Math II
Licence Physique - Chimie

Térence Bayen

Université d'Avignon (Laboratoire de Mathématiques)

terence.bayen@univ-avignon.fr

Programme et intervenants

- Chapitre 0 : Quelques rappels (si le temps le permet)
- Chapitre 1 : Courbes paramétrées (1CM)
- Chapitre 1 (suite) : Fonctions de plusieurs variables (2CM)
- Chapitre 3 : Nombres complexes (1CM)
- Chapitre 4 : Equations différentielles linéaires d'ordre 1 et 2. (4CM)

Intervenants :

- CM + TD1 : Terence Bayen
- TD2 : Manel Dali Youcef
- TD3 : Fernando Vieira Costa Junior

Organisation de travail

Séances:

- 8 séances de cours CM
- 9 séances de TD (toutes avant le dernier CM) : 4 séances de TD avant le CC1 (sur le chapitre 1)

Ce qu'il faut savoir faire :

- Bien comprendre les exercices fait en TD
- Relire les exemples du cours ; assimiler les définitions principales / **méthodes**

EN MATH. IL FAUT SAVOIR FAIRE LES CALCULS ET TRAVAILLER **REGULIEMENT**

Evaluations

Contrôles continus

- CC1 : programme : chapitre 1 et 2 (courbes + fonctions de plusieurs variables) : **11/03/2022 : 8h30-9h30**
- CC2 : programme : chapitre 3 et 4 principalement (nombres complexes + EDO linéaires) **11/04/2022 : 13h-14h**

ATTENTION : DANS CE MODULE LES EVALUATIONS VIENNENT TRES VITE NOTAMMENT LA 2EME : IL FAUT IMPERATIVEMENT SUIVRE LE COURS ET TRAVAILLER DES LE SOIR LES EXERCICES + REVOIR LES METHODES DE COURS : LAPS DE TEMPS COURT!!!!!

Pré-requis

- Equation du second degré
- Fonctions usuelles (polynômes, $\exp$, $\ln$, $\cos$, $\sin$,...)
- Dérivation
- Primitives (super important pour EDO)

VOIR POLY CHAPITRE 0 SUR L'ENT

$\Rightarrow$ ENT

Equation du second degré

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad a \neq 0$$

Résolution dans $\mathbb{R}$ (avec $a, b, c, \in \mathbb{R}$). Soit $\Delta := b^2 - 4ac$.

1. $\Delta < 0 \Rightarrow$ pas de solutions
2. $\Delta = 0 \Rightarrow$ solution $=$ racine double $x = -\frac{b}{2a}$
3. $\Delta > 0 \Rightarrow$ il y a deux solutions distinctes $x = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$

Résolution dans $\mathbb{C}$ avec $a, b, c, \in \mathbb{R}, \mathbb{C}$.(on reverra ce cas au chapitre 2)

$$az^2 + bz + c = 0 \quad a \neq 0$$

il y a toujours 2 solutions:

$$z = \frac{-b \pm \delta}{2a}$$

où δ est une racine carré dans $\mathbb{C}$ de Δ: $\delta^2 = \Delta$ (δ existe toujours).

Dérivées usuelles

$f(x)$	intervalle de définition	$f'(x)$
c (constante)	$\mathbb{R}$	0
x	$\mathbb{R}$	1
x^n, $n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$	$-\frac{1}{x^2}$
$\frac{1}{x^n}$, $n \geq 2$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$
$\sqrt{x}$	$]0, +\infty[$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\ln(x)$	$]0, +\infty[$	$\frac{1}{x}$
e^x	$\mathbb{R}$	e^x
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$\cos x$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$-\sin x$
$\tan x$	$]k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}[$, $k \in \mathbb{Z}$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

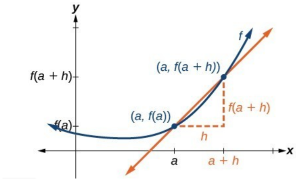
Primitives

$f(x)$	intervalle de définition	$F(x)$
c (constante)	$\mathbb{R}$	$cx + C$
x	$\mathbb{R}$	$\frac{x^2}{2} + C$
x^n, $n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$	$\ln \lvert x \rvert + C$
$\frac{1}{x^n}$, $n \geq 2$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$	$-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + C$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$]0, +\infty[$	$2\sqrt{x} + C$
$\ln(x)$	$]0, +\infty[$	$x \ln x - x + C$
e^x	$\mathbb{R}$	$e^x + C$
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$\sin x + C$
$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$]k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}[$, $k \in \mathbb{Z}$	$\tan x + C$

