Université d'Avignon - UFR-ip Sciences — Année 2019-2020

L1 Physique-chimie — UE Math 2

I. CALCUL DIFFÉRENTIEL

Les notions de dérivées et différentielles sont essentielles dans l'étude de la physique ; on les rencontre d'abord lors de la mise en équation d'un phénomène, puis dans l'étude de ses variations. Par exemple :

- en mécanique, on utilise la notion de dérivée pour introduire la vitesse et l'accélération ; ensuite, on utilise le principe fondamental de la dynamique pour obtenir une équation différentielle vérifiée par la position du point matériel étudié ;
- de nombreux phénomènes physique décrivant un état (chaleur, altitude, ...) en fonction du temps et de la position mènent à l'étude d'une équation aux dérivées partielles (EDP en abrégé) ;
- n'oublions pas que la dérivée et la différentielle permettent le calcul d'incertitudes et de "petites variations".

1 Notions de dérivées

1.1 Dérivée d'une courbe paramétrée, vecteur tangent

On appelle courbe paramétrée une application $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ définie par

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)).$$

On dit que t est le paramètre et $\gamma(I)$ (l'image de l'intervalle I par γ) est le graphe de la courbe. La courbe est continue lorsque l'application γ est continue. Definition. Une application (courbe) $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ définie par

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$$

est $\boxed{\textit{dérivable}}$ en un point $t_0 \in I$ si la limite suivante existe

$$\gamma'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{1}{t - t_0}(\gamma(t) - \gamma(t_0)) = (\gamma_1'(t_0), \dots, \gamma_n'(t_0)).$$

On l'appelle alors la $\boxed{\textit{dérivée}}$ (ou $\boxed{\textit{vecteur tangent}}$ ou $\boxed{\textit{vecteur dérivé}}$) de γ en t_0.
En physique, on parle aussi de *trajectoire* pour γ et de *vitesse* pour γ'.

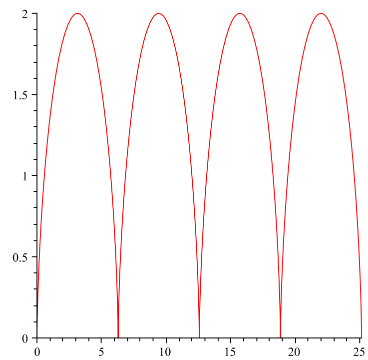

Figure 1 – Cycloïde avec $R = v = 1$ sur plusieurs périodes. On note un point de rebroussement de première espèces avec pente infini en chaque $2k\pi$.

Notations. En physique, on note souvent le vecteur dérivé $\boxed{\dot{\gamma}}$ au lieu de γ'.

Exemple. (1) Par exemple, la dérivée de la courbe $t \in \mathbb{R} \mapsto (t, t^2, t^3) \in \mathbb{R}^3$ en t_0 est le vecteur tangent à la courbe en $\gamma(t_0)$:

$$\gamma'(t_0) = (1, 2t_0, 3t_0^2).$$

(2) La cycloide : c'est une courbe obtenue en regardant la trajectoire d'un point M sur la roue d'un vélo (qui avance sans glissement avec vitesse v et on pose $\omega := v/R$) ; faire un dessin). Son équation paramétrée devient :

$$\gamma(t) = \begin{cases} x(t) = R(\omega t - \sin(\omega t) \\ y(t) = R - R\cos\omega t \end{cases} \quad \Rightarrow \; \gamma'(t) = (R\omega - R\omega\cos(\omega t), R\sin(\omega t)),$$

où R est le rayon de la roue et v est la vitesse du vélo. (Chercher à montrer l'équation de la courbe en utilisant que la roue du vélo a pour rayon R, la vitesse angulaire de la roue est ω, et que comme il n'y a pas de glissement alors la longueur parcourue par le point "bas" durant un instant t vaut exactement $R\omega t$, l'arc de cercle). On notera qu'il y a un point de rebroussement en chaque $t_k = 2k\pi$, $t \in \mathbb{Z}$ (pour $\omega = 1$).

Remarque. Avec les notations précédentes, γ est dérivable en t_0 si et seulement si $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ le sont.

