Exercices du chapitre III - Raisonnements, Ensembles, Dénombrements

Exercice 1. Soit P, Q deux assertions mathématiques.
Montrer à l'aide de tables de vérité les équivalences suivantes :

1. (non(P ou Q)) $\iff$ (non(P) et non(Q)).
2. (non(P et Q)) $\iff$ (non(P) ou non(Q)).
3. (a) ($P \implies Q$) $\iff$ (non(P) ou Q).
   (b) ($P \implies Q$) $\iff$ (non(Q) $\implies$ non(P)).
   (c) Déduire du (a) la négation de ($P \implies Q$).

Exercice 2.

1. Traduire en français courant les propositions mathématiques suivantes :
   (a) $\forall m \in \mathbb{N}^*,\ \exists n \in \mathbb{N}\ ;\ m > n$;
   (b) $\forall p \in \mathbb{Q},\ \forall q \in \mathbb{Q},\ q > p,\ \exists r \in \mathbb{Q}\ ;\ r \in]p, q[$;
2. Traduire en langage mathématique les phrases suivantes :
   (a) un entier relatif est toujours égal à la différence de deux entiers naturels ;
   (b) il n'existe pas de nombre rationnel dont le carré est égal à 2 ;
   (c) la fonction f n'est pas strictement positive sur $\mathbb{R}$;
3. Maman dit à Nicolas : "Si tu ne ranges pas ta chambre, tu n'auras pas de chocolat". Nicolas range sa chambre, mais Maman ne lui donne pas de chocolat. Maman a-t-elle menti ?

Exercice 3. En introduisant les notations adaptées, traduire en langage mathématique puis donner la négation des propositions suivantes :

1. toutes les voitures rapides sont rouges ;
2. toutes les voitures rapides sont polluantes ou chères ;
3. il existe un camion belge dont tous les pneus sont dégonflés.

Exercice 4. Compléter chacune des propositions suivantes avec l'un des connecteurs logiques $\Leftarrow$, $\Rightarrow$ ou $\Leftrightarrow$ de telle sorte qu'elle soit vraie. Lorsque c'est possible, on utilisera $\Leftrightarrow$. On ne demande pas de justifier les réponses.

(a) $\forall x \in \mathbb{R},\ (x^2 = 4\ \ldots\ x = 2)$;
(b) $\forall z \in \mathbb{C},\ (z = \bar{z}\ \ldots\ z \in \mathbb{R})$;
(c) $\forall n \in \mathbb{Z}$, (n^2 est multiple de 4 $\ldots$ n est multiple de 4).

Exercice 5. Pour chacune des propositions P suivantes, écrire leur négation non(P) puis dire en le justifiant si P est vraie ou fausse :

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \leq 0$.
2. $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 \leq 0$.
3. $\forall x \in \mathbb{R},\ |x - 1| \geq 3$ ou $-2 \leq x \leq 4$.
4. $\forall x \in \mathbb{R},\ -|x| \leq x \leq |x|$.
5. $\forall x, y \in \mathbb{R}, \exists c \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $|x^2 - y^2| \leq c|x - y|$.
6. $\exists c \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall x, y \in \mathbb{R},\ |x^2 - y^2| \leq c|x - y|$.
7. $\forall x \in \mathbb{R},\ (x > 1 \Longrightarrow x \geq 1)$.
8. $\forall x \in \mathbb{R},\ (-1 \leq x \leq 1 \Longrightarrow 1 \leq x^2 \leq 1)$.
9. $\forall x \in \mathbb{R}^*, \forall y \in \mathbb{R}^*,\ (x > y \Longrightarrow \frac{1}{x} < \frac{1}{y})$.

Exercice 6. Le but de cet exercice est de démontrer par contraposition la propriété suivante, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

Si l'entier $(n^2 - 1)$ n'est pas divisible par 8, alors l'entier n est pair.