Opérations sur les dérivées

Notation f'	Notation $\frac{df}{dx}$
$(f+g)' = f' + g'$	$\frac{d(f+g)}{dx} = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx}$
$(cf)' = cf'$, avec c constante	$\frac{d(cf)}{dx} = c\frac{df}{dx}$
$(fg)' = f'g + fg'$	$\frac{d(fg)}{dx} = f\frac{dg}{dx} + \frac{df}{dx}g$
$(\frac{1}{f})' = -\frac{f'}{f^2}$	$\frac{d(\frac{1}{f})}{dx} = -\frac{1}{f^2}\frac{df}{dx}$
$(\frac{f}{g})' = \frac{f'g-fg'}{g^2}$	$\frac{d(\frac{f}{g})}{dx} = \frac{\frac{df}{dx}g-f\frac{dg}{dx}}{g^2}$
$(f\circ g)' = (f'\circ g)g'$	$\frac{d(f\circ g)}{dx} = (\frac{df}{dx}\circ g).\frac{dg}{dx}$
$(u^n)' = nu'u^{n-1}$	$\frac{d(u^n)}{dx} = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$
$(\frac{1}{u^n})' = -n\frac{u'}{u^{n+1}}$	$\frac{d(\frac{1}{u^n})}{dx} = -\frac{n}{u^{n+1}}\frac{du}{dx}$
$(e^u)' = u'e^u$	$\frac{d(e^u)}{dx} = e^u\frac{du}{dx}$
$(\ln\|u\|)' = \frac{u'}{u}$, avec c constante	$\frac{d(\ln\|u\|)}{dx} = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$

Qu'est ce que la dérivée?



Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Si il existe

$$\lim_{h \to 0\,,\, h \neq 0} \underbrace{\frac{f(a+h) - f(a)}{h}}_{\text{taux d'accroissement}} \in \mathbb{R},$$

on dit que f est dérivable en a et on appelle dérivée cette limite que l'on note $f'(a)$.

Opérations sur les primitives

On suppose que $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable sur un intervalle I.

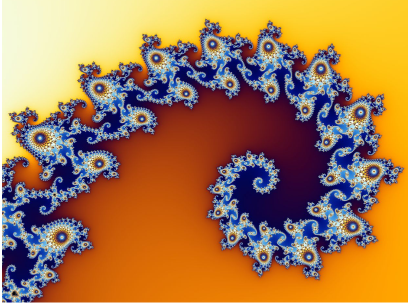
- une primitive de $u'.u^n$ sur I est $\frac{u^{n+1}}{n+1}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$;
- une primitive de $\frac{u'}{u^2}$ sur I est $-\frac{1}{u}$;
- une primitive de $\frac{u'}{u^n}$ sur I est $-\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}$ avec $n \geq 2$;
- une primitive de $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ sur I est $2\sqrt{u}$ en supposant $u > 0$ sur I;
- une primitive de $\frac{u'}{u}$ est $\ln|u|$.

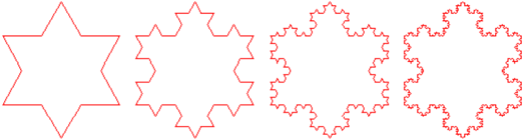
Si $u > 0$ sur I et si $a \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$, une primitive de $u' u^a$ sur I est

$$\int u' u^a = \begin{cases} \frac{u^{a+1}}{a+1} + C & \text{si} \quad a \in \mathbb{R}\backslash\{-1\} \\ \ln u + C & \text{si} \quad a = -1 \end{cases}$$

Chapitre 1: Courbes paramétrées

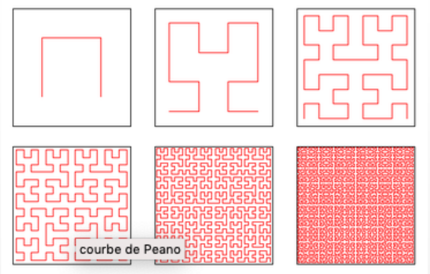
Courbes fractales (défini par les nombres complexes)





Flocon de Koch : il a une longueur infinie à la limite!

