UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

# MINICURSO DE LÓGICA MATEMÁTICA

Uma introdução à Lógica Matemática e uma aplicação do método da Dedução Natural a sistemas axiomáticos formais

Fernando Vieira Costa Júnior

Arapiraca - AL
2014

# RESUMO

Este trabalho tem por finalidade introduzir o aluno à lógica matemática, essencial na vida acadêmica de qualquer matemático. A estruturação lógica do pensamento, norteada por regras de inferência puramente lógico-formais, permeiam toda e qualquer demonstração matemática. Dentre outras coisas, o minicurso se propõe a evidenciar a lógica por trás das demonstrações matemáticas de todos os tipos, sempre buscando fazê-lo compreender que toda demonstração matemática deve ter o mínimo de formalismo. Mesmo as demonstrações em linguagem informal deve conter, talvez intuitivamente, o que a caracterizará como *demonstração formal*. Conceitos lógicos que surgem constantemente nas disciplinas matemáticas serão evidenciados. Perguntas essenciais que muitos alunos ou têm dúvida, ou nunca se questionaram sobre, serão trazidas à toda e esclarecidas com o devido rigor logico matemático. Por que, quando supomos alguma hipótese numa demonstração, toda afirmação posterior a esta *deverá* levar em consideração a sua validade hipotética? Como descartar corretamente uma hipótese? Como funciona um teorema? Como funciona uma demonstração por absurdo? Por que meu professor está tão preocupado em me perguntar "o que garante essa passagem"? Essas e muitas outras perguntas serão cuidadosamente esclarecidas no minicurso. Não obstante, nosso enfoque principal é trabalhar a estruturação do pensamento (ou raciocínio), numa demonstração. Como ferramenta de auxílio deste trabalho, utilizaremos o método da dedução natural, que possibilita demonstrações com um formalismo impecável, contando com a devida justificação formal de *cada* passo realizado nas demonstrações. Aplicaremos o método à Teoria dos Conjuntos, à Álgebra Linear e à Geometria Euclidiana (Plana e Espacial).

**Palavras-chave:** lógica matemática, cálculo de predicados, CQC, dedução natural, sistemas formais, teoria dos conjuntos.

# Sumário


**1 INTRODUÇÃO E PRELIMINARES** **5**

1.1 A Lógica: Definição . . . . . 5
1.2 O Surgimento da Lógica . . . . . 6
1.3 Argumento, Dedução e Indução . . . . . 7
1.4 A Lógica Simbólica . . . . . 8

**2 CONCEITOS INICIAIS** **11**

2.1 Termo e Proposição . . . . . 11
2.2 Predicados . . . . . 12
2.3 Princípios Fundamentais da Lógica . . . . . 13
2.4 Raciocínio e Inferência . . . . . 14

**3 O CÁLCULO PROPOSICIONAL CLÁSSICO (CPC)** **17**

3.1 A Composição das Proposições . . . . . 17
3.1.1 A sintaxe e a semântica do CPC − Os operadores lógicos . . . . . 17
3.1.2 Hierarquia de conectivos e proposições bem formadas . . . . . 22
3.2 Verdade . . . . . 24
3.2.1 Tabelas verdade . . . . . 24
3.2.2 Tautologias, Contradições e Contingências . . . . . 26
3.2.3 Principais tautologias . . . . . 27
3.2.4 Consequência lógica . . . . . 28
3.3 Tablôs Semânticos (Semantic Tableaux) . . . . . 31
3.3.1 Introduzindo os tablôs . . . . . 31
3.3.2 Regras de Construção de Tablôs . . . . . 32
3.3.3 Provando fórmulas . . . . . 33
3.3.4 Provando consequências lógicas . . . . . 38
3.4 Dedução natural no CPC . . . . . 40
3.4.1 Introduzindo a Dedução Natural . . . . . 40
3.4.2 Regras de Inferência Diretas . . . . . 41
3.4.3 Regras de Inferência Hipotéticas . . . . . 46
3.4.4 Dedução de novas regras de inferência . . . . . 47

**4 O CÁLCULO QUANTIFICACIONAL CLÁSSICO (CQC)** **55**

4.1 Predicados . . . . . 56
4.2 Quantificadores . . . . . 60
4.2.1 Quantificação simples . . . . . 60
4.2.2 Quantificação múltipla . . . . . 64
4.3 Tabelas Verdade . . . . . 68
4.4 Tablôs Semânticos no CQC . . . . . 69

4.4.1 Comentários sobre variáveis livres . . . 76
4.5 Dedução Natural no CQC . . . 78
4.5.1 Regras para o quantificador universal . . . 78
4.5.2 Regras para o quantificador existencial . . . 80
4.5.3 Regras de inferência derivadas para quantificadores . . . 84
4.5.4 Erros e violações . . . 85
4.6 Considerações Finais do capítulo . . . 88

**5 DEDUÇÃO NATURAL APLICADA A SISTEMAS AXIOMÁTICOS 89**
5.1 Axiomatização e formalização . . . 89
5.2 Teoria dos Conjuntos . . . 91
5.2.1 Nota inicial . . . 91
5.2.2 Conceitos básicos . . . 92
5.2.3 Conjunto vazio . . . 94
5.2.4 Primeiras demonstrações com dedução natural . . . 95
5.2.5 Operações com conjuntos I: União e Interseção . . . 96
5.2.6 Operações com conjuntos II: Diferença e Complementarismo . . . 103
5.2.7 Uma simplificação usual . . . 107
5.3 Geometria Euclidiana . . . 110
5.3.1 Algumas regras e definições . . . 110
5.3.2 Triângulos . . . 112
5.3.3 Algumas demonstrações no plano . . . 114
5.3.4 Algumas demonstrações no espaço . . . 114
5.4 Álgebra Linear . . . 117
5.4.1 Espaços Vetoriais . . . 117
5.4.2 Algumas demonstrações . . . 118
5.5 Importância do estudo . . . 121

**6 REFERÊNCIAS 123**

# Capítulo 1

# INTRODUÇÃO E PRELIMINARES

As mais variadas áreas do conhecimento utilizam estratégias de argumentação, processos de inferência, formulação de hipóteses de estudo, etc. sejam para desenvolver um raciocínio ou uma pesquisa, ou simplesmente para apresentar a outras pessoas (leitores ou ouvintes) variados conceitos. A própria fala cotidiana engloba argumentações, inferências e conclusões. Todos estes (e outros mais) são "entes" dos quais o estudo da lógica se ocupa.

Na atuação cotidiana é fácil perceber a não necessidade de saber a fundo o que está por trás do que se está falando (metalinguagem). Muitas vezes um conhecimento razoável sobre, por exemplo, falácias, permitem elevar o indivíduo da relação imediata do cotidiano e possibilitar, por exemplo, a percepção de uma argumentação falaciosa num discurso político ou telejornal. Na prática científica a necessidade de um conhecimento lógico mais aprofundado é evidente, pois o conhecimento de como as ferramentas lógicas das quais esta ciência se ocupa facilita a compreensão dos mais variados textos, com as mais variadas formas de argumentação e exposição de conteúdo, que o estudante possa se deparar em sua carreira acadêmica.