1. Ecrire la contraposée de la proposition précédente.
2. Montrer qu'un entier impair n s'écrit sous la forme $n = 4k + r$ avec $k \in \mathbb{N}$ et $r \in \{1, 3\}$.
3. Prouver la contraposée donnée à la question 1. A-t-on démontré la propriété de l'énoncé ?

Exercice 7. Démontrer le résultat suivant par contraposée ou par l'absurde : l'équation $9x^5-12x^4+6x+5 = 0$ n'a pas de solution entière.

Exercice 8. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Exercice 9. Soit $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ et soient les parties suivantes de E :

$A = \{1, 2, 3, 4\}$;
$B = \{4, 5, 6, 7\}$;
$C = \{1, 3, 5, 7\}$;
$D = \{2, 3, 4, 5, 6\}$.

Calculer $(A \cap B) \cup (C \cap D)$, $(A \cup C) \cap (B \cup D)$, $\complement_E(\complement_E A \cap D) \cap \complement_E(B \cup C)$ et $\mathcal{P}(A)$.

Exercice 10. Soient A, B, C des sous-ensembles d'un ensemble E. Montrer :

1. $A \subset B \Rightarrow A \cup C \subset B \cup C$,
2. $A \subset B \Rightarrow A \cap C \subset B \cap C$,
3. $[A \cup B \subset A \cup C$ et $A \cap B \subset A \cap C] \Rightarrow B \subset C$,
4. $[A \cup B = A \cup C$ et $A \cap B = A \cap C] \Rightarrow B = C$,
5. $A \subset B \iff A \cup B = B \iff A \cap B = A$,
6. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Exercice 11. Les applications suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

$$f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2x+3, \end{array} \qquad f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & n^3, \end{array} \qquad f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3, \end{array}$$

$$f_4 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x^3+y^3, \end{array} \qquad f_5 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (x^3, x^3), \end{array} \qquad f_6 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, x-y) \end{array}$$

Exercice 12. On considère l'application $f : [0, 1] \to [0, 1]$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in [0, \frac{1}{2}[\\ 2x-1 & \text{si} \quad x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

1. Représenter le graphe de f.
2. L'application f est-elle injective ? surjective ? bijective ? (*justifiez vos réponses*)
3. Déterminer $f([\frac{3}{4}, 1])$.
4. Déterminer $f^{-1}(\{0\})$ et $f^{-1}([\frac{3}{4}, 1])$.

Exercice 13.

1. On considère l'application suivante :
$$\begin{array}{rccc} f & : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \frac{x}{1+|x|}. \end{array} \tag{1}$$
   (a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $-1 < f(x) < 1$. Que peut-on en déduire quant à la surjectivité de f ?
   (b) Soit $g : \mathbb{R} \to]-1,1[$ l'application définie par $g(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   Montrer que g est bijective et déterminer son application réciproque g^{-1}.
2. On considère l'application
$$\begin{array}{rccc} p & : \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & y. \end{array}$$
   (a) L'application p est-elle injective ? surjective ? bijective ?
   (b) Soit $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 = 1\}$.
   Déterminer $p(C)$, $p^{-1}(\{0\})$, $p^{-1}(p(C))$.
3. Est-ce qu'on peut définir $(f \circ p)$? Si oui, déterminer l'application $(f \circ p)$.
   Est-ce qu'on peut définir $(p \circ f)$?

Exercice 14.