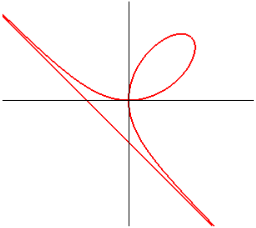
Courbes de Péano



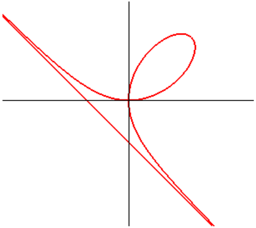
Six itérations de la construction de la courbe de Hilbert, un exemple d'une courbe de Peano construit à partir de David Hilbert

on peut paramétrer chaque courbe ; à la limite la courbe remplit l'espace.

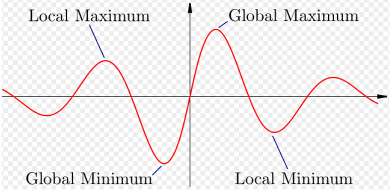
Folium de Descartes



Folium de Descartes



Ne pas confondre avec le graphe d'une fonction



Quelques noms célèbres

- Ovales de Cassini
- Limaçon de Pascal
- Lemniscate de Bernouilli
- Strophoïde
- Quartique
- Astroïde
- Folium de Descartes, trifolium
- Courbe de Lissajous (i.e., de la forme $x(t) = \cos mt$; $y(t) = \sin nt$, $t \in \mathbb{R}$)

...

`https://mathcurve.com/courbes2d/courbes2d.shtml`

Notion de courbe paramétrée

Définition

Soit $n \geq 1$. On appelle courbe paramétrée toute application $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$:

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t)) \quad t \in I.$$

On dit que t est le paramètre et $\gamma(I)$ (l'image de l'intervalle I par γ) est le graphe de la courbe. La courbe est continue lorsque l'application γ est continue.

Notion de courbe paramétrée

Définition

Soit $n \geq 1$. On appelle courbe paramétrée toute application $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$:

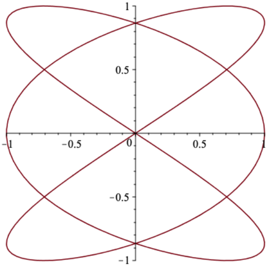
$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t)) \quad t \in I.$$

On dit que t est le paramètre et $\gamma(I)$ (l'image de l'intervalle I par γ) est le graphe de la courbe. La courbe est continue lorsque l'application γ est continue.

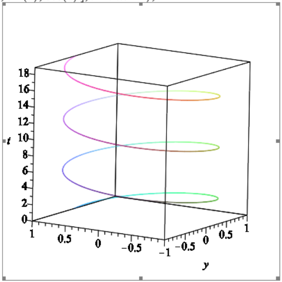
- Dire que γ est continue signifie que chaque fonction γ_i l'est.

Exemples dans $\mathbb{R}^2$ (Lissajou) et $\mathbb{R}^3$ (hélice)

$plot([\cos(3\cdot t), \sin(2\cdot t), t=0..2\cdot \mathrm{Pi}])$



$plots[spacecurve]([t, \sin(t), \cos(t)], t=0..6\cdot \mathrm{Pi});$



Vecteur vitesse

Définition

Une application (courbe) $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ définie par

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$$

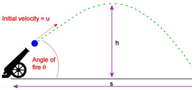
est dérivable en un point $t_0 \in I$ si la limite suivante existe

$$\gamma'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0} = (\gamma_1'(t_0), \dots, \gamma_n'(t_0)).$$

On l'appelle alors la *dérivée* (ou *vecteur tangent* ou *vecteur dérivé*) de γ en t_0.

- En physique, on parle de *trajectoire* pour γ et de *vitesse* pour γ'.
- Il arrive de noter $\dot{\gamma}$ à la place de γ'

Exemple boulet de canon



$$\text{PFD} \quad \Rightarrow \quad m\ddot{\vec{a}} = -\vec{g} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} m\ddot{x} & = 0 \\ m\ddot{y} & = -mg \end{cases}$$

Accélération:

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) & = 0 \\ \ddot{y}(t) & = -g \end{cases}$$

Vecteur vitesse (dérivée):

$$\begin{cases} \dot{x}(t) & = v_0^x \\ \dot{y}(t) & = -gt + v_0^y \end{cases}$$

Trajectoire (courbe paramétrée):

$$\begin{cases} x(t) & = v_0^x t + x_0 \\ y(t) & = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0^y t + y_0 \end{cases}$$

