Vecteurs et algèbres hypercycliques

Fernando Costa Jr.

Séminaire de l'équipe de Systèmes Dynamiques et Géométrie du LMA

23/11/2021

Table de matières

Table de matières

Dynamique Linéaire

- C'est un thème en l'Analyse Fonctionnelle qui étudie le comportement des itérés d'un opérateur linéaire agissant sur un espace vectoriel topologique de dimension infinie.
- L'espace est en général supposé un F-espace, mais souvent on travaille sur des espaces de Fréchet ou même de Banach.
- **Définition.** Un *espace de Fréchet* est un espace vectoriel X muni d'une suite croissante et séparante de semi-normes $(\|\cdot\|_n)_{n\geq 0}$ et qui est complet avec la métrique

$$d(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}\min(1,\|x-y\|_n).$$

Dynamique Linéaire

- Par exemple, l'espace

$$H(\mathbb{C}) = \{f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : f \text{ est holomorphe}\}$$

  et naturellement un espace de Fréchet équipé avec les semi-normes

$$\|f\|_n = \sup_{|z| \leq n} |f(z)|.$$

- Un opérateur linéaire très important définit sur cet espace est l'opérateur de dérivation complexe :

$$\begin{aligned} D : H(\mathbb{C}) &\to H(\mathbb{C}) \\ f &\mapsto f' \end{aligned}$$

Hypercyclicité

- L'hypercyclicité est l'ingrédient le plus important du chaos linéaire.
- **Définition.** On dit que $T : X \to X$ est *hypercyclique* s'il existe $x \in X$, appelé *vecteur hypercyclique* de T, tel que son orbite par l'action de T, soit $\mathrm{orb}(x; T) := \{T^n(x) : n \geq 0\}$, est dense dans X.
- **Définition.** On dit qu'un opérateur continu $T : X \to X$ est *topologiquement transitif* si, pour tout couple d'ouverts (U, V) de X, il existe $u \in U$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que $T^N(u) \in V$.

Hypercyclicité

Théorème (Birkhoff, 1922 [8])

Pour tout X séparable : transitivité topologique $\Rightarrow$ hypercyclicité.

Démonstration.

Soit (V_k) une base d'ouverts de X. Par la définition de transitivité topologique, chaque ensemble

$$\bigcup_n T^{-n}(V_k)$$

est un ouvert dense dans X. Par le Théorème de Baire,

$$\bigcap_k \bigcup_n T^{-n}(V_k) \neq \varnothing.$$

Tout vecteur dans cet ensemble est hypercyclique pour T. $\square$

Hypercyclicité

Exemple (MacLane, 1952 [9])

L'opérateur $D : f \mapsto f'$ est hypercyclique sur $H(\mathbb{C})$.

Démonstration.

Étant donnés U, V ouverts et non-vides de $H(\mathbb{C})$, on fixe des polynômes $A \in U$ et $B \in V$, disons $A = \sum_{i=0}^{p} a_i z^i$ et $B = \sum_{j=0}^{q} b_j z^j$. On définit le candidat

$$u =$$

□

Hypercyclicité

D'autres exemples d'opérateurs hypercycliques :

- Les opérateurs de convolution $\phi(D) : H(\mathbb{C}) \to (\mathbb{C})$ induits par une fonction entière non-constante $\phi \in H(\mathbb{C})$ de type exponentiel.
- Les translations $\tau_a : H(\mathbb{C}) \to H(\mathbb{C})$ définies par $\tau_a(f) = f(\cdot + a)$.
- Les opérateurs de décalage à gauche $\lambda B : \ell_1(\mathbb{N}) \to \ell_1(\mathbb{N})$ quand $|\lambda| > 1$.
- Plus généralement les opérateurs de décalage à poids $B_w : \ell_1(\mathbb{N}) \to \ell_1(\mathbb{N})$ quand les poids $(w_n)_n$ satisfont des conditions.
- Les opérateurs de composition $C_\phi : H(\mathbb{D}) \to H(\mathbb{D})$, définis par $C_\phi(f) = f \circ \phi$ où $\phi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ est holomorphe et satisfait des conditions (ex : quand ϕ est une transformation fractionnaire linéaire hyperbolique et sans points fixes dans $\mathbb{D}$).