## 1.1 A Lógica: Definição

Podemos falar sobre lógica num sentido amplo, sem apontar do que estamos necessariamente falando, ou podemos falar de lógicas, que se diferenciam por diversas peculiaridades, como trataremos mais adiante. Mas o que é, então, a lógica? Podemos notar que, *a priori*, é uma ciência que não se enquadra em categorias como ciências humanas ou exatas, dada a abrangência de seu campo de estudo. Podemos tentar definir esta ciência, porém, certamente encontraremos muitas dificuldades em resumi-la em uma definição concisa e satisfatória. Imagine só definir a física, ou a matemática. Certamente é uma tarefa difícil. Geralmente os autores optam por desviar desse encargo, deixando o leitor tirar suas conclusões ao fim do curso, texto, etc., se limitando a dizer apenas do que esta ciência se ocupa.

No entanto, alguns autores tentam definir, mesmo que insatisfatoriamente, a lógica. Como exemplo, temos: "LÓGICA é a ciência que estuda princípios e métodos de inferência, tendo o objetivo principal de determinar em que condições certas *coisas* se seguem (são consequências), ou não, de outras" ([MORTARI], p. 2, grifo nosso). O leitor perceberá facilmente que essa definição é demasiadamente vaga para o que se propõe: definir. A final, que "coisas" são essas? O que é inferência? O que é consequência? O que quer dizer "se seguir de algo"? Alguns autores consideram a lógica um ente tão abstrato quanto o ponto, a reta, ou outros entes geométricos indefiníveis (ou aceitos sem definição).

## 1.2 O Surgimento da Lógica

Já que dificilmente conseguiremos defini-la, será que podemos responder quando ela surgiu? Caímos, aqui, em outra problemática. Sabemos dizer quando surgiu a matemática? Não podemos responder precisamente sem antes saber do que estamos falando. Ou seja, a pergunta, "o que é a matemática?" é anterior. Hoje ainda se discute se a matemática "surgiu" em algum momento, ou se ela sempre existiu e apenas foi descoberta/percebida por humanos recentemente. A mesma coisa acontece com a lógica. Dependendo do que se quer dizer com "lógica", percebemos que há discussão ainda presente nos dias de hoje sobre se a lógica de fato "surgiu", ou é algo natural, algo como uma transcrição da realidade independente da existência humana.

Podemos, no entanto, especificar nossa pergunta. Reformulá-la como, para a matemática, "quando o cálculo foi descoberto?" ou "quando os primeiros estudos sobre diferenciação surgiram?". Sabe-se que um desenvolvimento grandioso da lógica (o ponta pé inicial para a lógica como a conhecemos hoje) se deu a partir de estudos aristotélicos que se seguiram de eventos envolvendo alguns nomes como Parmênides, Zenão, Sócrates, Platão e os sofistas. Porém, pesquisas histórico-geográficas apontam textos indianos anteriores sobre o assunto. Não obstante, é tradicionalmente concedido a Aristóteles o título de "pai da lógica".[1]

Aristóteles estudou as formas dos argumentos e, pela primeira vez, formalizou o raciocínio. Sua lógica tinha por objetivo a busca da verdade. Para ele, a partir de formalizações do raciocínio poder-se-ia fazer ciência, com verdades absolutas e inquestionáveis. Os princípios fundamentais da lógica aristotélica que formam a base da lógica clássica são: identidade, lei da não-contradição e lei do terceiro-excluído.[2] Estes são os princípios que fundamentam a lógica formal a qual estudaremos, e que, como o nome diz, diz respeito à forma. Aristóteles realizou, ainda, estudos sobre os modalizadores (possível, necessário, contingente, etc.) que foram o germe da lógica modal hoje estudada. Não nos interessa

[1] Parmênides de Eleia (530−460 a.C.), Zenão de Eleia (490−430 a.C.), que era discípulo de Parmênides, Sócrates (469−399 a.C.) e Platão (427−347 a.C.), que era discípulo de Sócrates, foram predecessores da lógica clássica de Aristóteles (384−322 a.C.), que era discípulo de Platão. Todos filósofos gregos.

[2] Veremos mais detalhadamente adiante.

estuda-los aqui. Se tratado de lógica formal, o que esperamos que fique claro mais adiante para o leitor é que, diferentemente da informal, pouco importa o conteúdo do argumento, se ele fala sobre pessoas, hobbits, elfos ou smurfs, apenas sua forma será estudada. O conteúdo da argumentação (falácias, tipos de discurso, etc.) é objeto de estudo da lógica informal.

## 1.3 Argumento, Dedução e Indução

Mas... O que é argumento? O leitor certamente tem uma ideia do que se trata. *Argumento* é justificativa. Serve, por exemplo, para tentar convencer alguém de algo, ou para tentar justificar algo que acontece. Na ciência, qualquer afirmação só é aceita se bem justificada, como bem sabemos. Na lógica formal estudaremos se as conclusões atingidas nas argumentações foram suficientemente justificadas. Estas conclusões são obtidas por meio de inferências que ocorrem no interior do argumento. *Inferência* é uma afirmação (ou colocação) baseada em informações (ou propostas) anteriores. Portanto, a partir da inferência podemos atingir conhecimento novo. Isto é, a partir de conhecimentos pré-estabelecidos ou hipotéticos conseguiremos, através do processo de inferência, obter novo conhecimento. Argumento é, portanto, o conjunto {informação-base-inferência-conclusão}. Chamaremos estas informações que servirão de base para as outras de *premissas*. Ou seja, premissas são informações essenciais que possibilitarão gerar uma conclusão no argumento.

Na argumentação, podemos obter dois tipos de conhecimento novo: o *indutivo* e o *dedutivo*. Quando as premissas são constituídas de casos particulares, e, destas, conclui-se algo geral, obtemos um conhecimento indutivo. Dessa forma, o conhecimento indutivo não nos fornece uma verdade absoluta, mas uma verdade que, geralmente, possui exceções ou contraexemplos, mesmo que em pequena quantidade. Como um clássico exemplo do filósofo David Hume[3], temos:
Este cisne é branco;
Aquele cisne é banco;
Todos os cisnes observados são brancos;
Conclusão: todos os cisnes são brancos.[4]

Como percebemos, os argumentos indutivos produzem provas por amostragem, o que dá um tom probabilístico às suas conclusões. Na argumentação dedutiva, partimos de premissas e leis, teoremas ou regras gerais, obtendo provas conclusivas, sem aquele caráter probabilístico antes comentado. Ou seja, na dedução, a partir de premissas (muitas vezes hipotéticas) e se utilizando de regras de inferência (veremos detalhadamente na seção

[3]David Hume (1711−1776) foi um filósofo cético escocês.
[4]Ao contrário de épocas atrás, hoje sabemos que existem cisnes negros.