Proposition 1 *Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ une courbe et $t_0 \in I$. Alors γ est dérivable en t_0 de dérivée $\gamma'(t_0)$ si et seulement elle admet le développement limité suivant*

$$\gamma(t) = \gamma(t_0) + (t - t_0)\gamma'(t_0) + o_{t\to t_0}(t - t_0).$$

Il est parfois commmode d'utiliser des notations complexes, par exemple en électricité (nous reparlerons de nombres complexes dans le chapitre 2). On peut en effet identifier le plan soit à $\mathbb{R}^2$ via des coordonnées cartésiennes, soit à $\mathbb{C}$, via la correspondance entre $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$ par

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x + iy \in \mathbb{C}.$$

Exemple. Par exemple, on peut définir la courbe $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ par $\gamma(t) = \cos t + i \sin t$. Alors sa dérivée est donnée par

$$\dot{\gamma}(t) = -\sin t + i \cos t,$$

ce qui correspond au développement limité suivant.

$$\gamma(t) = \gamma(t_0) + (t - t_0)(-\sin t_0 + i \cos t_0) + o_{t\to t_0}(t - t_0).$$

Question. Comment se représente la courbe γ de l'exemple précédent ? Même question avec $t \in \mathbb{R} \mapsto (2\cos 4t, \sin 4t - 1)$; $t \in \mathbb{R} \mapsto (t, t^2)$; $t \mapsto (\cos(2t), \sin(2t))$ avec $t \in [0, 2\pi]$?

1.2 Equation de la tangente à une courbe plane

Definition. Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée plane définie sur un intervalle I. Si γ est dérivable en $t_0 \in I$ et si $\gamma'(t_0) \neq (0, 0)$, la *tangente à la courbe au point* $\gamma(t_0)$ est la droite passant par $\gamma(t_0)$ et de vecteur directeur $\gamma'(t_0)$.

Proposition 2 *Soit $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe plane paramétrée définie sur un intervalle I. Si γ est dérivable en $t_0 \in I$ et si $\gamma'(t_0) \neq (0, 0)$, l'équation de la tangente à la courbe au point $\gamma(t_0)$ est*

$$\det \begin{pmatrix} x - \gamma_1(t_0) & \gamma_1'(t_0) \\ y - \gamma_2(t_0) & \gamma_2'(t_0) \end{pmatrix} = 0$$

c-à-d

$$(y - \gamma_2(t_0))\gamma_1'(t_0) - (x - \gamma_1(t_0))\gamma_2'(t_0) = 0.$$

Exemples.

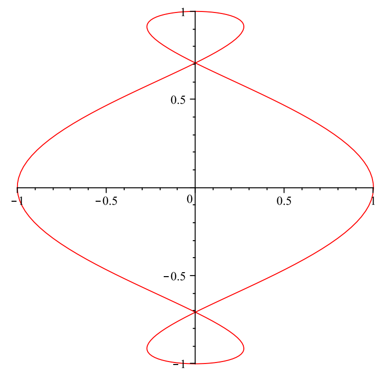

FIGURE 2 – Courbe de Lissajou : $t \in [0, 2\pi] \mapsto (\sin t \cos(2t), \cos t)$. Pour $t = \pi/4$ et $t = 2\pi - \pi/4$, on trouve deux fois le point de coordonnées $(0, 1)$ qui est donc un point double

1. La courbe $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ par $\gamma(t) = \cos t + i \sin t$ admet en $\gamma(t_0)$ pour tangente la droite d'équation
$$y \sin t_0 + x \cos t_0 = 1.$$
2. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction numérique et soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ la courbe paramétrée définie par $\gamma(t) = (t, f(t))$. Par définition, l'ensemble des points $\gamma(t)$ est la courbe représentative de la fonction f. Si f est dérivable en t_0, alors $\gamma'(t_0) = (1, f'(t_0)) \neq (0, 0)$ et la tangente à la courbe a pour équation $y - f(t_0) - (x - t_0)f'(t_0) = 0$, qui est bien l'équation de la tangente à la courbe représentative.