Chaos linéaire

On dit qu'un système dynamique linéaire (T, X) est **chaotique** (dans le sens de Devaney, 1986) quand il vérifie les deux conditions suivantes :

- T est hypercyclique ;
- l'ensemble des points périodiques de T est dense dans X.

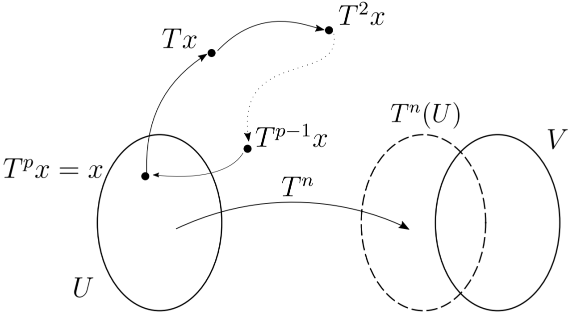

FIGURE 1 – Chaos de Devaney

Mixing et Weakly Mixing

Soit (T, X) un système dynamique. Pour tous sous-ensembles $U, V \subset X$, on définit l'ensemble de retour de U à V par

$$N(U, V) = \{n \in \mathbb{N} : T^n(U) \cap V \neq \varnothing\}.$$

- On dit que (T, X) est **mixing** si la propriété suivante est satisfaite : pour toute paire U, V d'ouverts non-vides de X, l'ensemble de retour $N(U, V)$ est cofini.
- On dit que (T, X) est **weakly mixing** si la propriété suivante est satisfaite : pour toute paire U, V d'ouverts non-vides de X, l'ensemble de retour $N(U, V)$ contient des intervalles arbitrairement longs.

$$\textit{Mixing} \Rightarrow \textit{Weakly Mixing} \Rightarrow \textit{Hypercyclique}.$$

Sufficient conditions for weakly mixing

Théorème

Soit T un opérateur hypercyclique. S'il existe un sous-ensemble dense X_0 de X tel que l'orbite de chaque $x \in X_0$ est bornée, alors T est weakly mixing.

Corollaire

Sont weakly mixing les opérateurs :

- *chaotiques ;*
- *hypercycliques avec un sous-ensemble dense de poits dont l'orbite converge ;*
- *hypercycliques dont le noyaux généralisé $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \ker T^n$ est dense.*

Théorème

Si T est hypercyclique, son adjoint T^* n'a pas de valeur propres.

Les critères d'hypercyclicité

Théorème (Critère de Godefroy-Shapiro)

Soit (T, X) *un système dynamique linéaire. Supposons que les sous-espaces*

$$X_0 := \mathrm{span}\{x \in X : Tx = \lambda x \textit{ pour un certain } \lambda \in \mathbb{C} \textit{ avec } |\lambda| < 1\}$$

$$Y_0 := \mathrm{span}\{x \in X : Tx = \lambda x \textit{ pour un certain } \lambda \in \mathbb{C} \textit{ avec } |\lambda| > 1\}$$

sont denses dans X*. Alors* T *est mixing. Si, en plus, le sous-espace*

$$Z_0 := \mathrm{span}\{x \in X : Tx = e^{\alpha \pi i} x \textit{ pour un certain } \alpha \in \mathbb{Q}\}$$

est dense dans X*, alors* T *est chaotique.*

Exemple

Les opérateurs de Birkhoff, MacLane et Rolewicz sont mixing et chaotiques.

Les critères d'hypercyclicité

Théorème (Critère de Kitai)

Soit (T, X) *un système dynamique linéaire. Supposons qu'il existe deux sous-ensembles denses* $X_0, Y_0 \subset X$ *et une fonction* $S : Y_0 \to Y_0$ *tels que, pour tous* $x \in X_0$*,* $y \in Y_0$*,*

1. $T^n x \to 0$,
2. $S^n y \to 0$,
3. $TSy = y$.

