Hypercyclicité simultanée en 2D

F. Costa Jr.

1. Préliminaires

Au long du texte : $\mathbb{R}_+ =]0, \infty[$, $\mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}$, $\mathbb{N}^1 = \mathbb{N} \setminus \{0\}$,
X est un Banach séparable,
$\mathcal{L}(X) = \{T : X \to X : T \text{ linéaire et continu}\}$.

Pour $T \in \mathcal{L}(X)$, on définit

$$HC(T) = \{u \in X : \{u, Tu, T^2u, \dots\} \text{ est dense dans } X\}.$$

$x \in HC(T) \to$ vecteur hypercyclique

$HC(T) \neq \emptyset \to$ T op. hypercyclique.

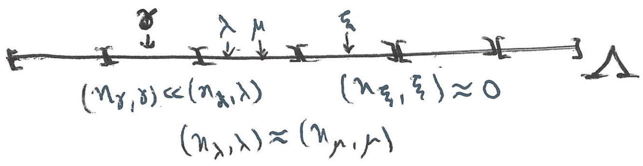
Fait : Si $HC(T) \neq \emptyset$, alor $HC(T)$ est un G_δ dense.

Conséquence : Si $T_1, T_2, \dots \in \mathcal{L}(X)$ et $HC(T_i) \neq \emptyset$, $i = 1, 2, \dots$, alors $\bigcap_{i \in \mathbb{N}^1} HC(T_i) \neq \emptyset$.

Cette conclusion n'est pas triviale pour les familles non-discrètes. $(T_\lambda)_\lambda$. Un élément $x \in \bigcap_\lambda HC(T_\lambda)$ est appelé vecteur hyp. commun pour $(T_\lambda)_\lambda$, et si un tel x existe, on dit que $(T_\lambda)_\lambda$ est simultanément hypercyclique.

Idée : discretiser la famille de paramètres Λ de $(T_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$.

1D : ordre triviale



2D : ordre compliquée

$\lambda = (x_1, y_1)$,
$\mu = (x_2, y_2)$.
$x_1 < x_2$
$y_1 > y_2$

$T_\lambda^{n_\lambda} \ll T_\mu^{n_\mu}$
ou
$T_\lambda^{n_\lambda} \gg T_\mu^{n_\mu}$
???

2. Résultats principaux

Le Critère-CS (Costakis-Sambarino, 2004) est le premier résultat pour les familles générales d'opérateurs.

On admettra le contexte suivant : $(T_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}_+^2} \subset \mathcal{L}(X)$ et il existe $D \subset X$ dense et functions $S_\lambda : D \to D$ telles que $T_\lambda \circ S_\lambda = Id$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}_+^2$.

Théorème. (CS-Critère en 2D). Suppose que $\exists D > 0$ t.q. pour tout $u \in D$ et tout ~~intervalle I~~ carré $K \subset \mathbb{R}_+^2$, les propriétés suivantes sont vraies.

(CS1) $\exists k_0 \in \mathbb{N}$, $\exists (C_k)_k \subset \mathbb{R}_+$ sommable tels que, pour tous $\lambda, \mu \in \cancel{I}\, K$ et $n, k \in \mathbb{N}$ avec $k \geq k_0$,

$$\|\lambda - \mu\| \leq D\sqrt{\frac{k}{n+k}} \Rightarrow \begin{cases} \|T_\lambda^{n+k} S_\mu^{n} u\| \leq C_k & \cancel{\text{si } \mu \leq \lambda} \\ \|T_\lambda^{n} S_\mu^{n+k} u\| \leq C_k & \cancel{\text{si } \lambda \leq \mu} \end{cases}$$

(CS2) Pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe $\tau > 0$ t.q., pour tous $\lambda, \mu \in \cancel{I}\, K$ et tous $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\cancel{0 <} \|\lambda - \mu\| \leq \frac{\tau}{\sqrt{n}} \Longrightarrow \|T_\lambda^n S_\mu^n u - u\| < \varepsilon.$$

Alors $\bigcap_{\lambda \in \mathbb{R}_+^2} HC(T_\lambda)$ est G_δ-dense dans X.