Exemples de calcul de vecteur vitesse

(1) La dérivée de la courbe $t \in \mathbb{R} \mapsto (t, t^2, t^3) \in \mathbb{R}^3$ en t_0 est le vecteur tangent à la courbe en $\gamma(t_0)$:

$$\gamma'(t_0) = (1, 2t_0, 3t_0^2).$$

(2) La cycloide : c'est une courbe obtenue en regardant la trajectoire d'un point M sur la roue d'un vélo (qui avance sans glissement avec vitesse v et on pose $\omega := v/R$):

$$\gamma(t) = \begin{cases} x(t) = R(\omega t - \sin(\omega t)) \\ y(t) = R - R\cos\omega t \end{cases}$$

où R est le rayon de la roue et v est la vitesse du vélo. $\Rightarrow$

$$\gamma'(t) = \begin{cases} R\omega - R\omega\cos(\omega t) \\ R\omega\sin(\omega t) \end{cases}$$

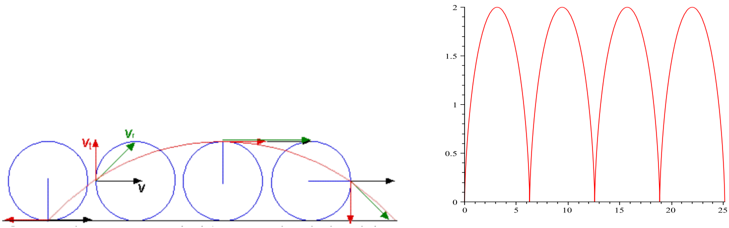


Figure: Cycloïde avec $R = v = 1$ sur plusieurs périodes. On note un point de rebroussement de première espèce[2] avec pente infini en chaque $2k\pi$.

Exercice

Montrer l'équation de la courbe (la roue du vélo a pour rayon R ; la vitesse angulaire de la roue est ω). L'hypothèse cruciale est qu'il n'y a pas de glissement, donc la longueur parcourue par le point "bas" durant un instant t vaut exactement $R\omega t$, l'arc de cercle).

[1] Voir plus tard pour la définition.

[2] Voir plus tard pour la définition.

Dérivabilité (suite)

Proposition

Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$, $t \mapsto \gamma(t) = (\gamma_1(t), ..., \gamma_n(t))$ *une courbe.*

(i) La courbe γ *est dérivable en* t_0 *si et seulement si chaque* γ_i *l'est,* $1 \leq i \leq n$.

(ii) De plus, γ *est dérivable en* t_0 *de dérivée* $\gamma'(t_0)$ *si et seulement si elle admet le développement limité suivant*

$$\gamma(t) = \gamma(t_0) + (t - t_0)\gamma'(t_0) + o_{t \to t_0}(t - t_0).$$

Dérivabilité (suite)

Proposition

Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$, $t \mapsto \gamma(t) = (\gamma_1(t), ..., \gamma_n(t))$ *une courbe.*

(i) La courbe γ *est dérivable en* t_0 *si et seulement si chaque* γ_i *l'est,* $1 \leq i \leq n$.

(ii) De plus, γ *est dérivable en* t_0 *de dérivée* $\gamma'(t_0)$ *si et seulement si elle admet le développement limité suivant*

$$\gamma(t) = \gamma(t_0) + (t - t_0)\gamma'(t_0) + o_{t \to t_0}(t - t_0).$$

$$o_{t \to t_0}(t - t_0) = o(t - t_0) = \varepsilon(t)(t - t_0)$$

avec $\varepsilon(t) \to 0$ quand $t \to t_0$.

Notations complexes

Il est parfois commmode d'utiliser des notations complexes, par exemple en électricité[3] (voir chapitre 3). On peut identifier le plan $\mathbb{R}^2$ (coordonnées cartésiennes) à $\mathbb{C}$ (plan complexe) par:

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x + iy \in \mathbb{C}.$$

Par exemple, on peut définir la courbe $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ par $\gamma(t) = \cos t + i \sin t$. Alors sa dérivée est donnée par

$$\dot{\gamma}(t) = -\sin t + i \cos t.$$

Exercice

Comment se représente la courbe γ de l'exemple précédent? Même question :
- avec $t \in \mathbb{R} \mapsto (2\cos 4t, \sin 4t - 1)$;
- avec $t \in \mathbb{R} \mapsto (t, t^2)$;
- avec $t \mapsto (\cos(2t), \sin(2t))$ avec $t \in [0, 2\pi]$?