Alors T *est mixing.*

Les critères d'hypercyclicité

Théorème (Critère d'Hypercyclicité)

Soit (T, X) *un système dynamique linéaire. Supposons qu'il existe deux sous-ensembles denses* $X_0, Y_0 \subset X$*, une suite strictement croissante* $(n_k)_k$ *d'entiers positifs et des fonctions* $S_{n_k} : Y_0 \to X$*,* $k \geq 1$*, tels que, pour tous* $x \in X_0$*,* $y \in Y_0$*,*

1. $T^{n_k} x \to 0$,
2. $S_{n_k} y \to 0$,
3. $T^{n_k} S_{n_k} y \to y$.

Alors T *est weakly mixing.*

Table de matières

Au delà de l'hypercyclicité

D'autres concepts liés à l'hypercyclicité :

- l'hypercyclicité fréquente et supérieurement fréquente ;
- l'hypercyclicité disjointe (ou diagonale) pour $T \oplus S$;
- l'hypercyclicité commune à une famille d'opérateurs $(T_\lambda)_\lambda$.

Table de matières

L'ensemble des vecteurs hypercycliques

Soit (T, X) un système dynamique hypercyclique. On note $HC(T)$ l'ensemble de tous les vecteurs hypercycliques de T.

Fait : L'ensemble $HC(T) \cup \{0\}$ contient toujours un sous-espace dense dans X (théorème de Herrero-Bourdon). Cela veut dire que $HC(T)$ est toujours **linéable**.

La question intéressante (étudié en *Spacéabilité*) est : existe-t-il un sous-espace fermé de dimension infinie dans $HC(T) \cup \{0\}$?

C'est ce qu'on appelle un **sous-espace hypercyclique**.

Critère de Spacéabilité

Théorème

Soit (T, X) *un système dynamique linéaire* **qui satisfait le Critère d'Hypercyclicité**. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- T *admet un sous-espace hypercyclique ;*
- *Il existe un sous-espace fermé de dimension infinie* $E \subset X$ *et une suite d'entiers strictement croissante* $(n_k)_k$ *tels que* $T^{n_k}x \to 0$ *pour tous* $x \in E$ *;*
- $\sigma_e(T) \cap \overline{\mathbb{D}} \neq \varnothing$.

Les algèbres hypercycliques

- **Définition.** On appelle *algèbre de Fréchet* tout espace de Fréchet X sur lequel il est définit un produit $\cdot : X \times X \to X$ qui satisfait, pour tous $x, y \in X$ et tout $q \geq 0$,

$$\|x \cdot y\|_q \leq \|x\|_q \times \|y\|_q.$$

- **Définition.** Soit T opérateur linéaire continu sur une algèbre de Fréchet X. Une sous-algèbre A de X telle que $A \subset HC(T) \cup \{0\}$ est ce qu'on appelle une *algèbre hypercyclique* de T.
- Le premier résultat négatif sur l'existence d'une algèbre hypercyclique a été montré par Aron, Conejero, Peris, Seoane-Sepúlveda, 2007 [1] : aucun opérateur de translation $T_a : f(\cdot) \mapsto f(\cdot + a), a \neq 0$, agissant sur $H(\mathbb{C})$ admet une telle structure.
- Le premier résultat positif a été trouvé en 2009 de manière indépendante par Shkarin [10] et par Bayart et Matheron [4] : l'opérateur de MacLane $D : f \mapsto f'$ sur $H(\mathbb{C})$ admet une algèbre hypercyclique.

Table de matières

La méthode de Bayart et Matheron

C'est basée sur un "argument de Baire" : ils ont obtenu une propriété similaire à la transitivité de Birkhoff qui implique l'existence d'une algèbre hypercyclique.

