Fiche du chapitre III - intégrales et primitives

A-Primitives

- ✓ Si f est une fonction continue sur un intervalle I, une **primitive** de f est une fonction F dérivable vérifiant $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$;
- ✓ Si f est une fonction continue sur I, et si F est une primitive de f, alors toutes les primitives de f sont de la forme $x \mapsto F(x) + c$, où c est une constante réelle.
- ✓ Soit f une fonction continue sur I, soit $x_0 \in I$ et $a \in \mathbb{R}$. Il existe une unique primitive F de f sur I qui vérifie $F(x_0) = a$.

Primitives de fonctions usuelles

fonction f	une primitive F
α (constante)	$\alpha\, x$
x	$\dfrac{x^2}{2}$
x^α $(\alpha \neq -1)$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln(x)$ (sur $]0;+\infty[$)
e^x	e^x
$\mathrm{e}^{\alpha x}$ $(\alpha \neq 0)$	$\dfrac{1}{\alpha}\mathrm{e}^{\alpha x}$

fonction f	une primitive F
$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\mathrm{sh}(x)$	$\mathrm{ch}(x)$
$\mathrm{ch}(x)$	$\mathrm{sh}(x)$
$\ln(x)$	$x\ln(x) - x$

Calcul de primitives : reconnaissance d'une dérivée de fonctions composées

Si $f(x) = u'(x)g(u(x))$, et si G est une primitive de g, alors la fonction $F(x) = G(u(x))$ est une primitive de f.

Quelques applications :

fonction f	une primitive F
$\dfrac{u'(x)}{u(x)^2}$	$\dfrac{-1}{u(x)}$
$\dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$	$2\sqrt{u(x)}$
$u(x)^\alpha\, u'(x)$ $(\alpha \neq -1)$	$\dfrac{1}{\alpha+1}u(x)^{\alpha+1}$

fonction f	une primitive F
$\dfrac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln(u(x))$ (si $u(x) > 0$ sur I)
$u'(x)\,\mathrm{e}^{u(x)}$	$\mathrm{e}^{u(x)}$
$G'(u(x))u'(x)$	$G(u(x))$

Calcul de primitives : primitivation par parties

Si $f(x) = u'(x)v(x)$, alors on a $f(x) = \Big(u(x)v(x)\Big)' - u(x)v'(x)$. Si $H(x)$ est une primitive de $h(x) = u(x)v'(x)$, alors la fonction $F(x) = u(x)v(x) - H(x)$ est une primitive de $f(x)$.
Exemple : sur $]0; +\infty[$, $\ln(x) = 1 \cdot \ln(x) = (x)' \cdot \ln(x) = \Big(x\ln(x)\Big)' - x \cdot \dfrac{1}{x} = \Big(x\ln(x)\Big)' - \Big(x\Big)' = \Big(x\ln(x) - x\Big)'$, donc la fonction $x \mapsto x\ln(x) - x$ est une primitive de la fonction ln.

B-INTÉGRALES

Lien avec les primitives et propriétés

✓ Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. Soit F une primitive de f. Alors on a

$$\int_a^b f(t)dt = \Big[F(t)\Big]_a^b = F(b) - F(a).$$

✓ Si f est continue sur un intervalle I contenant a, la primitive de f qui s'annule en a est la fonction

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

✓ Si f et g sont des fonctions continues sur $[a,b]$, et si $k \in \mathbb{R}$, on a

$$\int_a^b (f(t) + g(t))dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt \qquad \int_a^b kf(t)dt = k\int_a^b f(t)dt.$$

✓ On a la relation de Chasles :

$$\int_a^c f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt.$$

Calcul d'intégrales : reconnaissance d'une dérivée de fonctions composées

Si $f(x) = u'(x)g(u(x))$, et si G est une primitive de g, alors

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b u'(x)g(u(x))dx = \Big[G(u(x))\Big]_a^b = G(u(b)) - G(u(a)).$$

Remarque : cette expression est donc égale à $\displaystyle\int_{u(a)}^{u(b)} g(t)dt$.

Calcul d'intégrales : intégration par parties

Si $f(x) = u'(x)v(x)$, alors on a

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b u'(t)v(t)dt = \Big[u(t)v(t)\Big]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt.$$

Cette formule est intéressante lorsque $\displaystyle\int_a^b u(t)v'(t)dt$ est plus simple à calculer que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b u'(t)v(t)dt$.