Lista de exercícios 7
Produtos vetorial e misto

Exercício 1. Determine um vetor de norma 3 que seja ortogonal aos vetores $\vec{a} = (2, -1, 1)$ e $\vec{b} = (1, 0, -1)$.

Exercício 2. Verifique se os pontos $A = (1, 2, 1), B = (3, 0, 4)$ e $C = (5, 1, 3)$ são vértices de um triângulo e, em caso afirmativo, calcule sua área.

Exercício 3. Dados os vetores $\vec{a} = (2, 1, -2)$, $\vec{b} = (2, -1, 3)$ e $\vec{c} = (1, 2, -1)$, calcule $\vec{a} \times \vec{b}$, $\vec{c} \times \vec{a}$ e $(\vec{b} \times \vec{c}) + (\vec{c} \times \vec{b})$.

Exercício 4. Dados os vetores $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ e $\vec{b} = -\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$, determine um vetor unitário perpendicular a $\vec{a}$ e a $\vec{b}$.

Exercício 5. Encontre um vetor $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ tal que $\vec{v} \cdot (2\vec{i} + 3\vec{j}) = 6$ e $\vec{v} = (2\vec{i} + 3\vec{j}) = 4\vec{k}$.

Exercício 6. Calcule a área do paralelogramo que tem três vértices consecutivos nos pontos $A = (1, 0, 1), B = (2, 1, 3)$ e $C = (3, 2, -5)$.

Exercício 7. Os pontos $A = (-1, -3, 4), B = (-2, 1, -4), C = (3, -11, 5)$ são vértices de um triângulo? Esse triângulo é isósceles? É retângulo? É equilátero? Calcule sua área, e explique cada resposta.

Exercício 8. Dados $\vec{u} = 2\vec{i} + 1\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{v} = 4\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$, determine uma base ortonormal $\mathfrak{B} = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ com $\vec{a}$ paralelo a $\vec{u}$ e $\vec{b}$ paralelo a $\vec{v}$. Obtenha o vetor $\vec{w} = i + j + \vec{k}$ como combinação linear dos vetores da base $\mathfrak{B}$.

Exercício 9. Verificar que os vetores $\vec{a} = \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j}$ e $\vec{c} = \vec{i} + \vec{k}$ formam uma base de $\mathbb{R}^3$.

Exercício 10. Determine $x \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{a} = (3, 5, 1)$, $\vec{b} = (2, 0, 4)$ e $\vec{c} = (1, x, 3)$ sejam coplanares.

Exercício 11. Dados $\vec{u} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}, \vec{v} = \vec{i} + \vec{j}, \vec{w} = -2\vec{j} - \vec{k}$, calcule $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$, $[\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}]$ e $[\vec{u}, \vec{w}, \vec{w}]$.

Exercício 12. Os vetores $\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$, $2\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}$, $4\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$ são coplanares? Justifique.

Exercício 13. Calcule o volume do paralelepípedo que tem um dos vértices no ponto $A = (2, 1, 6)$ e os três vértices adjacentes nos pontos $B = (4, 1, 3), C = (1, 3, 2)$ e $D = (1, 2, 1)$.

Exercício 14. Verifique, em cada caso, se os pontos são coplanares:

(a) $A = (0, 2, -2), B = (-1, 0, -2), C = (-2, -1, -3), D = (1, 1, 1)$

(b) $A = (-1, 0, 3), B = (-1, -2, 2), C = (1, 0, 2), D = (2, 4, 1)$

Exercício 15. Determine x de modo que $\vec{a} = (1, x, 0)$, $\vec{b} = (-x, -1, 1)$ e $\vec{c} = (1, 1, 1)$ não sejam coplanares.

Exercício 16. Dados $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ e $\vec{v} = \vec{i} + 3\vec{j}$, determine uma base ortonormal $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$, com $\vec{a}$ paralelo a $\vec{u}$ e $\vec{b}$ coplanar com $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Exercício 17. Calcule o ângulo entre $2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ e $-\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$. Eles são l.i. ou l.d.?

Exercício 18. Considere o triângulo cujos vértices são os pontos $A = (3, 2, 1), B = (3, 2, 2)$ e $C = (3, 3, 2)$. Determine:

(a) Os ângulos do ΔABC.

(b) O vetor projeção do menor lado sobre o maior lado.

(c) A altura do triângulo, relativa ao maior lado.

(d) A área do triângulo ΔABC.

(e) O volume do paralelepípedo gerado pelos vetores $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$.

Exercício 19. Dados $\vec{a} = 2x\vec{i} + 2x\vec{j}x\vec{k}$, $\vec{b} = x\vec{i} - 2x\vec{j} + 2x\vec{k}$ e $\vec{c} = 2x\vec{i} - x\vec{j} - 2x\vec{k}$, mostre que $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ é base se ortogonal se $x \neq 0$. Para quais valores de x o conjunto $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ é base ortonormal? Encontre as coordenadas do vetor $\vec{v} = (1, -2, -3)$ na base ortonormal obtida.

Exercício 20. Os pontos $A = (4, 6, 2), B = (1, 2, 1), C = (3, 3, 3)$ e $D = (7, 4, 3)$ podem ser vértices de um paralelepípedo? Em caso afirmativo, calcule o volume do sólido considerado, as coordenadas do ponto E, sendo AE uma diagonal interna.

Exercício 21. Sejam $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{b}$ vetores tais que o ângulo entre dois qualquer deles na ordem dada é $\frac{\pi}{3}$ radianos. Supondo que $\|\vec{a}\| = 4$, $\|\vec{b}\| = 2$ e $\|\vec{c}\| = 6$, calcule $\|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\|$.

Exercício 22. Use o produto vetorial para determinar as condições que devem satisfazer os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ para que $\vec{a} + \vec{b}$ e $\vec{a} - \vec{b}$ sejam paralelos.