Théorème

Soit T un opérateur linéaire continu sur une algèbre de Fréchet séparable X. On suppose que, pour tous $1 \leq m_0 \leq m_1$ et tous U, V, W ouverts non-vides de X, avec $0 \in W$, on peut choisir $m \in [\![m_0, m_1]\!]$ et trouver $u \in U$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que

$$\begin{cases} T^N(u^m) \in V \\ T^N(u^n) \in W, \quad \textit{for } n = [\![m_0, m_1]\!] \backslash \{m\}. \end{cases}$$

Alors T admet une algèbre hypercyclique.

Algèbre hypercyclique pour D

Théorème

L'opérateur $D : f \mapsto f'$ agissant sur $H(\mathbb{C})$ admet une algèbre hypercyclique.

Esquisse de preuve.

Soit $m_0 \leq m_1$ et U, V, W des ouverts non-vides de X, avec $0 \in W$. On choisit $m = m_1$ comme la puissance principale. On veut trouver un candidat $u \in U$ ainsi qu'un itéré D^N de D tels que

$$\begin{cases} D^N(u^{m_1}) \in V \\ D^N(u^n) \in W \quad \text{pour } n = m_0, ..., m_1 - 1. \end{cases}$$

L'idée c'est de fixer des polynômes $A \in U$, $B \in V$ et de définir le candidat u encore une fois par des "par blocs" comme $u = A + R_N$, où R_N n'est qu'une petite perturbation satisfaisant :

- R_N est très petit ;
- $u^{m_1} = (A + R_N)^{m_1} = P_0 + R_N^{m_1}$ et $\deg(P_0) < N$;
- $D^N(R_N^{m_1}) = B \in V$;
- pour tous $m_0 \leq n < m_1$, $\deg(u^n) < N$.

Table de matières

Opérateurs de convolution

- **Définition.** On dit qu'une fonction entière $\phi \in H(\mathbb{C})$ et de *type exponentiel fini* quand l'on peut trouver deux constantes $A, B > 0$ telles que $|\phi(z)| \leq A \exp(B|z|)$.
- **Définition.** Chaque fonction entière de type exponentiel fini ϕ, disons $\phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, induit un *opérateur de convolution* $\phi(D) : H(\mathbb{C}) \to H(\mathbb{C})$ définit par $\phi(D)(f) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n f^{(n)}$.
- ϕ multiple d'une exponentielle $\Longrightarrow \phi(D)$ n'est qu'une translation
  $\Longrightarrow \phi$ n'a pas d'algèbre hypercyc.

Chronologie de $\phi(D)$ admettant une algèbre hypercyclique

- 2009, Shkarin [10] et Bayart et Matheron [4]$\Longrightarrow \phi(z) = z$
- 2017, Bès, Conejero et Paparhanasiou [5] $\Longrightarrow \phi = P, P(0) = 0$
- 2018, mêmes autheurs [6] $\Longrightarrow \phi$ satisfaisant une condition de convexité
- 2019, Bayart [2] $\Longrightarrow |\phi(0)| < 1$ et $|\phi(0)| = 1$ (+ des conditions)
- 2020, Bès, Ernst et Prieto $\Longrightarrow |\phi(0)| = 1$ (+ mois de conditions)
- 2021, Bayart, Papathanasiou, FCJr [3] $\Longrightarrow |\phi(0)| > 1$ (+ des conditions)

Some useful properties

Soit ϕ une fonction entière de type exponentiel fini. On définit, pour chaque $\lambda \in \mathbb{C}$, l fonction $E(\lambda) : z \mapsto \exp(\lambda z)$ agissant sur $H(\mathbb{C})$.

- $E(\lambda)E(\mu) = E(\lambda + \mu)$
- Chaque $E(\lambda)$ est un vecteur propre de $\phi(D)$ associé à la valeur propre $\phi(\lambda)$, càd, $\phi(D)E(\lambda) = \phi(\lambda)E(\lambda)$.
- Si $\Lambda \subset \mathbb{C}$ a un point d'accumulation, alors $\operatorname{span}\{E(\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$ est dense dans $H(\mathbb{C})$.