1. Compléter et rayer `et` ou `ou`, $\forall$ ou $\exists$ dans la preuve suivante :
   Soient E, F des ensembles non vides, f une application de E dans F et A et B deux sous-ensembles non vides de E.
   Soit $y \in f(A \cap B)$. Ceci signifie : $\forall$ / $\exists$ $x \in A \cap B$; $y = f(x)$.
   Or : $x \in A \cap B \iff x \in A$ et / ou $x \in B$.
   On en déduit :
   • $y \in f(A)$ car .... et $x \in A$,
   et / ou
   • $y \in f(B)$ car .... et $x \in B$,
   Finalement, on obtient $y \in f(A) \cap f(B)$.
   On a ainsi montré : .....
2. Compléter et rayer `et` ou `ou` dans la preuve suivante :
   Soient E, F des ensembles non vides, f une application de E dans F et A et B deux sous-ensembles non vides de F.
   Soit $x \in E$.
$$\begin{array}{rcl} x \in f^{-1}(A \cup B) & \iff & \text{........} \in A \cup B \\ & \iff & \text{........} \in A \ \text{ et / ou } \ \text{........} \in B \\ & \iff & \text{........} \in f^{-1}(A) \ \text{ et / ou } \ \text{........} \in f^{-1}(B) \\ & \iff & x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \end{array}$$
   On a ainsi montré : .....

Exercice 15. Soient E et F deux ensembles et soient A et B des sous-ensembles de E. Soit $f : E \to F$. Démontrer que

1. Si $A \subset B$ alors $f(A) \subset f(B)$. La réciproque est-elle vraie ?
2. On rappelle que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$. Montrer que l'égalité est vraie pour tout $A, B \subset E$ si et seulement si f est injective.
3. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

Exercice 16. Soient E et F deux ensembles et soient A et B des sous-ensembles de F. Soit $f : E \to F$. Démontrer que

1. Si $A \subset B$ alors $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$. La réciproque est-elle vraie ?
2. $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

Exercice 17.

1. Calculer $(1+x)^n$ pour $n = 2, 3, 4$.
2. En utilisant la formule du binôme de Newton, appliquée à $(1+x)^n$, calculer :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}, \qquad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}, \qquad \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}.$$

Exercice 18.

1. Combien de menus différents peut-on composer si on a le choix entre 3 entrées, 2 plats et 4 desserts ?
2. Combien d'équipes de 5 joueurs peut-on constituer à partir d'un groupe de 12 personnes ?
3. Combien de podiums possibles (une médaille d'or, une d'argent, une de bronze) peut-il y avoir dans une compétition à 18 sportifs au départ ?

Exercice 19. Combien y a t-il d'anagrammes (mots constitués avec les mêmes lettres mais pas dans le même ordre) différents aux mots suivants :

1. RIOM ;
2. VOLVIC ;
3. VILLENEUVE ?

Exercice 20. Sur une grille, on part du point $(0, 0)$ pour rejoindre le point de coordonnées (p, q) (p, q étant deux entiers de $\mathbb{N}^*$ donnés) en se déplaçant à chaque étape d'une unité vers la droite ou vers le haut. Combien y a t-il de chemins possibles ? (*Indication* : former "un mot" avec les lettres "D" pour droite et "H" pour haut).

Exercice 21. Une main au poker est constituée de 5 cartes parmi 52.

1. Combien y a t-il de mains différentes ?
2. Combien y a t-il de quintes-flush (5 cartes qui se suivent de la même couleur ; les couleurs sont coeur, carreau, trêfle et pique) ?
3. Combien y a t-il de carrés (4 cartes de même valeur) ?
4. Combien y a t-il de fulls (3 cartes de même valeur et 2 cartes de même valeur) ?
5. Combien y a t-il de suites (5 cartes qui se suivent mais de couleurs différentes) ?
6. Combien y a t-il de brelans (3 cartes de même valeur, ni carré, ni full) ?
7. Combien y a t-il de doubles paires (2 fois 2 cartes de même valeur, ni carré, ni full) ?
8. Combien y a t-il de paires (2 cartes de même valeur, mais pas une main précédente) ?

Exercice 22. Un code d'entrée d'immeuble est constitué d'une lettre dans $\{A, B, C\}$ suivi de 3 chiffres (distincts ou non) entre 1 et 6.