DEFINITION. Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée plane définie sur un intervalle I et dérivable sur I.
(i) On dit que t_0 est **régulier** si $\gamma'(t_0) \neq 0$.
(ii) On dit que t_0 est un point stationnaire (ou que la courbe est **stationnaire** en t_0) si $\gamma'(t_0) = (0, 0)$.
(iii) On dit qu'un point de la courbe est un point double si il existe $s, t \in I$ avec $s \neq t$ tels que $\gamma(s) = \gamma(t)$ (autrement dit, le point est atteint pour deux valeurs distinctes du paramètre.

Exemple : $t \in [0, 2\pi] \mapsto (\sin t \cos(2t), \cos t)$: faire $t = \pi/4$ et $t = 2\pi - \pi/4$.

REMARQUE. Il peut exister une tangente en un point stationnaire (ce qui sort du contenu de ce cours), et pour la trouver on est amené à utiliser des développements limités d'ordre au moins 2. Ceci fait l'objet du paragraphe suivant qui est hors programme pour le programme des contrôles.

1.3 Points réguliers

Dans cette sous-section, on demande de savoir faire quelques calculs de dérivée sur les exemples ; on ne demande pas de savoir la théorie générale.

Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée plane définie sur un intervalle I et dérivable sur I. On dit que t_0 est régulier si $\gamma'(t_0) \neq 0$. Lorsqu'un point t_0 est stationnaire, on ne peut plus écrire l'équation de la tangente comme précédemment. On cherche à répondre à la question suivante :

Lorsque $\gamma'(t_0) = 0$, quelle est l'équation de la tangente à la courbe en t_0 et la position de la courbe par rapport à sa tangente ?

On suppose que γ est dérivable autant de fois que l'on veut. On fait un DL de Taylor :

$$\gamma(t) = \gamma(t_0) + \gamma'(t_0)(t-t_0) + \frac{1}{2}\gamma''(t_0)(t-t_0)^2 + \frac{1}{6}\gamma''(t_0)(t-t_0)^3 + \cdots + \frac{1}{k!}\gamma^{(k)}(t_0)(t-t_0)^k + o(t-t_0)^k$$

Ceci est un développement limité de la courbe γ à l'ordre k. Ainsi, on cherche à obtenir un développement de la courbe en t_0 de la forme :

$$\gamma(t) = \gamma(t_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(t-t_0)^k}{k!}\gamma^{(k)}(t_0).$$

Dans l'expression précédente, certains $\gamma^{(k)}(t_0)$ peuvent être nuls (par exemple si $k = 1$, on a vu qu'alors le point est stationnaire). Soit alors $m < n$ les deux entiers supérieurs ou égaux à 1 tels que $\gamma^{(m)}(t_0)$ et $\gamma^{(n)}(t_0)$ soient linéairement indépendants de sorte que l'on peut écrire un développement de γ sous la forme

$$\gamma(t) = \frac{(t-t_0)^m}{m!} \left| \begin{array}{l} a \\ b \end{array} \right. + \frac{(t-t_0)^n}{n!} \left| \begin{array}{l} a' \\ b' \end{array} \right. + o(t-t_0)^n$$

où les deux vecteurs $\left| \begin{array}{l} a \\ b \end{array} \right.$ et $\left| \begin{array}{l} a' \\ b' \end{array} \right.$ sont linéairement indépendants.

Ceci permet alors de discuter en fonction des entiers m et n la tangente à la courbe en t_0 ainsi que son positionnement par rapport à celle-ci :

1. m impair n impair : point d'inflexion (Exemple : (t, t^3))
2. m impair et n pair : cas standard (point banal) (Exemple : (t, t^2))
3. m pair et n impair : point de rebroussement de première espèce (Exemple : (t^2, t^5)) : on rebrousse et on traverse la tangente.
4. m pair et n pair : points de rebroussement de seconde espèces (Exemple : $(t^2, t^2 + 2t^4)$) : on rebrousse et on ne traverse pas la tangente.