Comment le candidat est-il défini maintenant ?

Étant fixés U, V, W des ouverts non-vides de $H(\mathbb{C})$, on utilise le fait que $\mathrm{span}\{E(\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$ est dense dans $H(\mathbb{C})$ toujours que Λ a un point d'accumulation et on trouve $A \in U$ et $B \in V$ (pas des polynômes mais) des combinaisons de la forme

$$A = \sum_{l=1}^{p} a_l E(\gamma_l) \qquad \text{et} \qquad B = \sum_{j=1}^{q} b_j E(\lambda_j).$$

Le candidat est ainsi défini par

$$u = \sum_{l=1}^{p} a_l E(\gamma_l) + \sum_{j=1}^{q} c_j E(z_j),$$

où on doit trouver $c_j, z_j, j = 1, ..., q$ qui vont nous permettre de distinguer la parcelle principale dans la puissance principale de tous les autres termes.

Comment le candidat est-il défini maintenant ?

Si l'on considère une puissance de u on obtient :

$$u^n = \sum_{d=0}^{n} \sum_{\substack{\mathbf{l} \in I_p^{n-d} \\ \mathbf{j} \in I_q^d}} \alpha(\mathbf{l}, \mathbf{j}, d, n) a_{\mathbf{l}} c_{\mathbf{j}} E\left(\gamma_{l_1} + \cdots + \gamma_{l_{n-d}} + z_{j_1} + \cdots + z_{j_d}\right).$$

(notation : $c_{\mathbf{j}} := c_{j_1} c_{j_2} \cdots c_{j_d}$)

Après appliquer $\phi(D)$ on trouve des termes contenant

$$c_{\mathbf{j}} \phi\left(\gamma_{l_1} + \cdots + \gamma_{l_{n-d}} + z_{j_1} + \cdots + z_{j_d}\right) E\left(\gamma_{l_1} + \cdots + \gamma_{l_{n-d}} + z_{j_1} + \cdots + z_{j_d}\right).$$

Dans la preuve on considère $\gamma_1, ..., \gamma_p \in B(a, \delta)$ et $z_1, ..., z_q \in B(b, \delta)$.

Théorème principal pour les opérateurs de convolution

Théorème

Soit ϕ une fonction entière de type exponentiel fini satisfaisant les conditions suivantes.

(a) *ϕ n'est pas multiple d'une fonction exponentielle ;*

(b) *Pour tous $1 \leq m_0 \leq m_1$, il existe $m \in [\![m_0, m_1]\!]$ et $a, b \in \mathbb{C}$ tels que*

   (i) $|\phi(mb)| > 1$

   (ii) *pour tous $n \in [\![m_0, m_1]\!]$ et tous $d \in \{0, ..., n\}$ avec $(n, d) \neq (m, m)$,*

$$|\phi(db + (n - d)a)| < 1.$$

Alors $\phi(D)$ admet une algèbre hypercyclique.

Théorème principal pour les opérateurs de convolution

Théorème

Soit ϕ une fonction entière de type exponentiel fini satisfaisant les conditions suivantes.

(a) *ϕ n'est pas multiple d'une fonction exponentielle ;*

(b) *Pour tous $1 \leq m_0 \leq m_1$, il existe $m \in [\![m_0, m_1]\!]$ et $a, b \in \mathbb{C}$ tels que*

  (i) $|\phi(mb)| > 1$

  (ii) *pour tous $n \in [\![m_0, m_1]\!]$ et tous $d \in \{0, ..., n\}$ avec $(n, d) \neq (m, m)$,*

$$|\phi(db + (n-d)a)| < |\phi(mb)|^{d/m}.$$

Alors $\phi(D)$ admet une algèbre hypercyclique.

Applications

Théorème (Bayart, 2019 [2])

Soit ϕ une fonction entière de type exponentiel fini telle que $|\phi(0)| < 1$. Alors $\phi(D)$ admet une algèbre hypercyclique si et seulement si ϕ n'est pas multiple d'une exponentielle.