1. Combien de codes (différents) peut-on former ?
2. Combien y a t-il de codes sans le chiffre 1 ?
3. Combien y a t-il de codes comportant au moins un chiffre 1 ?
4. Combien y a t-il de codes comportant des chiffres distincts 2 à 2 ?
5. Combien y a t-il de codes comportant au moins deux chiffres identiques ?

Exercice 23. Soit E et F deux ensembles à respectivement n et p éléments (n, $p \in \mathbb{N}^*$).

1. Combien y a t-il de bijections de E dans F ?
2. Donner la liste des bijections de l'ensemble $\{1, 2, 3\}$ dans lui-même.
3. Combien y a t-il d'injections de E dans F ?

Exercice 24. Combien y a t-il de bijections f de $\{1, \ldots, 10\}$ dans lui-même possédant la propriété : si n est pair, alors $f(n)$ est pair ?

Exercice 25.

1. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une partition d'un ensemble E, et soit $\mathcal{R}$ la relation sur E définie par
$$\text{Pour } x, y \in E,\ x\mathcal{R}y \iff \exists i \in I \text{ tel que } x, y \in A_i$$
Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur E, et que pour $x \in A_i$, on a $\mathrm{cl}(x) = A_i$.
2. Soit $E = \{0, 1, 2, 3, 4, a, b, c, x, y\}$ et soient
$$A = \{0, c\},\ B = \{2, 4, a, y\},\ C = \{1\},\ D = \{3, b, x\}$$
   (a) Montrer que (A, B, C, D) est une partition de E.
   (b) Soit $\mathcal{R}$ la relation d'équivalence sur E associée à cette partition (question précédente). Déterminer $\mathrm{cl}(a)$, $\mathrm{cl}(b)$, $\mathrm{cl}(1)$.

Exercice 26. On munit $\mathbb{R}[X]$ de la relation $\mathcal{R}$ définie par
$$P\mathcal{R}Q \iff X^2 + 1 \text{ divise } P - Q \text{ dans } \mathbb{R}[X]$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, il existe un unique polynôme $U \in \mathbb{R}[X]$ de degré plus petit que 1 tel que $P\mathcal{R}U$.

Exercice 27. Soit E un ensemble non vide.

1. Vérifier que la relation d'inclusion est une relation d'ordre sur $\mathcal{P}(E)$.
2. Une relation d'ordre $\mathcal{R}$ sur un ensemble X est dite totale si $\forall x, y \in X$, on a $x\mathcal{R}y$ ou $y\mathcal{R}x$. La relation d'ordre précédente sur $\mathcal{P}(E)$ est-elle totale si E a au moins deux éléments ?

Exercice 28. Que peut-on dire d'une relation binaire $\mathcal{R}$ sur un ensemble non vide E si elle est à la fois une relation d'équivalence et une relation d'ordre ?

Exercices supplémentaires

Exercice 29. Soit x, y, a et b des nombres réels. Pour chacune des implications suivantes, dire si elle est vraie (et le prouver) ou fausse (et donner un contre-exemple).

1. $x < 2 \Rightarrow x^2 > 4$;
2. $(0 < x < y \text{ et } a < b) \Rightarrow xa < yb$;
3. $(xy \neq 0 \text{ et } x < y) \Rightarrow \dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{y}$;
4. $(xy > 0 \text{ et } x < y) \Rightarrow \dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{y}$.

Exercice 30. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Exercice 31. Montrer le résultat suivant par l'absurde : le nombre $\sqrt{2}$ est irrationnel, c'est-à-dire dans $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Exercice 32. Soit E un ensemble et soient A, B, C et D quatre sous-ensembles de E. Montrer que :

1. $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$.
2. $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.
3. $(A \times C) \cup (B \times D) \subset (A \cup B) \times (C \cup D)$. Qu'en est-il de l'inclusion réciproque ?

Exercice 33. Etant donnée une application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on considère la proposition suivante :
P : Il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait $f(x) = c$.