[3] Impédances d'un condensateur et d'une bobine pour les circuits électriques *RLC*

Equation de la tangente

Définition

Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée plane définie sur un intervalle I. Si γ est dérivable en $t_0 \in I$ et si $\gamma'(t_0) \neq (0,0)$, la tangente à la courbe au point $\gamma(t_0)$ est la droite passant par $\gamma(t_0)$ et de vecteur directeur $\gamma'(t_0)$.

Proposition

Soit $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe plane paramétrée définie sur un intervalle I. Si γ est dérivable en $t_0 \in I$ et si $\gamma'(t_0) \neq (0,0)$, l'équation de la tangente à la courbe au point $\gamma(t_0)$ est

$$\det \begin{pmatrix} x - \gamma_1(t_0) & \gamma_1'(t_0) \\ y - \gamma_2(t_0) & \gamma_2'(t_0) \end{pmatrix} = 0$$

c-à-d

$$(y - \gamma_2(t_0))\gamma_1'(t_0) - (x - \gamma_1(t_0))\gamma_2'(t_0) = 0.$$

SAVOIR LA FORMULE DU DETERMINANT PAR COEUR

$$det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

et son hypothèse d'application $\gamma'(t_0) \neq (0,0)$!

Exemples

- $x(t) = cos(3t)$, $y(t) = sin(2t)$ avec $t \in \mathbb{R}$; $x'(t) = -3\sin 3t$; $y'(t) = 2\cos 2t$. En $t = 0$

$$\begin{vmatrix} x-1 & 0 \\ y-0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 1.$$

Exemples

- $x(t) = cos(3t)$, $y(t) = sin(2t)$ avec $t \in \mathbb{R}$; $x'(t) = -3\sin 3t$; $y'(t) = 2\cos 2t$. En $t = 0$

$$\begin{vmatrix} x-1 & 0 \\ y-0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 1.$$

- La courbe $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ par $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ admet en $\gamma(t_0)$ pour tangente la droite d'équation

$$\begin{vmatrix} x-\cos t_0 & -\sin t_0 \\ y-\sin t_0 & \cos t_0 \end{vmatrix} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad y\sin t_0 + x\cos t_0 = 1.$$

Exemples

- $x(t) = cos(3t)$, $y(t) = sin(2t)$ avec $t \in \mathbb{R}$; $x'(t) = -3\sin 3t$; $y'(t) = 2\cos 2t$. En $t = 0$

$$\begin{vmatrix} x-1 & 0 \\ y-0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 1.$$

- La courbe $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ par $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ admet en $\gamma(t_0)$ pour tangente la droite d'équation

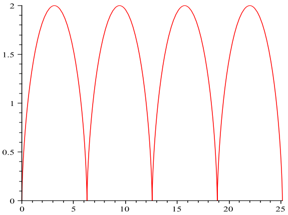
$$\begin{vmatrix} x-\cos t_0 & -\sin t_0 \\ y-\sin t_0 & \cos t_0 \end{vmatrix} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad y\sin t_0 + x\cos t_0 = 1.$$

- **Cas du graphe d'une fonction**. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction numérique et soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ la courbe paramétrée définie par $\gamma(t) = (t, f(t))$. L'ensemble des points $\gamma(t)$ est le graphe de f. Si f est dérivable en t_0, alors $\gamma'(t_0) = (1, f'(t_0)) \neq (0,0)$ et l'équation de la tangente est

$$\begin{vmatrix} x-t_0 & 1 \\ y-f(t_0) & f'(t_0) \end{vmatrix} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad y - f(t_0) - (x-t_0)f'(t_0) = 0$$

(on retrouve l'expression connue).

Exemple où la formule ne marche pas : cycloïde avec $R = \omega = 1$



$$\begin{cases} x(t) = t - \sin t \\ y(t) = 1 - \cos t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'(t) = 1 - \cos t \\ y'(t) = \sin t \end{cases}$$

On voie qu'à chaque fois que le point collé à la roue touche le sol, on a $\cos t = 1$ i.e. $t = 2k\pi$ et donc $x'(t) = y'(t) = 0$. Ainsi, tous les points $(2k\pi, 0)$ sont des points stationnaires.

Lorsque $\gamma'(t_0) = 0$, on ne peut appliquer la formule du déterminant pour calculer la tangente.

Point régulier / point double

Définition

Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée plane définie sur un intervalle I et dérivable sur I.

