Cálculo Vetorial e Geometria Analítica - 3^a Avaliação

Justifique suas respostas detalhadamente.
O bom encadeamento lógico das contas será recompensado!

Nome: ______________________________ Matrícula: ______________

Questão 1 (2 pontos)**.** Identifique e esboce as quádricas dadas pelas equações abaixo.

(a) $\mathcal{Q} : 4x^2 + y^2 - 24x - 4y + 12z + 28 = 0$

(b) $\mathcal{R} : 9x^2 - 4y^2 + 18z^2 + 16y - 52 = 0$

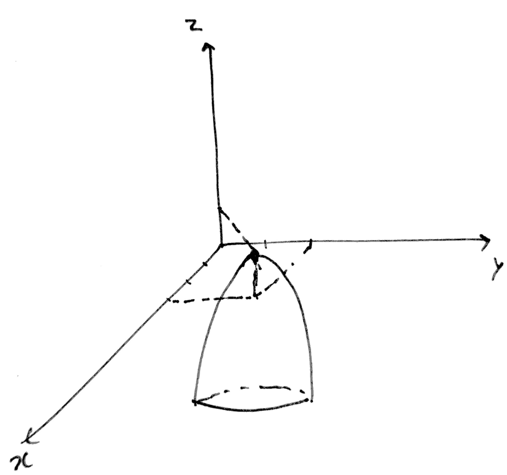
Solução. (a) Temos

- $4x^2 - 24x = 4(x^2 - 6x) = 4((x-3)^2 - 9) = 4(x-3)^2 - 36$
- $y^2 - 4y = (y-2)^2 - 4$

Logo,

$$
\begin{aligned}
& \mathcal{Q} : 4x^2 + y^2 - 24x - 4y + 12z + 28 = 0 \\
\Longrightarrow\ & 4(x-3)^2 - 36 + (y-2)^2 - 4 + 12z + 28 = 0 \\
\Longrightarrow\ & 4(x-3)^2 + (y-2)^2 = 12 - 12z = -12(z-1) \\
\Longrightarrow\ & (x-3)^2 + \frac{(y-2)^2}{4} = -3(z-1)
\end{aligned}
$$

Temos então um paraboloide elíptico, com eixo paralelo a Oz, concavidade voltada para o lado negativo do eixo e vértice no ponto $V = (3, 2, 1)$.



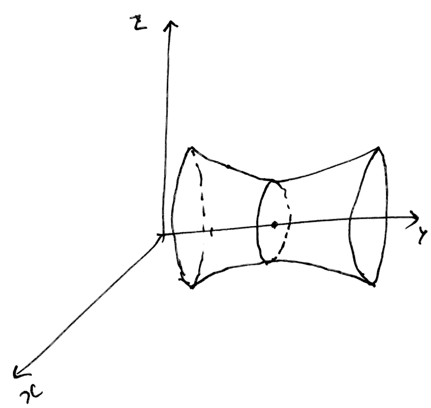
(b) Temos

- $-4y^2 + 16y = -4(y^2 - 4y) = -4((y-2)^2 - 4) = -4(y-2)^2 + 16.$

Logo,

$$\begin{aligned} &\mathcal{R} : 9x^2 - 4y^2 + 18z^2 + 16y - 52 = 0 \\ &\Longrightarrow 9x^2 - 4(y-2)^2 + 16 + 18z^2 - 52 = 0 \\ &\Longrightarrow 9x^2 - 4(y-2)^2 + 18z^2 = 36 \\ &\Longrightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{9} + \frac{z^2}{2} = 1. \end{aligned}$$

Temos então um hiperboloide elíptico de uma folha, com eixo paralelo a Oy e centro $C = (0, 2, 0)$.



Questão 2 (2 pontos)**.** Intersecte as quádricas abaixo pelo plano $z = -2$ e identifique a cônica obtida.

(a) $\mathcal{Q} : (x-3)^2 + \dfrac{(y-2)^2}{4} = 3(1-z)$

(b) $\mathcal{R} : \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{(y-2)^2}{9} + \dfrac{z^2}{2} = 1$

Solução. (a) Fazendo $z = -2$ na equação de $\mathcal{Q}$ obtemos

$$(x-3)^2 + \frac{(y-2)^2}{4} = 3(1-(-2)) = 9 \Longrightarrow \frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{36} = 1.$$

Esta é a equação de uma elipse com eixo focal vertical. (b) Fazendo $z = -2$

na equação de $\mathcal{R}$ obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{x^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{9} + \frac{(-2)^2}{2} = 1 &\implies \frac{x^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{9} + \frac{4}{2} = 1 \\
&\implies \frac{x^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{9} = 1 - 2 \\
&\implies \frac{x^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{9} = -1 \\
&\implies -\frac{x^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1.
\end{aligned}$$

Esta é a equação de uma hipérbole com eixo focal vertical.

Questão 3 (2 pontos)**.** Identifique todos os elementos da elipse

$$\mathcal{E} : \frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{36} = 1$$

(seu centro, seus dois focos, seus quatro vértices, sua excentricidade). Esboce.

