

## Lista de exercícios 7

### Funções contínuas

(Os exercícios marcados com (\*) são os mais pertinentes).

**Exercício 1** (\*). Sejam  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$  contínuas no ponto  $a \in X$ . Prove que também são contínuas no ponto  $a$  as funções  $\varphi, \psi : X \rightarrow \mathbb{R}$  definidas por  $\varphi(x) = \max\{f(x), g(x)\}$  e  $\psi = \min\{f(x), g(x)\}$ .

**Exercício 2** (\*). Sejam  $f, g : X \rightarrow X$  contínuas. Prove que, quando  $X$  é aberto, o conjunto  $A = \{x \in X : f(x) \neq g(x)\}$  também é aberto, e quando  $X$  é fechado, o conjunto  $F = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$  também é fechado.

**Exercício 3** (\*). Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  contínua. Prove que, se  $f(x) = 0$  para todo  $x \in X$ , então  $f(x) = 0$  para todo  $x \in \bar{X}$ .

**Exercício 4**. Prove que  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua se, e somente se, para todo  $X \subset \mathbb{R}$ , tem-se  $f(\bar{X}) \subset \overline{f(X)}$ .

**Exercício 5** (\*). Sejam  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$  contínuas no ponto  $a \in X$ . Suponha que, em toda vizinhança de  $a$ , existem pontos  $x, y$  tais que  $f(x) < g(x)$  e  $f(y) > g(y)$ . Prove que  $f(a) = g(a)$ .

**Exercício 6**. Seja  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  descontínua no ponto  $a$ . Prove que existe  $\varepsilon > 0$  com a seguinte propriedade: ou se pode achar uma sequência  $(x_n)$  de pontos  $x_n \in X$  com  $\lim x_n = a$  e  $f(x_n) > f(a) + \varepsilon$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , ou se acha  $(y_n)$  com  $y_n \in X$ ,  $\lim y_n = a$  e  $f(y_n) < f(a) - \varepsilon$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

**Exercício 7** (\*). Uma função  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  é dita *localmente constante* quando todo ponto de  $X$  possui uma vizinhança  $V$  tal que  $f$  é constante em  $V \cap X$ . Prove que toda função  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , localmente constante num intervalo  $I$ , é constante.

**Exercício 8** (\*). Seja  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  uma função monótona, definida no intervalo  $I$ . Se a imagem  $f(I)$  é um intervalo, prove que  $f$  é contínua.

**Exercício 9** (\*). Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  contínua tal que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ . Mostre que existe  $x_0 \in \mathbb{R}$  tal que  $f(x_0) \leq f(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

**Exercício 10**. Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  contínua tal que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  e  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ . Mostre que, dado  $c \in \mathbb{R}$ , existe dentre as soluções  $x$  da equação  $f(x) = c$  uma cujo módulo  $|x|$  é mínimo.

**Exercício 11**. Prove que não existe função contínua  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  que assuma cada um dos seus valores  $f(x)$ ,  $x \in [a, b]$ , exatamente duas vezes.

**Exercício 12** (\*). Uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  diz-se *periódica* quando existe  $p \in \mathbb{R}_+$  tal que  $f(x + p) = f(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Prove que toda função contínua periódica  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é limitada e atinge seus valores máximo e mínimo, isto é, existem  $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$  tais que  $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

**Exercício 13**. Seja  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  contínua no conjunto compacto  $X$ . Prove que, para todo  $\varepsilon > 0$  dado, existe  $k_\varepsilon > 0$  tal que  $x, y \in X, |x - y| \geq \varepsilon \implies |f(x) - f(y)| \leq k_\varepsilon |x - y|$ . (Isto significa que  $f$  cumpre a condição de Lipschitz contanto que os pontos  $x, y$  não estejam muito próximos.)

**Exercício 14.** Se toda função  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  é uniformemente contínua, prove que o conjunto  $X$  é fechado porém não necessariamente compacto.

**Exercício 15 (\*)**. Mostre que a função contínua  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $f(x) = \sin(x^2)$ , não é uniformemente contínua.

**Exercício 16 (\*)**. Dada  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  uniformemente contínua, defina  $\varphi : \bar{X} \rightarrow \mathbb{R}$  ponto  $\varphi(x) = f(x)$  se  $x \in X$  é um ponto isolado e  $\varphi(x) = \lim_{y \rightarrow x} f(y)$  se  $x \in X'$ . Prove que  $\varphi$  é uniformemente contínua e  $\varphi(x) = f(x)$  para todo  $x \in X$ .

**Exercício 17 (\*)**. Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  contínua. Suponha que existem os limites  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  e  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ . Prove que  $f$  é uniformemente contínua. Mesma conclusão vale se existem os limites de  $f(x) - x$  quando  $x \rightarrow \pm\infty$ .

**Exercício 18 (\*)**. Sejam  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$  uniformemente contínuas. Prove que  $f + g$  é uniformemente contínua. Prove que o mesmo ocorre com o produto  $f \cdot g$  quando  $f$  e  $g$  são ambas limitadas. Prove também que as funções  $\varphi, \psi : X \rightarrow \mathbb{R}$  definidas por  $\varphi(x) = \max\{f(x), g(x)\}$  e  $\psi = \min\{f(x), g(x)\}$  são igualmente uniformemente contínuas.