3.4.2) baseadas em verdades universais, obtemos resultados conclusivos.[5] A forma de um argumento dedutivo válido[6] nos indica que a conclusão é verdadeira se as premissas o forem. Isto é, não é possível que as premissas sejam verdadeiras e a conclusão falsa. Resumindo, as informações que servem de base para outras novas são chamadas de premissas. A forma como podemos articular as regras, leis, teoremas, etc. com as premissas possuídas, de forma a inferir algo novo, dá-se o nome de *regra de inferência*.[7] O resultado conclusivo é dito *consequência lógica*[8] das premissas. Os conceitos de *validade* e *invalidade* de um argumento dedutivo (conceitos que não se aplicam argumentos indutivos) são determinadados pela forma com que este assume. Vejamos um exemplo clássico de aristotélico (**P1** e **P2** são nossas premissas e **C** a conclusão):

**P1**: Todo homem é mortal;
**P2**: Sócrates é um homem;
**C**: Sócrates é mortal.

## 1.4 A Lógica Simbólica

Perceba que o argumento anterior, a pesar de *formal* (no sentido de que sua forma tem relevante importância), se utiliza de uma *linguagem informal* (neste caso, o português) para se expressar. O uso de símbolos na lógica (ou na matemática) não é tão antigo quanto Aristóteles. Houveram tempos em que, por exemplo, uma demonstração matemática era feita por meio da fala, da oratória. Algo como: "[...] se a raiz quadrada de 2 fosse um número racionável, poderíamos dizer que é igual a divisão de um número p por um número q. Elevando ambos os membros da igualdade ao quadrado [...]". Pelos inconvenientes que possam surgir em uma demonstração pela linguagem informal, em virtude das ambiguidades inerentes às línguas[9], em meados do século XIX, o matemático George Boole[10] se utilizou de símbolos matemáticos para desenvolver seus trabalhos lógicos, como o *cálculo de classes* (também conhecido como *álgebra booleana*), por exemplo. Desde então as palavras foram substituídas por símbolos, eliminando totalmente os problemas

[5]Podemos dizer que o conhecimento dedutivo é obtido de forma inversa ao indutivo. enquanto que no indutivo partimos de casos particulares a fim de atingir conclusões universais, no dedutivo partimos de verdades universais para concluir casos particulares.

[6]Veremos mais detalhadamente na seção 3.3.3 o que são fórmulas válidas, conceito definindo pela definição 7.

[7]Ver seção 3.4.2.

[8]Ver seção 3.2.4.

[9]Essas ambiguidades incontáveis argumentos inválidos que parecem válidos, e que chegam a conclusões falsas. Esse tipo de argumento é chamado de falácias, e a fala coloquial abre as portas para elas. Por exemplo, veja este argumento:
**P1**: Quanto mais queijo, mais buracos;
**P2**: Quanto mais buracos, menos queijo;
**C**: Quanto mais queijo, menos queijo.

[10]George Boole (1815-64) foi um importantíssimo (principalmente para a computação) matemático e filósofo britânico.

de ambiguidade.[11] É importante ressaltar que a utilização de símbolos em lógica, além de eliminar quase todas as falácias e além de trazer simplicidade e elegância aos enunciados e demonstrações, viabilizou o grande desenvolvimento desta ciência nos últimos séculos. Em contraste com a linguagem informal, podemos dizer que a *lógica simbólica* se utiliza de uma *linguagem artificial.* Muitas vezes a lógica formal em linguagem comum é referida como *lógica clássica.*

Agora vamos afunilar nosso estudo para o que nos interessa. Definiremos conceitos fundamentais para o desenvolvimento e entendimento das lógicas, no geral, e do cálculo proposicional clássico (já te explico), em particular. Falaremos sobre ordens em lógica e dos princípios que fundamentam a lógica clássica e (a negação deles) as lógicas não-clássicas.

---

[11] Por mais que pareça de acordo com leis lógicas, o argumento falacioso da nota 9 pode ser evitado se exprimirmos o argumento em letras. Ele parece ser assim:

**P1**: Se A, então B;
**P2**: Se B, então C;
**C**: Se A, então C.

Mas, na verdade, ele é assim:

**P1**: Se D, então E;
**P2**: Se F, então G
**C**: Não podemos concluir algo daqui.

Formalizando a lógica, foi possível praticamente extinguir as falácias. Na lógica formalizada, apenas algumas poucas falácias existem.

# Capítulo 2

# CONCEITOS INICIAIS

Logo introduziremos os símbolos da linguagem artificial que estudaremos. É importante deixar bem claro que, a pesar de ser uma linguagem artificial, uma lógica formal, não deixa de ser uma linguagem simplesmente, e, como tal, conta com uma gramática própria. Falaremos, portanto, de sujeitos e predicados, de conectivos, conjunções, disjunções etc. que o leitor certamente estudou na disciplina de língua portuguesa no ensino fundamental e médio. Ou seja, falaremos sobre a sintaxe e a semântica da nossa linguagem.

## 2.1 Termo e Proposição

Quando queremos dar nomes às coisas, utilizamos nomes (ou designações). Como, por exemplo, quando uma mãe tem um bebê e diz: "seu nome será Maria". Ou você quando está trabalhando numa hipótese matemática, você designa que o objeto de trabalho será "o número real positivo cujo quadrado é dois". Todos esses nomes são chamados de *termos* que são, justamente, *designações*. Representará, no nosso estudo, o sujeito do qual falamos sobre. Vejamos alguns exemplos de termos:

- 3 e meia da tarde
- O menor número primo maior que $10^3$
- O conjunto dos números reais

Note que um termo não é uma afirmação. O termo referencia alguma coisa, aponta o objeto do qual se discute. Para uma afirmação dá-se o nome de *proposição*. Podemos facilmente diferenciar uma proposição de um termo: quando é possível dizer se certa afirmação é verdadeira ou falsa, esta é uma proposição. As palavras *verdadeiro* e *falso* que associamos às proposições são chamadas de *valores de verdade*. Note que não faz sentido dizer que '4' (que é um termo) ou 'a casa da esquerda' é verdadeiro ou falso. No entanto, podemos verificar que à proposição 'a Terra gira em torno do Sol' ou 'o quadrado de 3 é 6' podemos associar valores de verdade. Vejamos alguns exemplos de proposições:

- Emma Watson é uma linda atriz
- $sen\alpha \pm sen\beta = 2sen\left(\frac{\alpha\pm\beta}{2}\right) cos\left(\frac{\alpha\mp\beta}{2}\right)$
- O Brasil precisa da copa do mundo

As proposições são representadas por *sentenças* que, para a linguagem que estudaremos, assim como para a língua portuguesa, é uma sequência de palavras com pelo menos um verbo flexionado. No entanto, nem toda sentença é uma proposição. Por exemplo, sentenças do tipo 'feche a porta!' ou 'posso sentar ao seu lado?' não são proposições. Podemos dizer, então, que proposições são sentenças declarativas. Temos ainda que duas sentenças podem representar uma mesma proposição. Por exemplo, compare as sentenças:

- Dolly e Sinha são os animais de estimação da Srta. Fernanda
- Os animais de estimação Dolly e Sinha pertencem a Srta. Fernanda
- O dono dos animais de estimação Dolly e Sinha é a Srta. Fernanda

Perceba que todas estas sentenças, apesar de diferentes, representam a mesma proposição.