La démonstration de ce résultat utilise une discretisation des carrés avec certaines propriétés. Le lemme clé est le suivant.

Lemme (recouvrement optimal). Soient $K \subset \mathbb{R}_+^2$ un carré de côté ρ et $D \geq 8\rho$. Pour tous $\tau > 0$ et $N \in \mathbb{N}^*$, il existe $q \in \mathbb{N}$ et un recouvrement marqué $(\lambda_i, \Gamma_i)_{i=1,\dots,q}$ de K, de la forme

(L1) $\qquad \Gamma_i = \left[x_i, x_i + \frac{\tau}{\sqrt{iN}}\right] \times \left[y_i, y_i + \frac{\tau}{\sqrt{iN}}\right]$, où $\lambda_i = (x_i, y_i)$,

satisfaisant, pour tous $\lambda \in \Gamma_j, \mu \in \Gamma_l$, avec $1 \leq j < l \leq q$,

(L2) $\qquad \|\lambda - \mu\| \leq D \sqrt{\frac{l-j}{l}}$.

Preuve (du Critère-CS en 2D). On écrit $\mathbb{R}_+^2 = \bigcup_{s \in \mathbb{N}} K_s$, où chaque K_s est un carré de côté $\rho \leq \frac{D}{8}$. On fixe une base dénombrable d'ouverts $(V_t)_t$ de X et on définit, pour tous $s, t \in \mathbb{N}$,

$$A(s,t) = \{u \in X : \forall \lambda \in K_s, \exists m \in \mathbb{N} \text{ tq } T_\lambda^m u \in V_t\}.$$

Note que $\bigcap_{s,t} A(s,t) \subset \bigcap_{\lambda \in \mathbb{R}_+^2} HC(T_\lambda)$ et que chaque $A(s,t)$ est ouvert. On veut montrer qu'ils sont denses.

On fixe $s, t \in \mathbb{N}$ et $\mathcal{U} \overset{op.}{\underset{\neq \emptyset}{\subseteq}} X$. On veut trouver $w \in \mathcal{U} \cap A(s,t)$. Soient $u \in \mathcal{U} \cap \mathcal{D}$ et $v \in V_t \cap \mathcal{D}$. D'après les hypothèses, il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ et $(c_k)_k \subseteq \mathbb{R}_+$ sommable tels que (CS1) est vrai pour u et v. Fixons $\varepsilon > 0$ tel que $B(u; \varepsilon) \subset \mathcal{U}$ et $B(v, 3\varepsilon) \subset V_t$. Alors il existe $\tau > 0$ tel que (CS2) est valable pour v. Soit $N \geq k_0$ tel que $\sum_{k \geq N} c_k < \varepsilon$. On applique le Lemme clé avec $K = K_s$, τ, N, et on trouve $q \in \mathbb{N}$ et un recouvrement marqué satisfaisant (L1) et (L2). On définit

$$w = u + \sum_{j=1}^{q} S_{\lambda_j}^{jN} v$$

et on vérifie que $w \in \mathcal{U} \cap A(s,t)$. En effet, d'après (CS1) avec $n=0$ et $k = jN$, $j = 1, \dots, q$, on a

$$\|w - u\| \leq \sum_{j=1}^{q} \| S_{\lambda_j}^{jN} v \| \leq \sum_{j=1}^{q} c_{jN} \leq \sum_{k \geq N} c_k < \varepsilon$$

$$\Longrightarrow w \in \mathcal{U}.$$

Maintenant, étant donné $\lambda \in K_s$, il existe $i \in \{1, \dots, q\}$ tel que $\lambda \in \Gamma_i$. On prend $m = iN$ et on trouve

$$\|T_\lambda^m w - v\| \leq \|T_\lambda^{iN} u\| + \Big\| \sum_{j=1}^{q} T_\lambda^{iN} S_{\lambda_j}^{jN} v - v \Big\|$$