1. Ecrire la négation de la proposition P en utilisant les symboles mathématiques.
2. Parmi les propositions suivantes, dire celles qui sont équivalentes à P :
   (a) P_2 : $\exists x \in \mathbb{R}$ tel que $\forall c \in \mathbb{R},\ f(c) = x$.
   (b) P_3 : $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists c \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = c$.
   (c) P_4 : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(0)$.
   (d) P_5 : $\exists y \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(y)$.
   (e) P_6 : $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = f(y)$.

Exercice 34. On considère l'énoncé suivant : *Soit a un réel non nul et n un entier tel que $n \geq 1$. Alors on a : $a^{n-1} = 1$.*
Déterminer précisément l'erreur de raisonnement dans la démonstration correspondante :
On raisonne par récurrence sur l'entier n.
Pour tout entier $n \geq 1$, on note $P(n)$ la propriété : $a^{n-1} = 1$.
La propriété $P(1)$ est vraie car $a^{1-1} = a^0 = 1$.
Soit n un entier de $\mathbb{N}^*$ tel que les propritétés $P(k)$ soient vraies pour $k = 1, 2, \ldots, n$.
Montrons qu'alors $P(n+1)$ est vraie.
On a : $a^{(n+1)-1} = a^n = \frac{a^{n-1} \times a^{n-1}}{a^{n-2}}$.
Or, d'après l'hypothèse de récurrence, on a $a^{n-1} = 1$ car $P(k)$ est vraie pour $k = n$ et $a^{n-2} = 1$ car $P(k)$ est vraie pour $k = n - 1$.
On en déduit $a^{(n+1)-1} = \frac{1 \times 1}{1} = 1$ et $P(n+1)$ est vraie.

Exercice 35. On considère l'application

$$\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \longmapsto & x^2 + y^2. \end{array}$$

1. L'application f est-elle injective ? surjective ? bijective ?
2. Soit $A = \{(\cos(\theta), \sin(\theta)) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \theta \in [0, \frac{\pi}{4}]\}$ et $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \leq x \leq 1,\ y = 1\}$.
   Déterminer $f(A)$, $f(B)$, $f^{-1}(\{0\})$, $f^{-1}([0, 1])$.

Exercice 36. Soient E et F deux ensembles et soit $f : E \to F$. Montrer que

1. Pour tout $B \subset F,\ f(f^{-1}(B)) = B \cap f(E)$.
2. f est surjective si et seulement si pour tout $B \subset F,\ f(f^{-1}(B)) = B$.
3. f est injective si et seulement si pour tout $A \subset E,\ f^{-1}(f(A)) = A$.

Exercice 37. Soit $n \in \mathbb{N}$. On munit $\mathbb{Z}$ de la relation $\mathcal{R}_n$ définie par

$$\forall m, p \in \mathbb{Z},\ m \,\mathcal{R}_n\, p \iff n | (m - p) \text{ dans } \mathbb{Z}$$

1. Montrer que $\mathcal{R}_n$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$.
2. Montrer que pour tout entier $m \in \mathbb{Z}$, il existe un unique $l \in \{0, \ldots, n-1\}$ tel que $m \,\mathcal{R}_n\, l$.
3. Montrer qu'il existe une bijection entre $\{0, \ldots, n-1\}$ et $\mathbb{Z}/\mathcal{R}_n$.

Pour $m, p \in \mathbb{Z}$, on note $m \equiv p\ [n]$ lorsque $m \,\mathcal{R}_n\, p$ et on dit que m **et** p **sont congrus modulo** n**.** Montrer que pour $m, m', p, p' \in \mathbb{Z}$, on a

$$(m \equiv m'\ [n] \text{ et } p \equiv p'\ [n]) \Rightarrow m + p \equiv m' + p'\ [n] \text{ et } mp \equiv m'p'\ [n]$$

En déduire qu'un entier naturel est divisible par 9 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 9.