É importante ressaltar que, ao enunciar uma proposição, nada é dito sobre seu valor de verdade. Ou seja, podemos trabalhar com proposições sem que elas sejam de fato verdadeiras. Caso análogo acontece numa demonstração matemática, pois ao provar um teorema, "tomamos" algo como verdadeiro e inferimos algo novo, isto é, se aquele algo for verdadeiro, a conclusão inferida também o será, mas a proposição tomada pode ser verdadeira em alguns casos de problemas e falsa em outros. Não nos é interessante, porém é oportuno, ressaltar que, às proposições enunciadas como fatidicamente verdadeiras dá-se o nome de *asserções*. Encontramos facilmente asserções em textos de conteúdo matemático, como, por exemplo, "os elementos dos números reais variam 'suavemente' ".

## 2.2 Predicados

Recorreremos novamente à língua falada para ilustrar o que é o predicado que utilisaremos no nosso estudo e, como você já deve suspeitar, tem o mesmo sentido da língua portuguesa. À 'parte' da proposição que associa uma característica (ou uma qualidade) ao sujeito da oração em questão (ou a um conjunto, como veremos adiante), dá-se o nome de *predicado*. Numa proposição, quando dizemos que uma coisa é algo, ou falamos das características de alguém, por exemplo, estamos desenvolvendo o predicado dessa proposição. O predicado pode referir-se a alguém ou a algum elemento em particular, isto é, ser específico, como a proposição "Sócrates é um homem" (onde dizemos que o elemento do conjunto de homens "Sócrates" tem a qualidade de "ser um homem"), ou pode referir-se a um conjunto de elementos que apresentam alguma qualidade em comum, ou seja, aos x (chamadas variáveis) que pertencem a um dado conjunto A.

Dessa forma, formularemos proposições como "todo x tem tal e tal qualidade (pertence ao conjunto tal)", ou "qualquer que seja o x que seja de tal e tal forma é y", ou, ainda, "existe um x que é y". As expressões "todo" (no sentido de "para todos") e "existe um" são chamadas de quantificadores, pois denotam a quantidade de elementos que tem alguma característica. É importante frisar que os predicados funcionarão literalmente como conjuntos. Isso será melhor esclarecido na seção 4.

No presente minicurso estudaremos duas lógicas, onde uma é expansão da outra. A lógica que se desenvolve em cima das proposições "em si" recebe o nome de *Lógica Proposicional*. Nela, trabalharemos com as proposições "inteiras". A lógica que se desenvolve em cima das proposições e dos predicados das proposições recebe o nome de *Lógica de Predicados*. Nela, além de trabalhar com proposições "inteiras", estas serão "quebradas" em sujeitos e predicados, complexificando a lógica e tornando-a mais interessante para estudos mais sofisticados e para o desenvolvimento de teorias mais complexas. Comumente nos referimos à Lógica como Cálculo, pois operamos fórmulas (ver definição 6 da seção 3.3.3). Dessa forma, nos utilizamos também dos termos Cálculo Proposicional e Cálculo de Predicados, assim como Cálculo Proposicional Clássico (CPC) e Cálculo Quantificacional Clássico (CQC), respectivamente.

O Cálculo de Predicados apresenta variações de complexidade predical, são as chamadas ordens desse cálculo. Se as variáveis referem-se somente a elementos, o cálculo é chamado de *Lógica de Primeira Ordem* (ou Lógica de Ordem 1). É o caso do CQC que estudaremos. Se as variáveis referirem-se a uma característica (a um conjunto inteiro), o cálculo é chamado de *Lógica de Segunda Ordem* (ou Lógica de Ordem 2), e assim por diante, até a *Lógica de N-ésima Ordem*. Ou seja, quando se trabalha com o cálculo de predicados, geralmente fala-se sobre sua ordem antes. Perceba que não faz sentido falar de ordem no CPC, pois esse conceito se aplica aos predicados.

## 2.3 Princípios Fundamentais da Lógica

Uma teoria axiomática[1] tem sua estrutura apoiada em alicerces. Para a Teoria dos Números Naturais, temos os axiomas de Peano, para a álgebra booleana, temos os axiomas de Boole, para a geometria, temos os axiomas de Euclides (ou postulados, hoje considerado a mesma coisa). À lógica formal clássica (aristotélica) agregam-se os três *Princípios Fundamentais da Lógica*, são eles: identidade, não-contradição e terceiro excluído.

O *Princípio da Identidade* afirma que qualquer objeto é idêntico a si próprio. *O Princípio da não-contradição* afirma que não é possível que algo seja e, simultaneamente, não seja. Ou seja, não pode ocorrer de duas afirmações contraditórias terem o mesmo valor de verdade no mesmo momento (digamos, no mesmo "discurso"). *O Princípio do*

[1]Suponho que o leitor tenha uma ideia do que seja um sistema axiomático. Podemos dizer que, ao invés de axiomático, o CQC é um sistema formal. Estas afirmações não serão interessantes para nós.

*Terceiro Excluído* afirma que ou uma proposição ocorre, ou não ocorre. Não há meio termo entre verdade e falsidade, e uma terceira opção estaria excluída das possibilidades. Daí o nome. Os princípios lógicos citados fundamentam o CPC e o CQC. Em qualquer momento, nessa linguagem, quando alguma suposição nos fornece uma proposição que não concorda com qualquer um que seja desses princípios, temos aí um absurdo, o que nos leva a descrer na suposição inicial.

Como dissemos anteriormente, não existe apenas uma lógica. Assim como existem as geometrias não-euclidianas, existem as lógicas não-clássicas. Estas são obtidas negando ou excluindo ao menos um dos princípios fundamentais mencionados. Por exemplo, a negação do princípio do terceiro excluído origina as lógicas polivalentes, onde mais de dois valores de verdade são considerados (algo como "indeterminado", "neutro", etc.). Não trataremos disso aqui, obviamente.

## 2.4 Raciocínio e Inferência

Já temos ao menos uma ideia do que seja raciocínio e inferência. Para praticar nosso pensamento lógico, nossa capacidade de dedução e nossa argumentação, vamos resolver alguns exercícios de raciocínio lógico antes de começarmos nosso estudo do CPC. Antes passarmos aos problemas, analisemos uma versão de um problema lógico clássico do qual, após uma modificação ou outra, derivam diversos (e divertidos) problemas mais recentes, como o que se segue:

> Há não muito tempo atrás, num país distante, havia um velho rei que tinha três filhas, inteligentíssimas e de indescritível beleza, chamadas Guilhermina, Genoveva e Griselda. Sentindo-se perto de partir desta para melhor, e sem saber qual das filhas designar como sua sucessora, o velho rei resolveu submetê-las a um teste. A vencedora não apenas seria a nova soberana, com ainda receberia a senha da conta secreta do rei (num banco Suíço), além de um fim de semana com despesas pagas na Disneylândia. Chamando as filhas à sua presença, o rei mostrou-lhes cinco pares de brincos idênticos em tudo, com exceção das pedras neles engatadas: três eram de esmeralda e duas de rubi. O rei vendou, então, os olhos das moças e, escolhendo ao acaso, colocou em cada uma delas um par de brincos. O teste consistia no seguinte: aquela que pudesse dizer sem sombra de dúvida qual o tipo de pedra que havia em seus brincos herdaria o reino (e a conta da Suíça, etc.).
>
> A primeira que desejou tentar foi Guilhermina, de quem foi removida a venda dos olhos. Guilhermina examinou os brincos de suas irmãs, mas não foi capaz de dizer que tipo de pedra estava nos seus (e retirou-se furiosa). A segunda que desejou tentar foi Genoveva. Contudo, após examinar os brincos de Griselda,

Genoveva se deu conta de que também não sabia se seus brincos eram de esmeralda ou rubi e, da mesma furiosa forma que sua irmã, saiu batendo a porta. Quanto a Griselda, antes mesmo que o rei lhe tirasse a venda dos olhos, anunciou corretamente, [em] alto e bom [som], o tipo de pedra de seus brincos, dizendo ainda o porquê de sua afirmação. Assim, ela herdou o reino, a conta na Suíça e, na viagem à Disneylândia, conheceu um jovem cirurgião plástico, com quem se casou e foi feliz para sempre.