$$\leq \|T_\lambda^{iN} u\| + \Big\| \sum_{j=1}^{i-1} T_\lambda^{iN} S_{\lambda_j}^{jN} v \Big\| + \Big\| \sum_{j=i+1}^{q} T_\lambda^{iN} S_{\lambda_j}^{jN} v \Big\| + \| T_\lambda^{iN} S_{\lambda_i}^{iN} v - v \|$$

$$\leq \underbrace{\|T_\lambda^{iN} u\|}_{\substack{\text{(CS1)}, n=0 \\ k = iN}} + \sum_{j=1}^{i-1} \underbrace{\|T_\lambda^{iN} S_{\lambda_j}^{jN} v\|}_{\substack{\text{(CS1)}, n=jN \\ k=(i-j)N}} + \sum_{j=i+1}^{q} \underbrace{\|T_\lambda^{iN} S_{\lambda_j}^{jN} v\|}_{\substack{\text{(CS1)}, n=iN \\ k=(i-j)N}} + \underbrace{\|T_\lambda^{iN} S_{\lambda_i}^{iN} v - v\|}_{\substack{\text{(CS2) vu que} \\ \lambda \in \Gamma_i \Rightarrow \|\lambda - \lambda_i\| \leq \frac{1}{\sqrt{iN}}}}$$

$$\leq c_{iN} + \sum_{j=1}^{i-1} c_{(i-j)N} + \sum_{j=i+1}^{q} c_{(j-i)N} + \varepsilon < 3\varepsilon$$

$$\Longrightarrow T_\lambda^m w \in V_t \Rightarrow w \in A(s,t).$$

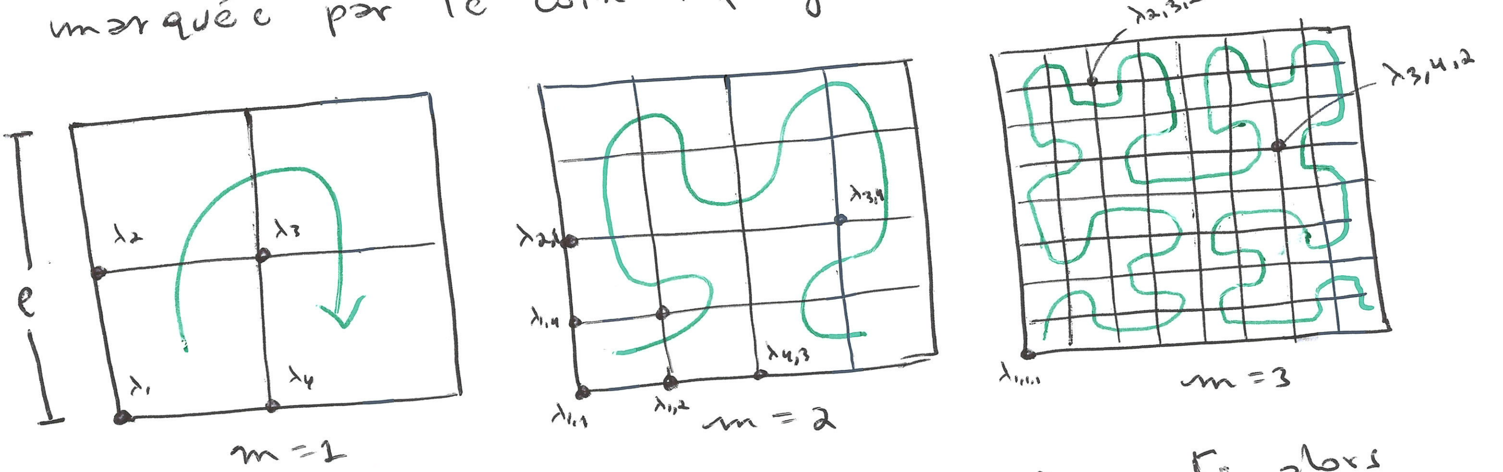
Par conséquent, $w \in \mathcal{U} \cap A(s,t)$, c.q.f.d.