Plan d'étude d'une courbe :

- domaine de définition
- période

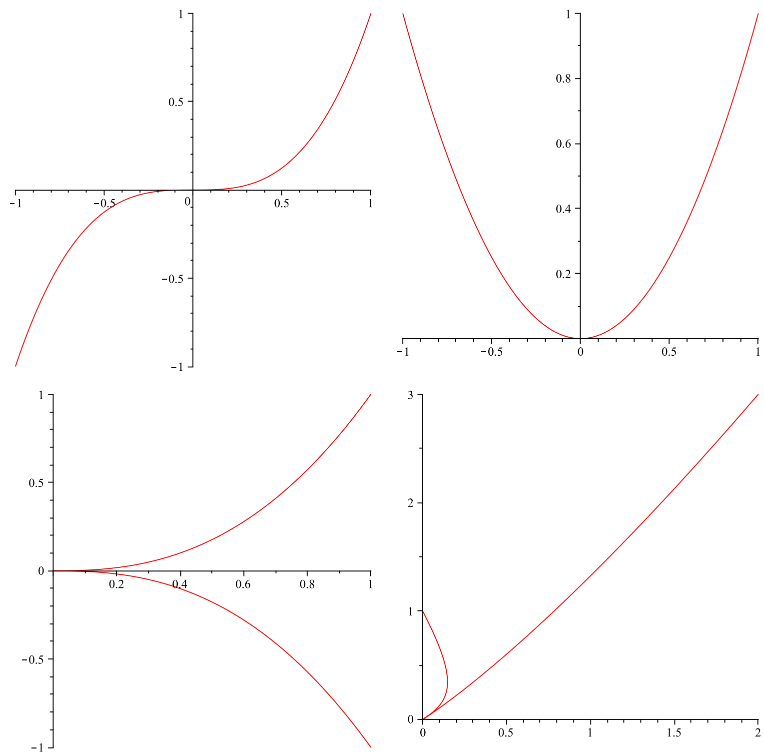

FIGURE 3 – Inflexion (t, t^3) ; cas standard (t, t^2) ; rebroussement première espèce (t^2, t^5) ; rebroussement seconde espèce $(t^2, t^2 + 2t^4)$

- tableau de variation
- points doubles
- points singuliers
- asymptotes

....

1.4 Exemple : astroide

$$(x(t), y(t)) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$$

La courbe est 2π-périodique ; changer $t \to t + \pi$ (symétrie par rapport à l'origine) ; faire $t \to \pi - t$: symétrie par rapport à (Oy) ; puis changer $t \to \pi/2 - t$: symétrie par rapport à la première bissectrice. D'où étude sur $[0, \pi/4]$.

$$(x'(t), y'(t)) = (-3\cos^2 t \sin t, 3\sin^2 t \cos t) = 3\cos t \sin t(-\cos t, \sin t)$$

Les points singuliers sont donc lorsque cos ou sin s'annule c.a.d. en $k\pi/2$, $k \in \mathbb{Z}$. Par la périodicité + symétrie, on regarde juste en $t = 0$:

$$(x'(t), y'(t)) \sim (-3t, 3t^2)$$

d'où une pente horizontale. On trace sur $[0, \pi/4]$ et on complète par symétrie.

2 Fonctions de plusieurs variables, limites et continuité

Le contenu de cette section est purement informatif, il n'y aura aucun exercice et aucun contrôle dessus.

Definition. Soit $d \in \mathbb{N}^*$ un entier. On appelle $\boxed{\textit{distance}}$ entre deux points $X = (x_1, \ldots, x_d)$ et $Y = (y_1, \ldots, y_d)$ de $\mathbb{R}^d$ la quantité :

$$D(X, Y) = \|Y - X\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{d} (y_i - x_i)^2}.$$

Exemple. Par exemple, si $d = 2$: $D(X, Y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$.

Definition. Si $\rho > 0$ et $X_0 \in \mathbb{R}^d$, la $\boxed{\textit{boule ouverte}}$ de centre X_0 et de rayon ρ est :

$$B(X_0, \rho) = \{X \in \mathbb{R}^d; D(X, X_0) < \rho\}.$$

Exemple. Par exemple, si $d = 2$, une boule ouverte est ce qu'on appelle usuellement un disque ouvert.

Definition. une partie Ω de $\mathbb{R}^d$ est dite $\boxed{\textit{ouverte}}$ si en chaque point X_0 de Ω, il existe une boule ouverte $B(X_0, \rho)$ centrée en X_0 contenue dans Ω.