Que brincos tinha Griselda? De esmeralda ou de rubi? Justifique sua resposta ([MORTARI], p. 2-3).

Antes de saber qual a resposta e a respectiva justificação, tente pensar quais as possibilidades e tentar encontrar a razão lógica para a qual Griselda não precisou retirar a venda para responder corretamente. O fato de as irmãs de Griselda terem saído furiosas por não saberem a resposta implica alguma coisa? Que informações que o problema te fornece (premissas) poderiam fazer com que você inferisse que os brincos são de esmeralda ou rubi? Lembrando que não adianta afirmar que os brincos eram de esmeralda por que, por ter mais pares deste tipo, a probabilidade é maior. O problema fornece recurso suficiente para deduzir (não induzir) a resposta. Uma boa justificativa será dada após a realização dos exercícios que faremos.

**EXERCÍCIOS**

1. Tente resolver o problema dos brincos. Dica: tente ver o que acontece se você supuser que os brincos são de rubi. Tente excluir possibilidades até chegar alguma resposta.

2. Um senhor tem um cavalo de uma única cor. Este senhor tem três amigos, João, Pedro e Roberto, que não conhecem a cor do cavalo. Os amigos decidem tentar adivinhar a cor do cavalo. Para facilitar, o senhor diz que a cor do cavalo ou é branca, ou marrom ou cinza. João diz que o cavalo é branco. Pedro diz que ou o cavalo é branco ou é marrom. Roberto diz que o cavalo não é cinza. Após ouvir as tentativas dos amigos, o senhor diz que dois deles estão correto e um está errado. Determine a cor do cavalo.

3. Os Porteiros do Céu e do Inferno. Após a morte, um senhor foi deixado em um local onde havia duas entradas: uma para o céu e outra para o inferno. Cada entrada tinha um porteiro. As entradas e os porteiros não podem ser distinguidas visualmente. Para decidir qual das entradas escolher, este senhor pode fazer uma única pergunta a um dos porteiros. A pergunta deve se referir ao céu ou ao inferno, ou aos próprios porteiros. Ele havia sido informado de que o porteiro do inferno sempre mentia, e o porteiro do céu sempre dizia a verdade. Determine qual das

perguntas abaixo permite a este senhor decidir com certeza sobre qual é a entrada do céu.

a. Esta é a entrada do céu?

b. Você diz a verdade?

c. O outro porteiro diz a verdade?

d. Se você fosse o outro porteiro, você diria que esta é a entrada do céu?

Agora que exercitamos um pouco nosso raciocínio, vamos voltar ao problema dos brincos. Podemos encontrar no mesmo livro onde o problema foi proposto uma boa justificativa para ele:

> Existem dois pares de brincos de rubi; logo, se tanto Genoveva quanto Griselda estivessem com brincos de rubi, Guilhermina saberia que os seus são de esmeralda. Guilhermina, contudo, não soube dizer qual o tipo de pedra em seus brincos. Logo, ou Genoveva e Griselda tinham brincos de esmeralda, ou uma tinha brincos de rubi e a outra de esmeralda. Mas disso se segue agora que, se Griselda tivesse brincos de rubi, Genoveva, a segunda, teria visto isso, e saberia que os seus são de esmeralda. Genoveva, contudo, também não soube dizer qual o tipo de pedra em seus brincos. Logo, Giselda não tinha brincos de rubi, ou seja, seus brincos eram de esmeralda ([MORTARI], p. 7).

Percebemos que a conclusão foi deduzida das premissas através de processos de inferência. Perceba que isso não é bem uma transcrição do que foi feito para que se soubesse a resposta, mas mais uma descrição sistemática do raciocínio que levou à conclusão, apresentando as razões pelas quais se pôde concluir que os brincos eram de esmeralda e não de rubi. Note ainda que, mesmo não utilizando uma linguagem artificial para deduzir a resposta (e sim o português falado), foi possível organizar o pensamento de forma a garanti gradualmente que a conclusão seguiu, de fato, das premissas, sendo listadas em ordem as razões que levaram a conclusões intermediárias e depois à conclusão desejada. Essa é a característica que diferencia a lógica formal da informal. A forma como o argumento é exposto é crucial para se deduzir.

# Capítulo 3

# O CÁLCULO PROPOSICIONAL CLÁSSICO (CPC)

## 3.1 A Composição das Proposições

Com o advento do *homo symbolicus* na escala de evolução humana, o homem passa utilizar símbolos para representar coisas, um alfabeto, o que deu início à linguagem escrita. Por exemplo, para construir o português foi preciso de símbolos que se agrupassem e se articulassem de forma a representar nosso pensamento. De modo geral, para construir uma linguagem precisamos de símbolos. Ora, o CQC é uma linguagem, portanto, se utiliza de símbolos. Como dissemos, existem lógicas que – assim como há diferença entre as línguas alemã e a russa – têm suas variações simbólicas uma da outra (de fala, sintaxe, semântica, etc.). Não é de nosso interesse saber como se constrói uma linguagem artificial qualquer, é suficiente saber como o CQC é composto.

Pois bem, podemos agrupar o alfabeto do CQC (que utilizaremos) em um conjunto de 67 caracteres:

$$a \;\; b \;\; c \;\; d \;\; e \;\; f \;\; g \;\; h \;\; i \;\; j \;\; k \;\; l \;\; m \;\; n \;\; o \;\; p \;\; q \;\; r \;\; s \;\; t \;\; u \;\; v \;\; w \;\; x \;\; y \;\; z$$

$$A \;\; B \;\; C \;\; D \;\; E \;\; F \;\; G \;\; H \;\; I \;\; J \;\; K \;\; L \;\; M \;\; N \;\; O \;\; P \;\; Q \;\; R \;\; S \;\; T$$

$$\neg \;\; \Rightarrow \;\; \Leftrightarrow \;\; \rightarrow \;\; \leftrightarrow \;\; \vee \;\; \wedge \;\; \exists \;\; \forall \;\; ( \;\; ) \;\; 0 \;\; 1 \;\; 2 \;\; 3 \;\; 4 \;\; 5 \;\; 6 \;\; 7 \;\; 8 \;\; 9$$

Com esses caracteres poderemos desenvolver todo nosso curso, mas antes, claro, vamos aprender gradualmente o que cada um representa (semântica) e como utilizá-los (sintaxe).