3. Le recouvrement

On continue avec K un carré de côté $\rho > 0$.

Étape 1 : organiser la partition dyadique sur K.

Pour chaque $m \in \mathbb{N}$, on ordonne la partition dyadique d'ordre m par une p-courbe d'Hilbert d'ordre m, marquée par le coin inf. gauche.



Note que si l'on associe chaque partie à un Γ_i, alors $(\Gamma_i)_{i=1,\dots,4^m}$ ne sera jamais un recouvrement que $N \gg 0$, vu que Γ_{4^m} est un carré de côté $\frac{r}{\sqrt{4^m N}} = \frac{r}{2^m\sqrt{N}}$ et la dernière partie de la partition dyadique est un carré de côté $\frac{\rho}{2^m}$.

Étape 2 : déchiffrer les sauts.

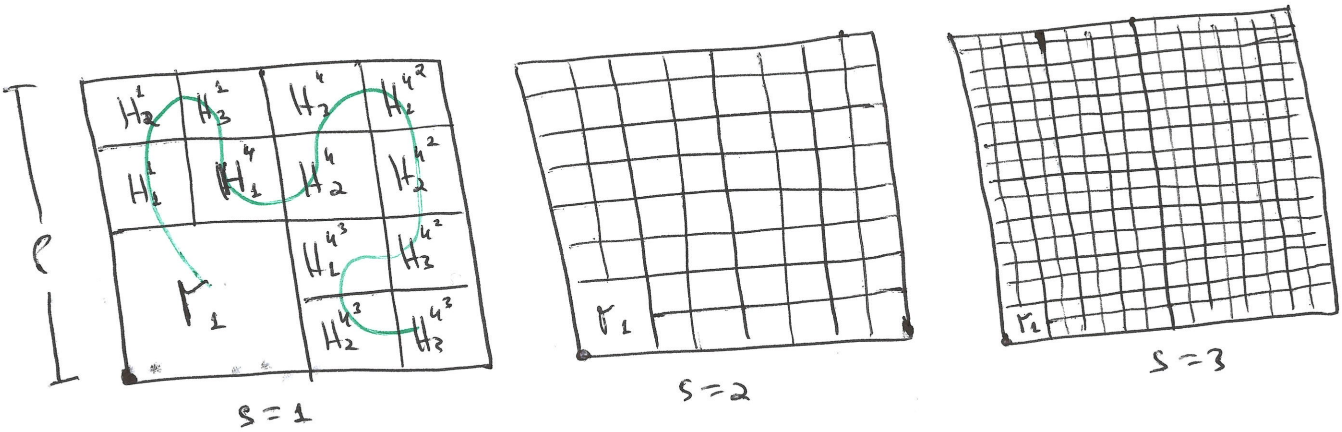
On note les marcations (ou "tags") $\lambda_{\mathbf{j}}$, où $\mathbf{j} \in I_4^m$ et I_4^m est (totalement) ordonné par l'ordre lexicographique. Si $\mathbf{j} < \mathbf{l}$ dans I_4^m, on note $\mathbf{j} \to \mathbf{l}$ le nombre d'indices comptés de $\mathbf{j}$ jusqu'à $\mathbf{l}$.

Lemme 1. $\forall m \in \mathbb{N}, \forall \mathbf{j}, \mathbf{l} \in I_4^m$, on a

$$n \in [\![0, m[\![, \ \|\lambda_{\mathbf{l}} - \lambda_{\mathbf{j}}\| \geq \frac{2^n \rho}{2^m} \Rightarrow \mathbf{j} \to \mathbf{l} \geq \frac{4^{n-1}+2}{3}.$$

Étape 3 : on définit le recouvrement optimal

Soient $\tau > 0$ et $N \in \mathbb{N}^*$. On fixe $s \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{\tau}{\sqrt{N}} \geqslant \frac{\rho}{2^s}$ et on redéfinit $\frac{\tau}{\sqrt{N}} = \frac{\rho}{2^s}$.