En termes plus imagés, dans un ouvert, il y a un peu d'espace autour de chaque point.

Exemples. **1.** pour $d = 1$, les intervalles ouverts sont des ouverts de $\mathbb{R}$;
2. on montre qu'un produit (cartésien) d'ouverts est un ouvert ; ainsi, un rectangle $]a, b[\times]c, d[$ de $\mathbb{R}^2$ est un ouvert ; une réunion d'ouverts est aussi un ouvert ; une intersection finie d'ouverts est un ouvert ;
3. une droite de $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{R}^3$ n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{R}^3$: elle ne contient aucune boule ouverte.

DEFINITION. Soit $d \geq 2$; on appelle $\boxed{\textit{fonction de } d \textit{ variables}}$ une fonction définie sur une partie ouverte (et non vide) de $\mathbb{R}^d$.

REMARQUE. il nous arrivera parfois de considérer des fonctions définies sur des parties non ouvertes de $\mathbb{R}^d$ (par exemple une fonction définie sur un rectangle fermé, i.e. le rectangle ouvert auquel on a rajouté son "bord") ; rigoureusement, avec notre définition, ce n'est pas une fonction de plusieurs variables.

EXEMPLE. on s'intéresse à une barre de longueur L pendant un intervalle de temps $[a, b]$; on note $x \in [0, L]$ l'abscisse d'un point de la barre et $t \in [a, b]$ l'instant considéré et on note $T(x, t)$ la température en ce point au temps t ; la fonction T est donc définie sur l'ensemble $[0, L] \times [a, b]$ qui n'est pas ouvert ; par contre, l'ensemble $\Omega =]0, L[\times]a, b[$ étant un ouvert de $\mathbb{R}^2$, la restriction de T à Ω est une fonction de deux variables réelles.

DEFINITION. Soit $f : U \to \mathbb{R}^n$ une fonction définie sur une partie U de $\mathbb{R}^d$; soit $x_0 \in \mathbb{R}^d$ et $\ell \in \mathbb{R}^n$; on dit que f admet ℓ comme $\boxed{\textit{limite}}$ en x_0 et on écrit :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x_0} f = \ell$$

si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in U, \|x - x_0\| < \alpha \Rightarrow \|f(x) - \ell\| < \varepsilon.$$

Quand $x_0 \in U$, on a automatiquement que $f(x_0) = \ell$ et on dit que f est *continue* en x_0.

REMARQUE. Dans la pratique, on ne se servira jamais explicitement de cette définition, utilisant comme pour les fonctions d'une variables réelles la connaissance de certaines limites classiques et les règles usuelles de calcul : somme de limites, composée de limites,...En particulier, une somme, une composée de fonctions continues est continue...Les polynômes en des fonctions continues sont continues.

EXEMPLES. Les polynômes (de plusieurs variables), les fonctions exp, ln, cos, sin, $\sqrt{\ }$, ...sont des fonctions continues. On en déduit par exemple que la fonction f de trois variables définie par :

$$f(x, y, z) = cos\left(\exp(x + y^3 - \cos z) + xz - \ln y\right)$$

est continue sur son ensemble de définition.

3 Dérivées partielles

DEFINITION. Pour fixer les idées (mais la définition est valable en toute dimension), on suppose que $d = 3$ et que $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ est une fonction de trois variables (Ω est donc un ouvert de $\mathbb{R}^3$). Soit $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ un point de Ω ; on dit que f admet en M_0 une $\boxed{\textit{dérivée partielle par rapport à } x}$

si la fonction φ définie par $\varphi(x) = f(x, y_0, z_0)$ est dérivable en $x = x_0$. Cette dérivée partielle est alors notée : $\frac{\partial f}{\partial x}(M_0) = \varphi'(x_0)$. De même, f admet une dérivée partielle par rapport à y en M_0 si, quand x et z sont fixés égaux à x_0 et z_0, la fonction $(y \to f(x_0, y, z_0))$ admet une dérivée en y_0.
Si on se rappelle quelle est la définition de la dérivée, on a donc :

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{z - z_0}(f(x_0, y_0, z) - f(x_0, y_0, z_0)).$$

Remarque. En pratique, l'étudiant qui sait calculer une dérivée sait calculer une dérivée partielle, puisqu'il s'agit juste d'un calcul de dérivée ; par exemple, pour vous entrainer :

- $\frac{\partial xy^2}{\partial x} = y^2$; $\frac{\partial xy^2}{\partial y} = 2xy$; $\frac{\partial xy^2}{\partial z} = 0$;
- $\frac{\partial \ln(x^2+y^4)}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+y^4}$; $\frac{\partial \ln(x^2+y^4)}{\partial y} = \frac{4y^3}{x^2+y^4}$.