### 3.1.1 A sintaxe e a semântica do CPC – Os operadores lógicos

Inicialmente estudaremos o CPC, calculando apenas proposições. Por hora utilizaremos apenas alguns dos caracteres vistos. Para o melhor entendimento da linguagem do

CPC, faremos, em alguns momentos, uma relação com o português. Faremos o estudo da sintaxe e da semântica do CPC simultaneamente.

Ao nos comunicarmos na língua falada formamos sentenças, na maioria das vezes proposições. Estas proposições geralmente são constituídas de proposições menores, ligadas por alguns conectivos. O CPC funciona da mesma maneira. Em lógica, estes são chamados de *conectivos lógicos* (ou *operadores lógicos*). Chamaremos as proposições mais simples do CPC de constantes proposicionais. Para denotá-las, utilizaremos as letras maiúsculas $A, B, C, ..., T$. Para constantes quaisquer, utilizaremos $U, V, W, X, Y$ ou $Z$.

Para facilitar nosso estudo, nos ocupemos mais um pouco relacionando nossa linguagem artificial ao português. Posteriormente faremos transcrições da língua falada para o CPC, colocando em símbolos lógicos (formalizando) uma proposição qualquer de uma língua natural. Não entraremos em detalhes de como fazer uma estrutura[1] lógica completa, mas vamos, inicialmente, dar nomes às nossas constantes proposicionais. Uma regra básica é: você pode relacionar duas ou mais constantes proposicionais a uma mesma proposição. O que nos trará problemas é atribuir uma mesma constante proposicional à duas proposições diferentes (**Exercício:** faça uma relação com funções matemáticas). Tomando o devido cuidado para que isso não ocorra, evitaremos a construção de falácias verbais como a *falácia do equívoco*.[2] Chamaremos a seguinte relação de símbolos e seus respectivos significados de *função interpretação*.[3] Utilizaremos para formar alguns exemplos e realizar alguns exercícios:

**FUNÇÃO INTERPRETAÇÃO 1**

*A: saio de casa*
*B: o Brasil é o país mais justo*
*C: chove*
*D: danço com o guarda-chuva*
*E: esquio*
*F: faz frio*
*G: faz calor*
*H: Paulo é o pai de João*
*I: João é o filho de Paulo*
*M: a rua fica molhada*

[1]O objetivo do curso não abrange o conteúdo de estruturas de um sistema formal. Não nos ocuparemos, portanto, de estruturas, modelos, etc.

[2]Cometer esta falácia consiste em usar, num mesmo argumento, uma palavra/frase que denota duas coisas diferentes (ou com dois sentidos). Ou seja, cometer um equívoco de sentido/significado. Por exemplo:
**P1:** Nada é melhor do que uma vida tranquila e feliz;
**P2:** Um misto quente é melhor do que nada;
**C:** Um misto quente é melhor do que uma vida tranquila e feliz.

[3]Servirá como uma função interpretação de uma estrutura qualquer. Não nos preocuparemos com o rigor em definir a estrutura, pois, como já falamos, não trataremos de estruturas neste minicurso.

*N: neva*
*S: faz sol*
*V: venta*
*X, Y, Z, W: proposições quaisquer*

Antes de vermos o primeiro conectivo, é importante adiantar que podemos compor proposições compostas (já te explico). Se quisermos fazer isso, devemos separar a proposição composta inicial com parênteses. Mais adiante mostraremos este cuidado com exemplos. Nosso primeiro conectivo será a *negação*, simbolizado por "$\neg$". Conseguimos negar proposições de todos os tipos, compostas e simples, de qualquer tamanho. Intuitivamente, a negação indica que a proposição negada "não ocorre". Para fazer isso, basta colocarmos esse símbolo antes da constante negada: $\neg X$, onde $X$ é uma constante proposicional qualquer e queremos dizer que "$X$ não ocorre" ou, mais comumente, "não $X$".
**Exercício:** negue as constantes da função interpretação 1 e pronuncie seu significado no português.

Agora vejamos outro conectivo, a *disjunção*, simbolizado por "$\vee$". Esse conectivo relaciona duas proposições e nos informa que alguma das duas "ocorrem" ou, dizendo de outra forma, que pelo menos uma das duas ocorre, ou que no mínimo uma das duas ocorre. Este símbolo é colocado entre as proposições relacionadas: $X \vee Y$, onde $X$ e $Y$ são constantes proposicionais quaisquer e queremos dizer que pelo menos uma das duas ocorre, ou, mais comumente, "$X$ ou $Y$".
**Ex.:**
$C \vee S$: ou chove ou faz sol.
$F \vee G$: Ou faz frio ou faz calor.
**Exercício:** Forme algumas disjunções com a função interpretação 1.

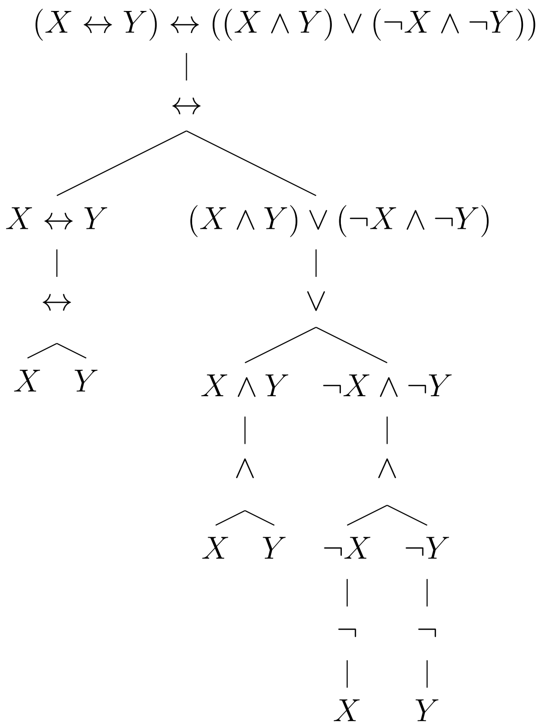
O próximo conectivo é irmão gêmeo do anterior. É a *conjunção*, simbolizada por "$\wedge$". Assim como a disjunção, a conjunção relaciona duas proposições e é utilizada entre as proposições relacionadas. A diferença está no significado. A conjunção nos diz que ambas as proposições relacionadas ocorrem conjuntamente. Não mais uma ou outra, mas ambas. Assim, $X \wedge Y$ indica-nos que tanto $X$ quanto $Y$ ocorrem, isto é, "$X$ e $Y$".
**Ex.:**
$N \wedge F$: neva e faz frio;
$C \wedge (\neg A)$: chove e eu não saio de casa.
**Exercício:** Forme algumas conjunções com a função interpretação 1.

Quando utilizamos os conectivos corretamente, dizemos que construímos "proposições bem formadas".[4] Note que, ao conjugar duas proposições, formamos uma nova proposição.

[4] Na realidade, da definição de sentença tem-se que um conjunto de palavras só é uma sentença se é bem formado, isto é, se está de acordo com as regras gramaticais da linguagem em questão. Por exemplo, "canário passarinho O canta amarelo chama que se," não é uma sentença do português. Como toda proposição é uma sentença, podemos dizer que uma "proposição" só é uma proposição se for bem formada.

