frac{D \times d}{2}$
Aire d'un **disque** : *de rayon R*	Aire d'une **sphère** : *de rayon R*	
		
$A = \pi R^2$	$A = 4 \pi R^2$	

3. Volumes, contenances

a) Unités de volume, de contenance

Il y a deux types d'unités :

- celles liées au système métrique, le **mètre cube** (m^3) et ses sous-unités et multiples,
- et celles liées au **litre** (en général utilisé essentiellement pour les contenances), le litre étant lui-même une sous-unité du mètre cube.

1 litre est le volume (la contenance) d'un cube de longueur d'arête 1 dm. D'où **1 L = 1 dm^3**

Tableau de conversion :

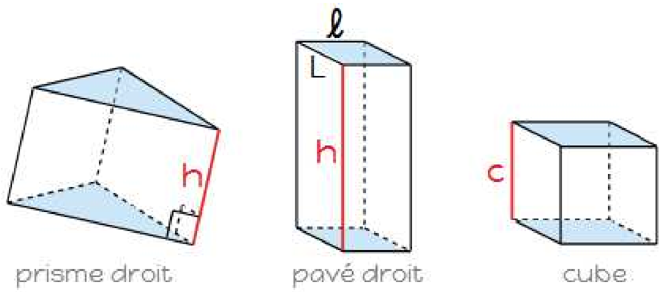
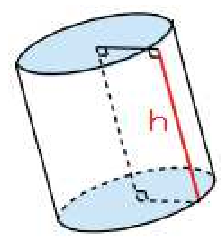
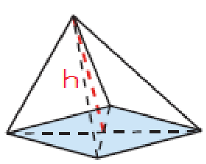
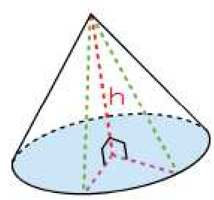
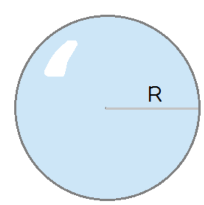
km^3	hm^3	dam^3	m^3	dm^3	cm^3	mm^3
			2 8	0 0 0	0 0 0	

Exemple :