Bien sûr, toutes les propriétés que vous avez vues pour les dérivées passent aux dérivées partielles. Ainsi, une combinaison linéaire de fonctions qui admettent des dérivées partielles admet elle aussi des dérivées partielles, et celles-ci sont combinaisons linéaires des dérivées partielles des fonctions considérées. De même, une composée, un produit de fonctions admettant des dérivées partielle admet elle aussi des dérivées partielles. Enonçons par exemple de façon plus précise le cas de la somme et du produit.
Somme et produit. Soient f et g des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ définies sur un même ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ telles qu'au point $a \in \Omega$, les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$ et $\frac{\partial g}{\partial x_k}(a)$ existent. On a alors.

$$\frac{\partial (f+g)}{\partial x_k}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) + \frac{\partial g}{\partial x_k}(a) \quad \text{et} \quad \frac{\partial (fg)}{\partial x_k}(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)\right) g(a) + f(a)\left(\frac{\partial g}{\partial x_k}(a)\right).$$

Definition. Soit $f\ : \Omega \to \mathbb{R}^n$ une fonction de d variables. On dit qu'elle est $\boxed{\textit{de classe } C^1}$ si elle admet des dérivées partielles suivant toutes ses variables et si ces dérivées partielles sont continues.

Exemple. on reprend l'exemple précédent $f(x, y, z) = xy^2$; on a vu que f admet pour dérivées partielles les trois fonctions :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = y^2; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 2xy; \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 0.$$

Ces trois fonctions, qui sont des polynômes, sont continues ; la fonction f est donc de classe C^1.

Definition. Soit $f\ : \Omega \to \mathbb{R}^n$ une fonction de d variables. On dit que f admet des $\boxed{\text{dérivées partielles secondes}}$ sur Ω si elle admet des dérivées partielles sur Ω et si ces dérivées partielles elles-mêmes admettent des dérivées partielles sur Ω. On écrit alors :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right); \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right).$$

On appelle $\boxed{\textit{fonction de classe } C^2}$ un fonction admettant des dérivées partielles secondes qui sont continues.

Théorème 3 (Théorème de Schwarz) *Soit $f\ : \Omega \to \mathbb{R}^n$ une application de classe C^2, alors :*

$$\forall M \in \Omega, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(M) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(M).$$

C'est grâce à ce théorème que, par la suite, on ne se préoccupera pas de l'ordre dans lequel on écrit les variables par rapport auxquelles on dérive.
On peut bien entendu définir de façon analogue des dérivées partielles de tout ordret (troisièmes. . .).

4 Différentielles et calculs d'erreurs

4.1 La différentielle

Definition. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $f\ : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction de d variables de classe C^1. Soit X_0 un élément de Ω. Alors s'il existe un nombre $r > 0$, d nombres réels $a_1, \dots, a_d$ et une fonction $\varepsilon : B(0, r) \to \mathbb{R}$, continue et nulle en 0 vérifiant

$$\forall H = (h_1, \dots, h_d) \in B(0, r), f(X_0 + H) = f(X_0) + h_1 a_1 + \dots + h_d a_d + \|h\|\varepsilon(h),$$

on dit que l'application f est $\boxed{\text{différentiable en } X_0}$
L'application $\boxed{Df(X_0)}$: $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ définie par

$$Df(X_0)(h_1, \dots, h_d) = h_1 a_1 + \dots + h_d a_d$$

s'appelle alors la $\boxed{\textit{différentielle de } f \textit{ en } X_0}$.