Antes tínhamos nossas proposições simples, as constantes proposicionais, e, ao conjugar, ficamos com o que chamaremos de *proposição composta*. Ora, os conectivos são utilizados em proposições, sejam elas simples ou compostas. Portanto, podemos compor proposições compostas, formando proposições compostas "maiores". Diremos que uma proposição é *minimamente composta* se conta com, pelo menos, um operador. Para fins de organização (para bem formar proposições), separaremos cada composição com parênteses.
Assim, são bem formadas as proposições:
$(\neg F) \wedge S$
$(\neg N) \vee (\neg F)$
$S \wedge (\neg(N \wedge F))$
$(\neg(X \vee Y)) \wedge (Z \vee W)$
$\neg(\neg(\neg(\neg(\neg(\neg(X))))))$
E são mal formadas as proposições:
$A\neg$
$G \wedge \neg$
$S\neg \vee B$
$X \vee Y($

Posteriormente, quando falarmos da hierarquia de conectivos, poderemos simplificar nossas proposições utilizando menos parênteses. Voltaremos, então, a falar sobre proposições bem-formadas. É importante perceber que as proposições compostas são caracterizadas pela possibilidade de decomporem-se em proposições mais simples. Como exemplo, vamos decompor a proposição $(X \leftrightarrow Y) \Leftrightarrow (X \wedge Y) \vee (\neg X \wedge \neg Y)$ em esquema de árvore:




**Exercício:** Forme proposições compostas e as decomponha – em esquema de árvore – em proposições simples. Utilize a função interpretação 1 que demos às letras anteriormente (ou crie uma nova função interpretação).

Vamos estabelecer duas relações conhecidas como Leis de De Morgan (ou Teoremas de De Morgan) que nos servirá para negar uma conjunção ou uma disjunção. Sejam $X$ e $Y$ duas proposições quaisquer. A *Primeira Lei de De Morgan* estabelece que, negar uma conjunção de $X$ e $Y$ "é o mesmo que" disjuntar a negação de $X$ com a negação de $Y$. Ou seja, $\neg(X \wedge Y)$ "é o mesmo que" $(\neg X) \vee (\neg Y)$. A Segunda Lei de De Morgan estabelece que negar uma disjunção de X e Y "é o mesmo que" conjugar a negação de X com a negação de Y. Isto é, $\neg(X \vee Y)$ "é o mesmo que" $(\neg X) \wedge (\neg Y)$.

Com "é o mesmo que" queremos dizer que essas proposições são logicamente equivalentes. Veremos mais adiante como as *equivalências lógicas* funcionam, e o quão são úteis para o nosso estudo da lógica. Por hora, utilizaremos o símbolo "$\Leftrightarrow$" entre duas proposições para simbolizar que elas são logicamente equivalentes. As leis enunciadas, portanto, nada mais são do que equivalências lógicas, ficando assim anotadas:

$$1^{\underline{a}} \text{ Lei de De Morgan: } (\neg(X \wedge Y)) \Leftrightarrow ((\neg X) \vee (\neg Y))$$

$$2^{\underline{a}} \text{ Lei de De Morgan: } (\neg(X \vee Y)) \Leftrightarrow ((\neg X) \wedge (\neg Y))$$

**Exercício:** exemplifique as equivalências lógicas das Leis de De Morgan criando 5 proposições no CPC e as transcrevendo para o português. Se quiser, use a função interpretação 1. **Ex.:** $(\neg(N \wedge F)) \Leftrightarrow ((\neg N) \vee (\neg F))$. Transcrevendo, temos que "não acontece que neva e faz frio" é o mesmo que "não neva ou não faz frio".

Agora vejamos nossos dois últimos conectivos, que são *conectivos de condição*, o *condicional* e o *bi-condicional*. Utilizamos estes conectivos quando uma proposição estabelece uma condição para que outra ocorra. Dois tipos de condição são propostos no CPC: *condição suficiente* e *condição necessária*. Quando uma proposição $X$ estabelece uma condição suficiente para que uma proposição $Y$ ocorra, dizemos que, "se $X$, então $Y$". Chamamos "se... então ..." de condicional e simbolizamos por "$\rightarrow$". Se for o caso de $X \rightarrow Y$, dizemos que $X$ é condição suficiente para $Y$. Temos ainda que $Y$ é condição necessária para $X$, pois, por definição de "$\rightarrow$", é necessário que $Y$ ocorra para que $X$ ocorra, em outras palavras, é impossível que $Y$ não ocorra e que $X$ ocorra. Demonstremos: se, por hipótese, tivermos que $Y$ não ocorre, que $X \rightarrow Y$, e que $X$ ocorre, então, como $X$ é suficiente para $Y$ ocorrer, e $X$ ocorre, $Y$ também ocorre, contradizendo a hipótese de que $Y$ não ocorre. Essa pequena demonstração dará resultado a outra equivalência lógica chamada de *contraposição*, como veremos adiante. No exemplo $X \rightarrow Y$, $X$ é chamado de antecedente, e $Y$ de consequente do condicional. O condicional é definido da seguinte forma:

**DEFINIÇÃO 1** *$X \rightarrow Y$ é definido como $(\neg X) \vee Y$, isto é, $(X \rightarrow Y) \Leftrightarrow ((\neg X) \vee Y)$.*

Quando $X$ estabelece uma condição ao mesmo tempo necessária e suficiente para $Y$, dizemos que "$X$ se e somente se $Y$". Chamamos o "... se, e somente se..." de *bi-condicional* e simbolizamos por "$\leftrightarrow$". Caso $X \leftrightarrow Y$, temos que $Y$ também estabelecerá uma condição necessária e suficiente para $X$ (ou seja, vice-versa). É importante ressaltar que a equivalência lógica e o bi-condicional se tratam do mesmo ente lógico, embora no nosso estudo sejam utilizados para finalidades levemente diferentes, apenas para fins didáticos. Define-se o bi-condicional assim:

**DEFINIÇÃO 2** *$X \leftrightarrow Y$ é definido como $(X \to Y) \wedge (Y \to X)$, isto é, $(X \leftrightarrow Y) \Leftrightarrow ((X \to Y) \wedge (Y \to X))$.*

**Exercício:** exemplifique os conectivos de condição (e as condições necessária e suficiente) com frases em português.

Porteriormente, demonstraremos que $(X \leftrightarrow Y) \Leftrightarrow ((X \wedge Y) \vee ((\neg X) \wedge (\neg Y)))$, assim como enunciaremos a chamada *Lei da Dupla Negação*, que afirma que $(\neg(\neg X)) \Leftrightarrow X$. Note que, da definição 1 se segue que negar um condicional é o mesmo que uma disjunção. Ou seja, podemos aplicar a 1ª Lei de De Morgan. Fazendo isso, temos:

$$(\neg(X \to Y)) \Leftrightarrow (\neg((\neg X) \vee Y)) \Leftrightarrow ((\neg(\neg X)) \wedge (\neg Y)) \Leftrightarrow (X \wedge (\neg Y))$$

(Primeiro aplicamos a definição do condicional, depois a 1ª Lei de De Morgan e, em seguida, a Lei da Dupla Negação, obtendo a negação do condicional.) Posteriormente (a partir da seção 3.2.3) utilizaremos estas e outras leis para deduzir mais proposições.
**Exercício:** negue o bi-condicional.