Théorème

Soit ϕ une fonction entière de type exponentiel fini telle que $|\phi(0)| > 1$. Si ϕ n'est pas multiple d'une exponentielle et s'il existe une direction w dans laquelle $|\phi(tw)| \to 0$ quand $t \to +\infty$, alors $\phi(D)$ admet une algèbre hypercyclique.

Théorème

Soit ϕ une fonction entière de type exponentiel fini telle que $|\phi(0)| > 1$. Si ϕ n'est pas multiple d'une exponentielle et s'il existe une direction w dans laquelle $|\phi(tw)| \leq 1$ pour tout $t \gg 0$, alors $\phi(D)$ admet une algèbre hypercyclique.

Théorème (Bès, Ernst, Prieto, 2020 [7])

Soit ϕ une fonction entière de type exponentiel fini telle que $|\phi(0)| = 1$. Si le taux de croissance de ϕ est sous-exponentiel, alors $\phi(D)$ admet une algèbre hypercyclique.

Table de matières

Quelques problèmes ouverts

- $\phi(z) = 2 + z$?
- Explorer plus le théorème principal ?
  - L'appliquer en dehors d'une droite ?
  - En trouver une propriété différente qui implique l'existence d'une algèbre hypercyclique ?
- Comment prouver qu'un opérateur $\phi(D)$ n'a pas d'algèbre hypercyclique ? (très demandé !)

Théorème (Aron et al., 2007 [1])

Soit p un entier positif et soit $f \in H(\mathbb{C})$. On considère T un opérateur de translation non-trivial sur $H(\mathbb{C})$. Si une fonction non-constante $g \in H(\mathbb{C})$ appartient à $\mathrm{orb}(f^p, T)$, alors l'ordre de chaque zéro de g est un multiple de p.

Théorème (Bayart, 2019 [2])

Let $\phi \in H(\mathbb{C})$ be an entire function of exponential type which is not multiple of an exponential. Then there exists a residual set of functions $f \in H(\mathbb{C})$ such that, for all $m \geq 1$, f^m is hypercyclic for $\phi(D)$.

References I

[1] Richard M Aron et al. "Powers of hypercyclic functions for some classical hypercyclic operators". In : *Integral Equations and Operator Theory* 58.4 (2007), p. 591-596.

[2] Frédéric Bayart. "Hypercyclic algebras". In : *Journal of Functional Analysis* 276.11 (2019), p. 3441-3467.

[3] Frédéric Bayart, Fernando Costa Júnior et Dimitris Papathanasiou. "Baire theorem and hypercyclic algebras". In : *Advances in Mathematics* 376 (2021), p. 107419.

[4] Frédéric Bayart et Étienne Matheron. *Dynamics of linear operators*. 179. Cambridge university press, 2009.

[5] Juan Bès, J Alberto Conejero et Dimitris Papathanasiou. "Convolution operators supporting hypercyclic algebras". In : *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 445.2 (2017), p. 1232-1238.

[6] Juan Bès, José Alberto Conejero et Dimitrios Papathanasiou. "Hypercyclic algebras for convolution and composition operators". In : *Journal of Functional Analysis* 274.10 (2018), p. 2884-2905.

References II

[7] Juan Bès, Romuald Ernst et A Prieto. "Hypercyclic algebras for convolution operators of unimodular constant term". In : *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 483.1 (2020), p. 123595.

[8] George D Birkhoff. "Surface transformations and their dynamical applications". In : *Acta Mathematica* 43.1 (1922), p. 1-119.

[9] Gerald R MacLane. "Sequences of derivatives and normal families". In : *Journal d'Analyse Mathématique* 2.1 (1952), p. 72-87.

[10] Stanislav Shkarin. "On the set of hypercyclic vectors for the differentiation operator". In : *Israel Journal of Mathematics* 180.1 (2010), p. 271-283.