Théorème 4 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $f\ :\Omega\to\mathbb{R}$ une fonction de d variables $x_1,\dots,x_d$ de classe C^1. Soit X_0 un élément de Ω. Alors f est différentiable en X_0 et*
La différentielle de f en X_0 est $Df(X_0)\colon\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ définie par

$$Df(X_0)(h_1,\dots,h_d)=h_1\frac{\partial f}{\partial x_1}(X_0)+\cdots+h_d\frac{\partial f}{\partial x_d}(X_0)$$

Remarque. L'égalité précédente peut s'exprimer sous forme matricielle comme suit.

$$Df(X_0)(h_1,\dots,h_d)=\left(\tfrac{\partial f}{\partial x_1}(X_0),\dots,\tfrac{\partial f}{\partial x_d}(X_0)\right).\begin{pmatrix}h_1\\ .\\ .\\ .\\ h_d\end{pmatrix}.$$

Exemple. On reprend l'exemple $f(x,y,z)=xy^2$. On a alors

$$Df(x_0,y_0,z_0)(h_1,h_2,h_3)=y^2.h_1+2xy.h_2.$$

Definition. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $f\ :\Omega\to\mathbb{R}^n$ une fonction de classe C^1. Notons f_1, …, f_n les fonctions coordonnées de f, de sorte qu'on a $f(x)=(f_1(x),\dots,f_n(x))$ pour chaque x de Ω.
La $\boxed{\textit{différentielle de } f \textit{ en } X_0}$ est l'application $\boxed{Df(X_0)}\colon\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^n$ définie par

$$Df(X_0)(H)=(Df_1(X_0)(H),\dots,Df_n(X_0)(H)).$$

Definition. On appelle *matrice jacobienne de f au point X_0* la matrice à n lignes et d colonne où le coefficient à l'intersection de la i-ème ligne et la j-ième colonne est $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(X_0)$. Cette matrice se note $\boxed{J_f(X_0)}$.

Remarque. On a alors $Df(X_0)(H)=J_f(X_0).\begin{pmatrix}h_1\\ .\\ .\\ .\\ h_d\end{pmatrix}.$

Les résultats concernant les calculs de dérivées se transposent aux dérivées partielles et donc aux différentielles ; en particulier, la différentielle d'une combinaison linéaire de fonctions est égale à la combinaison linéaire avec les mêmes coefficients des différentielles de ces fonctions :

$$D\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i D f_i.$$

Exemples.

1. Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et si $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^1, alors pour tout $(x_1, x_2) \in \Omega$, on a
$$J_f(x,y)) = (\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y));$$
2. pour toute fonction $\gamma : t \mapsto (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ d'un variable réelle de classe C^1 et à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, on a
$$J_\gamma(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1'(t) \\ \gamma_2'(t) \end{pmatrix};$$
3. supposons que la fonction $f : (x,y) \mapsto (f_1(x,y), f_2(x,y))$ soit de classe C^1 et à valeurs dans $\mathbb{R}^2$. On a alors
$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}.$$

Proposition 5 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et soit $H : \Omega \to \mathbb{R}^n$ une fonction de classe C^1 et $(t \in I \to X(t) = (X_1(t), \dots, X_d(t)) \in \Omega)$ une fonction dérivable sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$. Alors la fonction $(t \in I \to H(X(t)))$ est dérivable sur I, et sa dérivée est donnée par :*

$$\forall t \in I, \frac{d}{dt}\left(H(X(t))\right) = DH(X(t))X'(t) = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial H}{\partial x_i}(X(t))\frac{dX_i}{dt}(t).$$

Cette formule permet de calculer en particulier les dérivées partielle de la composée de deux applications de classe C^1 et de démontrer le résultat suivant.

Proposition 6 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et soit $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1. Soit Ω' un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soit $g : \Omega' \to \mathbb{R}^p$ une application de classe C^1. Si $f(\Omega) \subset \Omega'$, alors $g \circ f$ est de classe C^1 et on a pour tout $X_0 \in \Omega$*

$$J_{g\circ f}(X_0) = J_g(f(X_0)).J_f(X_0).$$

Remarque. L'égalité $J_{g\circ f}(X_0) = J_g(f(X_0)).J_f(X_0)$ ressemble beaucoup à la formule $(g\circ f)'(X_0) = g'(f(X_0))f'(X_0)$ qui permet de dériver une composée de fonctions d'une variable : la matrice jacobienne remplace le nombre dérivé.