Par exemple, supposons $s=1$. On a

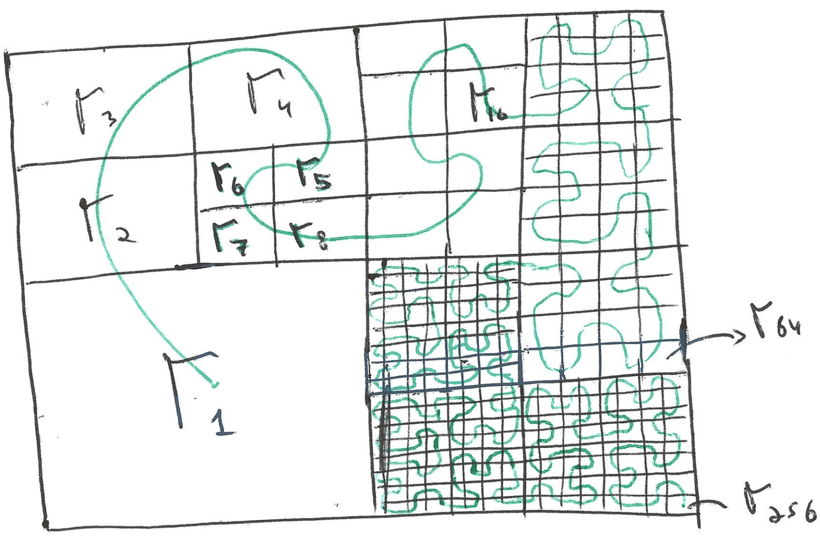
Γ_1 carré de côté $\frac{\tau}{\sqrt{N}} = \frac{\rho}{2}$

$\underbrace{\Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4}_{\# = 3}$ carrés de côtés $\frac{\tau}{\sqrt{2N}} > \frac{\tau}{\sqrt{3N}} > \frac{\tau}{\sqrt{4N}} = \frac{\rho}{2^2}$

$\underbrace{\Gamma_5, \dots, \Gamma_{16}}_{\# 12}$ " " " $\frac{\tau}{\sqrt{5N}} > \dots > \frac{\tau}{\sqrt{16N}} = \frac{\rho}{2^3}$

$\underbrace{\Gamma_{17}, \dots, \Gamma_{64}}_{\# 48}$ " " " $\frac{\tau}{\sqrt{17N}} > \dots > \frac{\tau}{\sqrt{64N}} = \frac{\rho}{2^4}$

$\underbrace{\Gamma_{65}, \dots, \Gamma_{256}}_{\# 192}$ " " " $\frac{\tau}{\sqrt{65N}} > \dots > \frac{\tau}{\sqrt{192N}} = \frac{\rho}{2^5}$



Ce qui garanti cette logique en général est le

Lemme 2. Pour tous $k, n \in \mathbb{N}$, si $\frac{\tau}{\sqrt{kN}} = \frac{\rho}{2^n}$, alors

$$\underbrace{\frac{\tau}{\sqrt{(k+1)N}} > \cdots > \frac{\tau}{\sqrt{4kN}}}_{\# = 3k} = \frac{\rho}{2^{n+1}}$$

Étape 4 : prouver que les propriétés sont satisfaites

Ça se fait par disjonction de cas, comptage par résolution et utilisation du Lemme 1.

4. Problèmes ouverts

Cette méthode fonctionne pour :

- Sierpinski
- Koch
- Courbes de Hölder

Question 1. Que passe-t-il si la fractale n'est pas uniformément contractante ?

Question 2. Que passe-t-il dans le cas non-conexe (poussière de Cantor) ?

Question 3. Et si l'on substitue $\frac{\tau}{n}$ par $\frac{\tau}{F(n)}$ autre que $F(n) = n^{\frac{1}{\gamma}}$? Par exemple $F(n) = n \log n$.