Solução. Como $36 > 9$ trata-se de uma elipse de centro $C = (3,2)$ e eixo focal paralelo a Oy. Temos $a^2 = 36 \implies a = 6$ e $b^2 = 9 \implies b = 3$. Pela relação fundamental da elipse $a^2 = b^2 + c^2$, obtemos

$$c^2 = a^2 - b^2 = 36 - 9 = 27 \implies c = \sqrt{27}.$$

Os focos são

$$\begin{aligned}
F_1 &= C + (0,c) = (3,2) + (0,\sqrt{27}) = (3, 2+\sqrt{27}) \\
F_2 &= C - (0,c) = (3,2) - (0,\sqrt{27}) = (3, 2-\sqrt{27}).
\end{aligned}$$

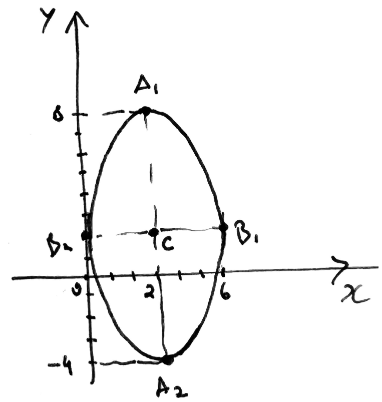
Os vértices do eixo focal são

$$\begin{aligned}
A_1 &= C + (0,a) = (3,2) + (0,6) = (3,8) \\
A_2 &= C - (0,a) = (3,2) - (0,6) = (3,-4)
\end{aligned}$$

Os vértices do eixo secundário são

$$\begin{aligned}
B_1 &= C + (b,0) = (3,2) + (3,0) = (6,2) \\
B_2 &= C - (b,0) = (3,2) - (3,0) = (0,2).
\end{aligned}$$

A excentricidade desta elipse é $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{27}}{6}$.



Questão 4 (2 ponto)**.** Identifique todos os elementos da hipérbole

$$\mathcal{H} : -\frac{x^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$$

(seu centro, seus dois focos, seus dois vértices, suas duas assíntotas, sua excentricidade). Esboce.

Solução. Como o sinal de x^2 é negativo, trata-se de uma hipérbole de centro $C = (0, 2)$ e de eixo focal paralelo a Oy. Temos $a^2 = 9 \implies a = 3$ e $b^2 = 4 \implies b = 2$. Pela relação fundamental da hipérbole $c^2 = a^2 + b^2$, obtemos

$$c^2 = a^2 + b^2 = 9 + 4 = 13 \implies c = \sqrt{13}.$$

Os focos são

$$F_1 = C + (0, c) = (0, 2) + (0, \sqrt{13}) = (0, 2 + \sqrt{13})$$
$$F_2 = C - (0, c) = (0, 2) - (0, \sqrt{13}) = (0, 2 - \sqrt{13}).$$

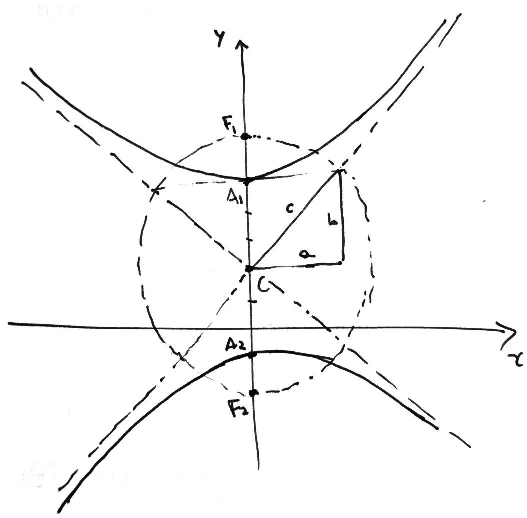
Os vértices são

$$A_1 = C + (0, a) = (0, 2) + (0, 3) = (0, 5)$$
$$A_2 = C - (0, a) = (0, 2) - (0, 3) = (0, -1)$$

Tendo em vista a posição da hipérbole (ver esboço), assíntotas são dadas por $y - y_0 = \pm\frac{b}{a}(x - x_0)$, onde x_0 e y_0 são as coordenadas do centro. Assim, as assíntotas são as retas

$$y - 2 = \pm\frac{2}{3}x \implies y = \pm\frac{2}{3}x + 2.$$

A excentricidade é $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{13}}{3}$.

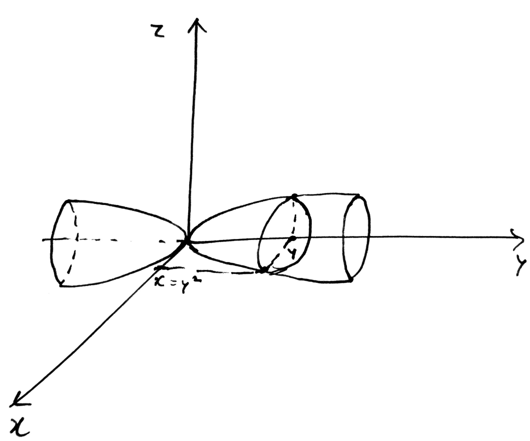


Questão 5 (2 pontos)**.** Obtenha a equação da superfície obtida pela rotação da curva $x = y^3, z = 0$ em torno do eixo y. Esboce.