Enfin, donnons un résultat concernant les extrema que vous connaissez déjà pour les fonctions de la variable réelle :

Proposition 7 *Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 de d variables et X_0 un extremum local de f, c-à-d tel qu'il existe une boule $B(X_0, \rho)$ centrée en X_0 incluse dans Ω telle que :*

- *soit : $\forall X \in B(X_0, \rho); f(X) \leq f(X_0)$ (on a alors un maximum local) ;*
- *soit : $\forall X \in B(X_0, \rho); f(X) \geq f(X_0)$ (on a alors un minimum local) ;*

alors on a : $Df(X_0) = 0$, c-à -d :

$$\forall i = 1, \ldots, d, \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0) = 0.$$

Definition. Un point en lequel Df s'annule s'appelle un $\boxed{\textit{point critique}}$.

4.2 Notions d'erreurs

Le résultat d'une mesure n'est jamais exact, l'$\boxed{\textit{erreur absolue}}$ commise est la valeur absolue de la différence entre la valeur mesurée V_m et la valeur exacte (mais inconnue) V_e : $\boxed{\Delta V = |V_m - V_e|}$. Elle s'exprime avec l'unité correspondant à la grandeur.
L'$\boxed{\textit{erreur relative}}$ est le quotient de l'erreur absolue par la valeur exacte : $\boxed{\frac{\Delta V}{V_e}}$. C'est un nombre sans unité.

L'erreur absolue étant inconnue, il existe certaines méthodes qui permettent de trouver un majorant I_V de cette erreur ; ce majorant s'appelle $\boxed{\textit{incertitude absolue}}$; on lui préfère en général l'$\boxed{\textit{incertitude relative}}$ ou la $\boxed{\textit{précision}}$, qui est un majorant de l'erreur relative $\frac{\Delta V}{V}$.

Du théorème 4, on tire immédiatement qu'une "bonne approximation" de l'erreur $\|f(X) - f(X_0)\|$ est $|Df(X_0)(X - X_0)|$.

Par la suite, on identifiera l'erreur absolue à $|DV(X_0)(X-X_0)|$ et l'erreur relative à $\frac{|DV(X_0)(X-X_0)|}{V(X_0)}$. Le théorème 4 permet de comprendre pourquoi il est naturel de faire ceci. Mais, mathématiquement, ce n'est par rigoureux et il existe des méthodes plus fines qui donnent des majorations exactes de l'erreur (ce sont des méthodes qui utilisent un analogues de l'inégalité des accroissements finis). Ceci n'étant pas le but de ce cours, nous nous contenterons de l'approximation de l'erreur à l'aide de la différentielle.

Exemple. Le volume d'un cône de hauteur h et de base de diamètre δ est donné par : $V = \frac{\pi}{12}\delta^2 h$. On suppose connue les incertitudes relatives I_D et I_h de mesure de D et h ; on cherche une incertitude

relative de V.
Une méthode très utile pour trouver une incertitude relative et d'utiliser la $\boxed{\textit{dérivée logarithmique}}$, i.e. la dérivée (ou la dérivée partielle, ou la différentielle) du logarithme de la fonction ; ceci est recommandé quand la fonction considérée s'exprime comme un produit. Dans notre cas :

$$\frac{\Delta V}{V(\delta, h)} = D(\ln V)(\delta, h)(\Delta\delta, \Delta h) = 2\frac{\Delta\delta}{\delta} + \frac{\Delta h}{h}.$$

Si par exemple l'incertitude relative sur la mesure de h est de 1% et celle sur la mesure de δ de 2%, l'incertitude relative sur la mesure de V est : $5\% = (2 \times 2 + 1)\%$.

QUESTION. Soit $\gamma = (x, y) \to \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée plane définie sur un intervalle I. On suppose qu'il existe une fonction $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $t \in I$, on ait $F(x(t), y(t)) = 0$. Donner une équation de la tangente à la courbe en un point t_0 lorsque cela est possible (discuter).