Fiche du chapitre I - Fonctions d'une variable réelle

Ensemble de définition d'une fonction f

C'est l'ensemble des réels x tels que l'expression $f(x)$ a un sens.
Méthode pour déterminer l'ensemble de définition d'une fonction :

- ✓ s'il y a une racine carrée (du type $\sqrt{A(x)}$), l'expression $A(x)$ (sous la racine) doit être positive ou nulle : on élimine les valeurs de x telles que $A(x) < 0$;
- ✓ s'il y a un dénominateur du type $\dfrac{B(x)}{C(x)}$, l'expression $C(x)$ (par laquelle on divise) doit être non nulle : on élimine les valeurs de x telles que $C(x) = 0$;
- ✓ s'il y a un logarithme (du type $\ln(D(x))$ ou $\log(D(x))$), l'expression $D(x)$ (dont on prend le logarithme) doit être strictement positive : on élimine les valeurs de x telles que $D(x) \leqslant 0$.

Composée de fonctions

On note $g \circ f$ la fonction définie par $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.
Attention ! En général, $g \circ f \neq f \circ g$.

Sur les fonctions logarithme et exponentielle

- ✓ Si $x > 0$, $\log(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(10)}$.
- ✓ Pour x réel, $10^x = e^{x\ln(10)}$.

- ✓ Si $x > 0$ et $y > 0$, $\boxed{\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y).}$ (et de même $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$)
- ✓ Si $x > 0$ et α réel, $\boxed{\ln(x^\alpha) = \alpha \ln(x).}$ (et de même $\log(x^\alpha) = \alpha \log(x)$)
- ✓ En particulier, si $x > 0$, $\ln(\frac{1}{x}) = -\ln(x)$. (et de même $\log(\frac{1}{x}) = -\log(x)$)
- ✓ Si $x > 0$ et $y > 0$, $\ln(\frac{x}{y}) = \ln(x) - \ln(y)$. (et de même $\log(\frac{x}{y}) = \log(x) - \log(y)$)

- ✓ Pour x et y réels, $\boxed{e^{x+y} = e^x e^y.}$ (et de même $10^{x+y} = 10^x 10^y$)
- ✓ Pour tout x réel, $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$. (et de même $10^{-x} = \frac{1}{10^x}$)
- ✓ Pour x et y réels, $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$ (et de même $10^{x-y} = \frac{10^x}{10^y}$)

- ✓ Pour x réel, $\ln(e^x) = x$. (et de même, $\log(10^x) = x$)
- ✓ Pour $x > 0$, $e^{\ln(x)} = x$. (et de même, $10^{\log(x)} = x$)
- ✓ On a $\boxed{\ln(x) = y \text{ si et seulement si } x = e^y.}$ (et de même, $\boxed{\log(x) = y \text{ si et seulement si } x = 10^y}$)

Sur les fonctions puissances

Pour α réel, pour $x > 0$, on a par définition $\boxed{x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}.}$
Pour $x > 0$, et pour α et β réels, on a les relations :

$$x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta, \qquad x^{-\alpha} = \frac{1}{x^\alpha} = \left(\frac{1}{x}\right)^\alpha, \qquad x^{\alpha-\beta} = \frac{x^\alpha}{x^\beta}, \qquad x^{\alpha\beta} = \left(x^\alpha\right)^\beta = \left(x^\beta\right)^\alpha.$$

Calcul de dérivées

fonction f	dérivée f'
α (constante)	0
x^α	$\alpha\, x^{\alpha-1}$
e^x	e^x
$\mathrm{e}^{\alpha x}$	$\alpha\, \mathrm{e}^{\alpha x}$
α^x $(\alpha > 0)$	$\ln(\alpha)\, \alpha^x$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$

fonction f	dérivée f'
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$1+\tan^2(x)$
$\mathrm{sh}(x)$	$\mathrm{ch}(x)$
$\mathrm{ch}(x)$	$\mathrm{sh}(x)$

fonction f	dérivée f'
$\alpha\, u(x)$	$\alpha\, u'(x)$
$u(x)+v(x)$	$u'(x)+v'(x)$
$u(x)v(x)$	$u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$
$\frac{1}{u(x)}$	$-\frac{u'(x)}{u(x)^2}$
$\frac{u(x)}{v(x)}$	$\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v(x)^2}$

fonction f	dérivée f'
$\sqrt{u(x)}$	$\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$
$\ln(u(x))$	$\frac{u'(x)}{u(x)}$
$\mathrm{e}^{u(x)}$	$u'(x)\, \mathrm{e}^{u(x)}$
$u(x)^\alpha$	$\alpha\, u'(x)\, u(x)^{\alpha-1}$
$v(u(x))$	$v'(u(x)) \times u'(x)$

La *tangente* à la courbe représentative de f au point $(x_0, f(x_0))$ est la droite passant par le point $(x_0, f(x_0))$ de pente $f'(x_0)$. Son équation est :

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Étude de fonctions

Méthode générale pour étudier une fonction f :

(i) on détermine l'ensemble de définition ;

(ii) on calcule la dérivée f' ;

(iii) on fait un tableau de signes de la fonction f' ;

(iv) on en déduit le tableau de variations de la fonction f ;

(v) on détermine les valeurs (ou les limites) aux bornes de l'ensemble de définition, et on complète le tableau de variations ;

(vi) on trace la courbe représentative de la fonction f.