(i) On dit que t_0 est **régulier** si

$$\gamma'(t_0) \neq 0.$$

(ii) On dit que t_0 est un point stationnaire[4] (ou que la courbe est **stationnaire** en t_0) si

$$\gamma'(t_0) = (0,0).$$

(iii) On dit qu'un point de la courbe est un point double si il existe $s, t \in I$ avec $s \neq t$ tels que

$$\gamma(s) = \gamma(t)$$

(autrement dit, le point est atteint pour deux valeurs distinctes du paramètre.

[4] ou point non régulier

Exemple

Exemple : $t \in [0, 2\pi] \mapsto (\sin t \cos(2t), \cos t)$: faire $t = \pi/4$ et $t = 2\pi - \pi/4$.

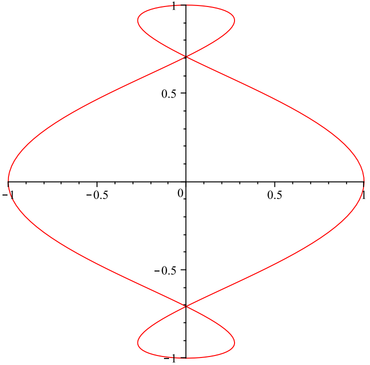


Figure: Courbe de Lissajou : $t \in [0, 2\pi] \mapsto (\sin t \cos(2t), \cos t)$. Pour $t = \pi/4$ et $t = 2\pi - \pi/4$, on trouve deux fois le point de coordonnées $(0, 1)$ qui est donc un point double

Rappel : équation du second degré

1) Soit $a \neq 0$ et $\Delta := b^2 - 4ac \geq 0$. Alors, on a :

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

2) Connaissant deux nombres S (somme) et P (produit) t.q. $S^2 - 4P \geq 0$ on cherche x_1, x_2 t.q.

$$x_1 + x_2 = S \quad \text{et} \quad x_1 x_2 = P.$$

Alors x_1 et x_2 sont solutions de l'équation

$$X^2 - SX + P = 0$$

et donc

$$x_i = \frac{S \pm \sqrt{S^2 - 4P}}{2} \quad i = 1, 2.$$

Exemple détaillé

$$\begin{cases} x(t) = 3t^3 + 2t^2 - t - 1 \\ y(t) = 3t^2 + 2t + 1 \end{cases}$$

On cherche $s \neq t$ t.q. $x(s) = x(t)$ et $y(s) = y(t)$. Ceci donne:

[5] Connaissant $s + t = S$ et $st = P$, s et t sont solutions de $X^2 - SX + P = 0$.

Exemple détaillé

$$\begin{cases} x(t) = 3t^3 + 2t^2 - t - 1 \\ y(t) = 3t^2 + 2t + 1 \end{cases}$$

On cherche $s \neq t$ t.q. $x(s) = x(t)$ et $y(s) = y(t)$. Ceci donne:

$$\begin{array}{llll} x(t) = x(s) & \iff 3(t^3 - s^3) + 2(t^2 - s^2) - (t - s) = 0 & \iff 3(t^2 + st + s^2) + 2(t + s) - 1 = 0 \\ y(t) = y(s) & \iff 3(t^2 - s^2) + 2(t - s) = 0 & \iff 3(t + s) + 2 = 0 \end{array}$$

[5] Connaissant $s + t = S$ et $st = P$, s et t sont solutions de $X^2 - SX + P = 0$.

Exemple détaillé

$$\begin{cases} x(t) = 3t^3 + 2t^2 - t - 1 \\ y(t) = 3t^2 + 2t + 1 \end{cases}$$

On cherche $s \neq t$ t.q. $x(s) = x(t)$ et $y(s) = y(t)$. Ceci donne:

$$\begin{aligned} x(t) = x(s) &\iff 3(t^3 - s^3) + 2(t^2 - s^2) - (t - s) = 0 &&\iff 3(t^2 + st + s^2) + 2(t + s) - 1 = 0 \\ y(t) = y(s) &\iff 3(t^2 - s^2) + 2(t - s) = 0 &&\iff 3(t + s) + 2 = 0 \end{aligned}$$

On pose $S = t + s$ ce qui donne $3S + 2 = 0$ i.e. $S = -2/3$. La première équation donne

$$3((t+s)^2 - st) = 1 - 2S \quad \iff \quad st = \frac{2S - 1 + 3S^2}{3} \quad \iff \quad st = -1/3$$

d'où s, t est solution[5] de $X^2 - (-2/3)X - 1/3 = 0$

Résolution de l'équation du second degré : $X^2 + 2/3X - 1/3 = 0$. $X = \frac{1}{2}(-2/3 \pm \sqrt{4/9 + 4/3})$ et $s = 1/3$; $t = -1$.