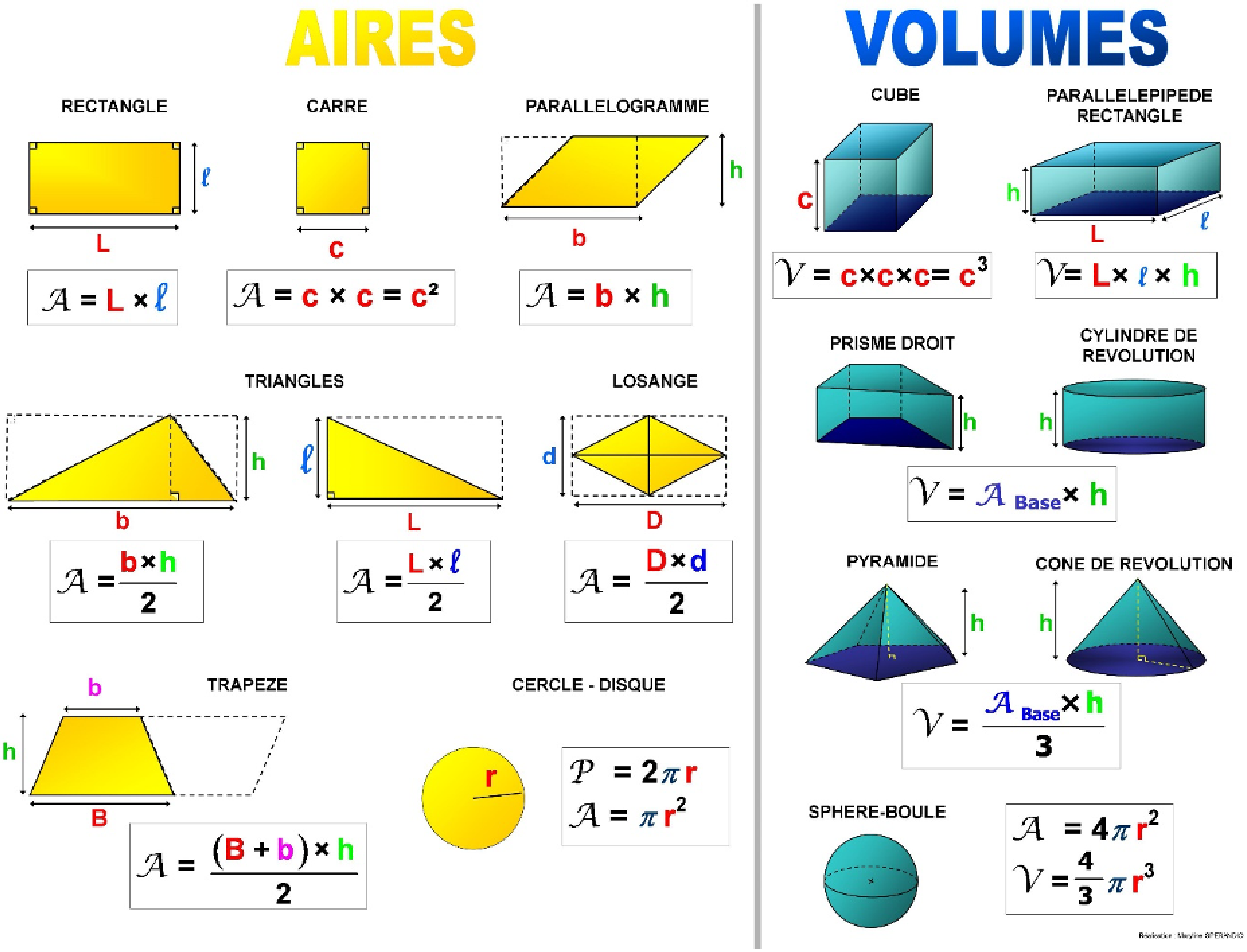
28 m^3 = 28 000 000 cm^3 = 0,000 000 028 km^3

12 m^3 = 12 000 dm^3 = 12 000 L.

b) Formules de volumes

<table>
<tr><td colspan="2">Volume d'un prisme droit :</td><td>Volume d'un cylindre de révolution</td></tr>
<tr><td colspan="2">
</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">$V_{prisme\ droit}$ = Aire base × h
$V_{pavé\ droit}$ = V = L × ℓ × h
$V_{cube} = c^3$</td><td>V = Aire base × h
V = $\pi R^2 \times h$</td></tr>
<tr><td>Volume d'une pyramide :</td><td>Volume d'un cône de révolution :</td><td>Volume d'une boule :
de rayon R</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$V = \frac{\text{Aire base} \times h}{3}$</td><td>$V = \frac{\text{Aire base} \times h}{3}$</td><td>$V = \frac{4}{3} \pi R^3$</td></tr>
</table>

Résumé


AIRES
RECTANGLE
ℓ
L
𝒜 = L × ℓ
CARRE
c
𝒜 = c × c = c²
PARALLELOGRAMME
h
b
𝒜 = b × h
TRIANGLES
h
b
𝒜 = (b × h) / 2
ℓ
L
𝒜 = (L × ℓ) / 2
LOSANGE
d
D
𝒜 = (D × d) / 2
TRAPEZE
b
h
B
𝒜 = ((B + b) × h) / 2
CERCLE - DISQUE
r
𝒫 = 2πr
𝒜 = πr²
VOLUMES
CUBE
c
𝒱 = c×c×c = c³
PARALLELEPIPEDE RECTANGLE
h
L
ℓ
𝒱 = L × ℓ × h
PRISME DROIT
h
CYLINDRE DE REVOLUTION
h
𝒱 = 𝒜 Base × h
PYRAMIDE
h
CONE DE REVOLUTION
h
𝒱 = (𝒜 Base × h) / 3
SPHERE-BOULE
𝒜 = 4πr²
𝒱 = 4/3 πr³