Lista de exercícios 6
Produto interno

Exercício 1. Verifique que as propriedades de produto interno são verificadas pelos produtos internos canônicos de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$.

Exercício 2. Determine se o vetor $\vec{w} = (5,7)$ pode ser escrito como uma combinação linear dos vetores $\vec{u} = (1,2)$ e $\vec{v} = (2,1)$.

Exercício 3. Determine se o vetor $\vec{w} = (3,-1,2)$ pode ser escrito como uma combinação linear dos vetores $\vec{a} = (1,0,1)$ e $\vec{b} = (0,1,0)$.

Exercício 4. Encontre a projeção ortogonal do vetor $\vec{a} = (3,4)$ sobre o vetor $\vec{b} = (1,2)$.

Exercício 5. Encontre a projeção ortogonal do vetor $\vec{a} = (2,3,4)$ sobre vetor $\vec{b} = (1,1,0)$.

Exercício 6. Calcule a distância entre os pontos $P(1,2)$ e $Q(4,6)$.

Exercício 7. Calcule a distância entre os pontos $P(1,-1,2)$ e $Q(4,2,-1)$.

Exercício 8. Dados $\vec{a} = (2,1,-2)$, $\vec{b} = (3,3,0)$, $\vec{c} = (-1,-2,-2)$ e $\vec{d} = (2,3,1)$, calcule os ângulos entre $\vec{a}$ e $\vec{b}$, entre $\vec{a}$ e $\vec{c}$, e entre $\vec{b}$ e $\vec{d}$.

Exercício 9. Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores quaisquer, verifique que $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\|\vec{v}\|^2$ e $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$.

Exercício 10. Usando o Cálculo Vetorial, demonstre o Teorema de Pitágoras. (Dica: se interpretarmos os catetos do triângulo como dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, então a hipotenusa é $\vec{u}-\vec{v}$).

Exercício 11. Prove que as diagonais de um losango são perpendiculares.

Exercício 12. Dados $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores quaisquer, verifique as seguintes propriedades:

(a) $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$

(b) $\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{4}\big(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 + \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\big)$

(c) $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 + \|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = 2\big(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2\big)$

(d) $\|\vec{u}+\vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$

Exercício 13. Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores perpendiculares entre si e seja $\vec{w}$ um outro vetor. Suponha que os ângulos entre $\vec{u}$ e $\vec{w}$ seja de $\frac{\pi}{3}$ radianos e que o ângulo entre $\vec{v}$ e $\vec{w}$ também seja de $\frac{\pi}{3}$ radianos. Sabendo que $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 5$ e $\|\vec{w}\| = 8$, calcule $(3\vec{u}-2\vec{v})\cdot(\vec{v}+3\vec{w})$.

Exercício 14. Sejam $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ vetores tais que o ângulo entre dois quaisquer deles, nessa ordem, é de $\pi/3$ radianos. Sabendo que $\|\vec{u}\| = 4$, $\|\vec{v}\| = 2$ e $\|\vec{w}\| = 6$, calcule $\|\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}\|$.

Exercício 15. Sabendo que $\|\vec{v}\| = 11$, $\|\vec{v}\| = 23$ e $\|\vec{u}-\vec{v}\| = 30$, determine $\|\vec{u}+\vec{v}\|$.

Exercício 16. Sejam $\vec{u}, \vec{v}$ vetores perpendiculares tais que $\|\vec{u}\| = 5$ e $\|\vec{v}\| = 12$. Calcule $\|\vec{u}+\vec{v}\|$ e $\|\vec{u}-\vec{v}\|$.

Exercício 17. Determine um vetor unitário paralelo ao vetor $2\vec{a}-\vec{b}$, sendo $\vec{a} = \vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k}$ e $\vec{b} = 2\vec{i}-1\vec{j}+3\vec{k}$.

Exercício 18. Encontre x tal que os vetores $\vec{a} = x\,\vec{i}+3\,\vec{j}+4\,\vec{k}$ e $\vec{b} = 3\,\vec{i}+\vec{j}+2\,\vec{k}$ são perpendiculares.

Exercício 19. Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores tais que $\vec{u}\cdot\vec{v} = 6$, $\|\vec{v}\| = 3\sqrt{2}$ e o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ seja $\theta = \frac{\pi}{4}$. Calcule $\|\vec{u}\|$ e $\|\vec{u}+\vec{v}\|$.

Exercício 20. Ache o valor de x tal que $(x,3,1)\cdot(2,1,0) = 3$.

Exercício 21. Ache um vetor unitário na direção da bissetriz do ângulo entre $\vec{u} = \vec{i} - 2\vec{j}\,3\vec{k}$ e $\vec{v} = 3\vec{i}\,\vec{j} - \vec{k}$.

Exercício 22. Os pontos $A = (1,1,0)$, $B = (3,1,0)$ e $C = (1,3,0)$ são vértices de um triângulo? Este triângulo é retângulo? É isósceles? Calcule seus ângulos.

Exercício 23. Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores l.d. Determine a projeção de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$.

Exercício 24. Determine a projeção de $\vec{u} = 3\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ sobre $\vec{v} = \vec{i} + 5\vec{j} + 4\vec{k}$.

Exercício 25. Um vetor $\vec{v}$ forma com os eixos Ox e Oy os ângulos $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ e $\beta = \frac{\pi}{4}$, respectivamente. Qual é o ângulo entre $\vec{v}$ e Oz?

Exercício 26. Sejam os vetores $\vec{u} = \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j}$ e $\vec{w} = \vec{i} + \vec{k}$. Verifique se $\mathfrak{B} = (\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ é uma base ortonormal. É possível determinar as coordenadas do vetor $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$ na base ordenada $\mathfrak{B}$?

Exercício 27. Sejam os vetores $\vec{a} = \frac{1}{\sqrt{6}}(\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k})$, $\vec{b} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} - \vec{k})$ e $\vec{c} = \frac{1}{\sqrt{6}}(\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k})$. Verifique se $\mathfrak{B} = (\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ é uma base ortonormal. É possível determinar as coordenadas do vetor $\vec{u} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$ na base ordenada $\mathfrak{B}$?

Exercício 28. Sejam os vetores $\vec{u} = \frac{1}{3}\vec{i} - \frac{2}{3}\vec{j} + \frac{2}{3}\vec{k}$, $\vec{v} = \frac{2}{3}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j} + \frac{1}{3}\vec{k}$ e $\vec{w} = -\frac{2}{3}\vec{i} + \frac{1}{3}\vec{j} + \frac{2}{3}\vec{k}$. Verifique se $\mathfrak{B} = (\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ é uma base ortonormal. É possível determinar as coordenadas do vetor $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ na base ordenada $\mathfrak{B}$?

Exercício 29. Para dois vetores quaisquer $\vec{u}$ e $\vec{v}$, verifique que vale a desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$\|\vec{u}\cdot\vec{v}\| \leq \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|.$$