[5] Connaissant $s + t = S$ et $st = P$, s et t sont solutions de $X^2 - SX + P = 0$.

Points stationnaires

Rappel : Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée plane définie sur un intervalle I et dérivable sur I. Le point t_0 est régulier si $\gamma'(t_0) \neq 0$. Lorsqu'un point t_0 est stationnaire, on ne peut plus écrire l'équation de la tangente avec le déterminant.

$\Rightarrow$

Question

Lorsque $\gamma'(t_0) = 0$, quelle est l'équation de la tangente à la courbe en t_0 et la position de la courbe par rapport à sa tangente?

- Il peut exister une tangente en un point stationnaire (ce qui sort du contenu de ce cours), et pour la trouver on est amené à utiliser des développements limités d'ordre au moins 2. Ceci fait l'objet du paragraphe suivant qui est hors programme pour le programme des contrôles.
- Dans ce qui suit, on demande de savoir faire quelques calculs de dérivée sur les exemples ; on ne demande pas de savoir la théorie générale.

Méthode

On suppose que γ est dérivable autant de fois que l'on veut. On fait un DL de Taylor:

$$\gamma(t) = \gamma(t_0) + \gamma'(t_0)(t-t_0) + \frac{1}{2}\gamma''(t_0)(t-t_0)^2 + \frac{1}{6}\gamma''(t_0)(t-t_0)^3 + \cdots + \frac{1}{k!}\gamma^{(k)}(t_0)(t-t_0)^k + o(t-t_0)^k$$

Ceci est un développement limité de la courbe γ à l'ordre k. Ainsi, on cherche à obtenir un développement de la courbe en t_0 de la forme:

$$\gamma(t) = \gamma(t_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(t-t_0)^k}{k!}\gamma^{(k)}(t_0).$$

Dans l'expression précédente, certains $\gamma^{(k)}(t_0)$ peuvent être nuls (par exemple si $k = 1$, on a vu qu'alors le point est stationnaire). Soit alors $m < n$ les deux entiers supérieurs ou égaux à 1 tels que $\gamma^{(m)}(t_0)$ et $\gamma^{(n)}(t_0)$ soient linéairement indépendants de sorte que:

Classification

Bref, on suppose avoir fait un DL

$$\gamma(t) = \frac{(t-t_0)^m}{m!}\left|\begin{array}{l} a \\ b \end{array}\right. + \frac{(t-t_0)^n}{n!}\left|\begin{array}{l} a' \\ b' \end{array}\right. + o(t-t_0)^n$$

où les deux vecteurs $\left|\begin{array}{l} a \\ b \end{array}\right.$ et $\left|\begin{array}{l} a' \\ b' \end{array}\right.$ sont linéairement indépendants.

Ceci permet alors de discuter en fonction des entiers m et n la tangente à la courbe en t_0 ainsi que sa position par rapport à celle-ci:

Propriété

- m impair n impair : point d'inflexion (Exemple: (t, t^3))
- m impair et n pair : cas standard (point banal) (Exemple: (t, t^2))
- m pair et n impair : point de rebroussement de première espèce (Exemple : (t^2, t^5)) : on rebrousse et on traverse la tangente.
- m pair et n pair : points de rebroussement de seconde espèces (Exemple : $(t^2, t^2 + 2t^4)$) : on rebrousse et on ne traverse pas la tangente.

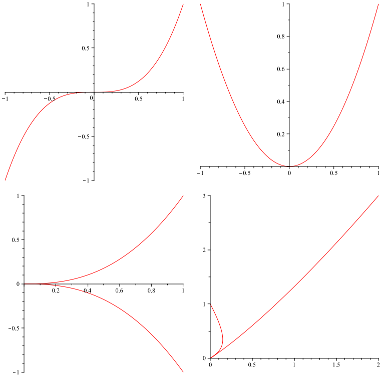


Figure: Inflexion (t, t^3) ; cas standard (t, t^2) ; rebroussement première espèce (t^2, t^5) ; rebroussement seconde espèce $(t^2, t^2 + 2t^4)$

Plan d'étude d'une courbe

- Domaine de définition D
- Période (pour réduire D si possible)
- Tableau de variation
- Points doubles
- Points singuliers
- Asymptotes éventuelles