Solução. Para cada y no eixo de rotação, obtemos uma circunferência de equação $x^2 + z^2 = R^2$, onde R é o raio para aquele y, isto é, $x = y^3$. A equação da superfície de rotação é, portanto,

$$x^2 + z^2 = (y^3)^2 \implies x^2 + z^2 = y^6.$$

Um esboço pode ser visto abaixo.



Questão 6 (Bônus +2 pontos)**.** Determine a equação do hiperboloide de duas folhas inscrito no cone $\mathcal{C} : 3x^2 + 2y^2 - 6z^2 + 6x - 12y + 24z - 3 = 0$ e de focos $F_1 = (-1, 3, 3)$ e $F_2 = (-1, 3, 1)$.

Solução. Seja $\mathcal{H}$ o hiperboloide procurado. Então $\mathcal{H}$ compartilha o mesmo centro e eixo com $\mathcal{C}$. Encontremos primeiramente estes elementos. Completando os quadrados, obtemos

$$\mathcal{C} : 3(x + 1)^2 + 2(y - 3)^2 - 6(z - 2)^2 = 0.$$

Logo, o cone $\mathcal{C}$ tem eixo paralelo ao eixo dos Oz e centro $C = (-1, 3, 2)$. O hiperboloide procurado tem equação da forma

$$\mathcal{H} : -\frac{(x + 1)^2}{\alpha^2} - \frac{(y - 3)^2}{\beta^2} + \frac{(z - 2)^2}{\gamma^2} = 1,$$

para certas constantes $\alpha, \beta, \gamma > 0$ que devemos encontrar. Escolhemos estas letras gregas para evitar confusão na relação fundamental "$c^2 = a^2 + b^2$" das hipérboles.

Seccionando o cone $\mathcal{C}$ pelo plano $y = 3$, obtemos o par de retas

$$z = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(x + 1) + 2. \tag{1}$$

Estas retas devem ser as assíntotas da hipérbole $\mathcal{H} \cap \{y = 3\}$, a qual tem equação

$$-\frac{(x + 1)^2}{\alpha^2} + \frac{(z - 2)^2}{\gamma^2} = 1.$$

Olhando para os denominadores e para a equação geral das hipérboles, temos $a = \gamma$ e $b = \alpha$. Como as retas (1) são assíntotas, o coeficiente angular deve ser $\frac{a}{b} = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. (Atenção aqui! Isso não significa que $a = 1$ e $b = \sqrt{2}$). A igualdade $\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ implica que

$$\alpha = \sqrt{2}\gamma.$$

Como queremos que os focos sejam $F_1 = (-1, 3, 3)$ e $F_2 = (-1, 3, 1)$, a distância focal é $2c = \|\overrightarrow{F_1F_2}\| = 2$, donde $c = 1$. A relação fundamental nos diz que $c^2 = a^2 + b^2$. Como $c = 1$, $a = \gamma$ e $b = \alpha = \sqrt{2}\gamma$, obtemos $\alpha^2 = 2\gamma^2$, donde

$$c^2 = a^2 + b^2 \implies 1 = \gamma^2 + \alpha^2 = \gamma^2 + 2\gamma^2 = 3\gamma^2 \implies \gamma^2 = 1/3 \implies \gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Visto que $\alpha = \sqrt{2}\gamma$, obtemos também $\alpha = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Já temos o valor de α e γ. Resta encontra o valor de β. Seccionando o cone $\mathcal{C}$ pelo plano $x = -1$, obtemos o par de retas

$$z = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}(y-3) + 2. \tag{2}$$

Estas retas devem ser as assíntotas da hipérbole $\mathcal{H} \cap \{x = -1\}$, a qual tem equação

$$-\frac{(y-3)^2}{\beta^2} + \frac{(z-2)^2}{\gamma^2} = 1.$$

Olhando para os denominadores em relação à equação geral das hipérboles, temos $a = \gamma$ e $b = \beta$. Novamente, o coeficiente angular das retas (2) deve ser $\frac{a}{b} = \frac{\gamma}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, o que implica (lembre que $\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}$)

$$\beta = \sqrt{3}\gamma = \sqrt{3}\frac{1}{\sqrt{3}} = 1.$$

Obtemos assim $\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}, \beta = 1$ e $\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}$, donde

$$\alpha^2 = \frac{2}{3}, \quad \beta^2 = 1 \quad \text{e} \quad \gamma^2 = \frac{1}{3}.$$

Portanto, a equação do hiperboloide de duas folhas inscrito no cone $\mathcal{C}$ é

$$\mathcal{H} : -\frac{(x+1)^2}{2/3} - (y-3)^2 + \frac{(z-2)^2}{1/3} = 1.$$

Isto completa a solução do exercício.

Boa prova!