Astroide

Rappels: pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$
\begin{aligned}
\cos(t+2\pi) &= \cos t & \sin(t+2\pi) &= \sin t \\
\cos(\pi+t) &= -\cos t & \sin(\pi+t) &= -\sin t \\
\cos(\pi-t) &= -\cos t & \sin(\pi-t) &= \sin t \\
\cos(\pi/2+t) &= -\sin t & \sin(\pi/2+t) &= \cos t \\
\cos(\pi/2-t) &= \sin t & \sin(\pi/2-t) &= \cos t
\end{aligned}
$$

Astroide

$$(x(t), y(t)) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$$

- La courbe est 2π-périodique : $[-\pi, \pi]$
- Changer $t \to t + \pi$ (symétrie par rapport à l'origine) : $[0, \pi]$
- Faire $t \to \pi - t$: symétrie par rapport à (Oy) : $[0, \pi/2]$

D'où étude sur $[0, \pi/2]$. Vecteur vitesse:

$$(x'(t), y'(t)) = (-3\cos^2 t \sin t, 3\sin^2 t \cos t) = 3\cos t \sin t(-\cos t, \sin t)$$

Les points singuliers sont donc lorsque cos ou sin s'annule c.a.d. en $k\pi/2$, $k \in \mathbb{Z}$. Par la périodicité + symétrie, on regarde juste[6] en $t = 0$:

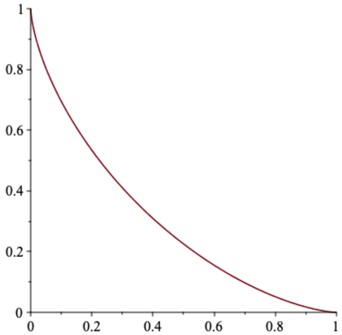
$$(x'(t), y'(t)) \sim (-3t, 3t^2)$$

d'où une pente horizontale. On trace sur $[0, \pi/2]$ et on complète par symétrie.

[6] En 0, on a le DL : $x'(t) = -3\cos^2 t \sin t = -3t + o(t^2)$; $y'(t) = 3\sin^2 t \cos t = 3t^2 + o(t^2)$

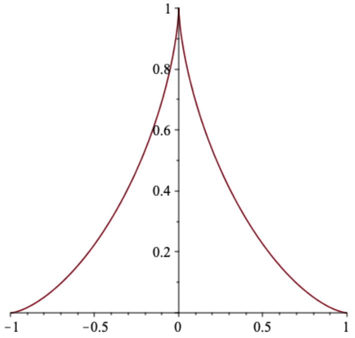
Astroïde

$$plot\left(\left[\cos(t)^3, \sin(t)^3, t=0\,..\,\frac{\mathrm{Pi}}{2}\right]\right);$$



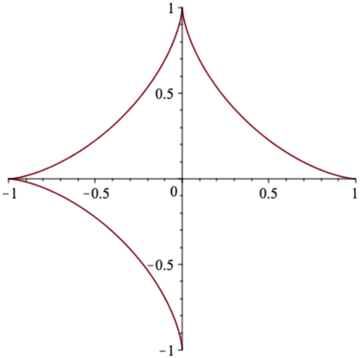
Astroïde

$plot([\cos(t)^3, \sin(t)^3, t=0..\mathrm{Pi}]);$



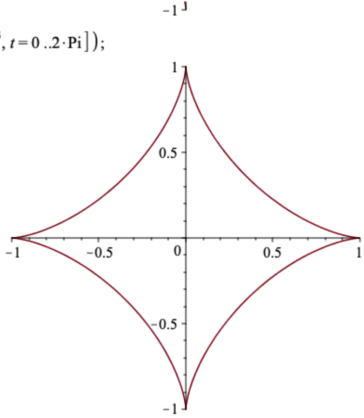
Astroïde

$$plot\left(\left[\cos(t)^3, \sin(t)^3, t=0\,..\,\frac{3\cdot \mathrm{Pi}}{2}\right]\right)$$



Astroïde

$plot([\cos(t)^3, \sin(t)^3, t = 0..2 \cdot \mathrm{Pi}]);$



Conclusion : ce qu'il faut savoir faire dans ce chapitre

- Calculer l'équation de la tangente dans le cas où $\gamma'(t_0) \neq 0$
- Calculer les points doubles
- Représenter des courbes (pas trop dures).

Exercice fondamentaux à chercher : 1, 2, 3, 4, 5, 6