### 3.1.2 Hierarquia de conectivos e proposições bem formadas

Ao operar com um operador lógico, formamos uma proposição composta. Caso quisermos operar essa proposição composta com outra proposição, como o leitor percebeu, a colocávamos entre parênteses, para explicitar com quem estávamos operando. Se supusermos que os operadores são "iguais perante a lei" no cálculo, isso deve ser feito até mesmo ao negar uma proposição simples, o que nos fornece uma proposição composta. No entanto, se supormos uma hierarquia, uma precedência de cálculo entre os operadores, veremos que muitos parênteses poderão ser eliminados.

A ordem de precedência que geralmente se adota (e que adotaremos aqui) é a que se segue:
$\neg$ - A negação precede todos. É o operador lógico mais imediato.
$\wedge$ - A conjunção vem em segundo lugar.
$\vee$ - Embora a disjunção venha em terceiro, continuaremos separando ela da conjunção com o uso de parênteses.
$\to$ - A implicação precede a bi-implicação.

$\leftrightarrow$ - Finalmente, a bi-implicação. No entanto, assim como no caso da disjunção com a conjunção, o uso do parêntese para a separação entre implicação e bi-implicação não será descontinuado.

Comparemos, agora, como as equivalências que vimos ficam com a nova regra:

$$(X \to Y) \Leftrightarrow (\neg X \lor Y)$$

$$(X \leftrightarrow Y) \Leftrightarrow ((X \land Y) \lor (\neg X \land \neg Y))$$

$$\neg\neg X \Leftrightarrow X$$

$$\neg(X \land Y) \Leftrightarrow \neg X \lor \neg Y$$

Sempre que operarmos com condição, separaremos por parênteses as proposições dos dois lados do símbolo da equivalência lógica (o mesmo serve para a implicação lógica que veremos a partir da seção 3.2.1).

Portanto, para bem formar uma proposição, teremos que ter certos cuidados sintáticos: (1) Uma negação sempre "fica antes" de uma proposição. Se for composta, deverá estar entre parênteses. Se for simples, a negação deverá estar "colada" ao caractere (sem espaço os separando). É importante lembrar que a negação nunca está entre duas proposições. Não faz sentido operá-la assim: $A\neg B$; (2) Ao operar com a conjunção ou com a disjunção devemos tê-las entre duas outras proposições que, caso forem compostas, deverão se apresentar entre parênteses; (3) Ao operar com uma implicação ou bi-implicação também deveremos tê-las entre duas outras proposições. Caso queira-se conjugar duas implicações, os parênteses são essenciais. Se o caso for implicar duas conjunções (digo, uma implicar a outra), o uso de parêntese é desnecessário, dada a precedência dos operadores.

**EXERCÍCIOS:**

1. Transcreva para a linguagem do CPC as seguintes frases, utilizando a função interpretação 1:

   (a) Se neva, então não faz calor

   (b) Se faz calor, então não neva

   (c) Paulo é o pai de João se, e somente se, João é o filho de Paulo

   (d) O Brasil não é o país mais justo

   (e) Se acontecer de chover e então molhar a rua, eu saio de casa e não esquio

   (f) Se faz sol e não venta, então faz calor, mas se faz sol e venta, então não faz calor

   (g) Se chove e venta, então faz frio, mas se chove e não venta, faz frio ou não faz frio

(h) Se eu não saio de casa é porque chove

(i) Se eu esquio é porque neva

(j) Eu vou para casa, se chover

2. Crie uma notação para transcrever as seguintes frases para a linguagem do CPC:

   (a) Eu gosto de chuva, mas se chover não saio de casa.

   (b) Faz calor, mas, se faz frio, não tem sol, porém tem sol.

## 3.2 Verdade

Ao falar de verdade, o nome de Alfred Tarski[5] vem logo à frente do discurso. De maneira bem simples, sua definição de verdade estabelece que "$X$ é verdadeira se e somente se $p$" (aqui, $p$ é uma sentença da linguagem e $X$ o nome desta sentença). Por exemplo: A sentença 'a neve é branca' é verdadeira se e somente se *a neve é branca*. Na concepção clássica (aristotélica) da verdade, podemos dizer que "verdadeiro" é definido como "correspondente à realidade".[6] Obviamente, não nos aprofundaremos nesses assuntos, que são mais filosóficos do que lógicos. O que é importante para nós é saber que no CPC (e no CQC) são feitas as chamadas *Valorações*, onde define-se, em uma espécie de modelo, quais são as proposições iniciais verdadeiras. É aqui que mora a verdade ou falsidade das proposições da linguagem artificial que estamos trabalhando.

O fato é que, às proposições, podemos relacionar dois valores de verdade. O *verdadeiro* ou o *falso* (que são características das proposições, e não as proposições em si). O que é importante ressaltar é que uma proposição é considerada verdadeira para uma finalidade, ou num dado momento (numa dada valoração). Podemos tomar a mesma proposição como falsa em outro momento (em outra valoração). Vejamos um artifício clássico para a organização dessas possibilidades.

### 3.2.1 Tabelas verdade

Há muito tempo organiza-se os valores de verdade de proposições, ou conjuntos de proposições, em tabelas. Quanto mais constantes envolvidas, maior fica a tabela. Indica-

[5] Alfred Tarski (1901−1983) é considerado um dos três maiores lógicos da história, ao lado de Kurt Gödel (1906−1978) e Aristóteles. Seu artigo, *Der Wahrheitsbegriff in der deduktiven Disziplinen* (O Conceito de Verdade nas Linguagens Formalizadas), é considerado um dos mais fundamentais publicados na área da Lógica. Recomendamos a tradução dos principais textos de Tarski feita por Cezar A. Mortari e Luiz H. Dutra (et. al.) (cf. REFERENCIAR).

[6] Como aquela máxima de Aristóteles que afirma o seguinte:

> *Dizer do que é, que é, ou do que não é, que não é,*
> *é verdadeiro, enquanto que dizer do que é, que não é,*
> *ou do que não é, que é, é falso.* ([TARSKI], p. 160)

remos verdadeiro por **V**, e falso por **F**. Veja os exemplos:

| $X$ |
|---|
| **V** |
| **F** |

| $X$ | $Y$ |
|---|---|
| **V** | **V** |
| **V** | **F** |
| **F** | **V** |
| **F** | **F** |

| $X$ | $Y$ | $Z$ |
|---|---|---|
| **V** | **V** | **V** |
| **V** | **V** | **F** |
| **V** | **F** | **V** |
| **F** | **V** | **V** |
| **V** | **F** | **F** |
| **F** | **V** | **F** |
| **F** | **F** | **V** |
| **F** | **F** | **F** |

Podemos considerar que cada linha das tabelas constituem uma valoração. Em qualquer caso, a quantidade de valorações possíveis é (segundo a disciplina matemática *análise combinatória*) igual a $2^n$, onde $n$ é o número de constantes envolvidas.

Para fazer as tabelas verdade das proposições compostas, primeiro temos que saber como ficam as valorações de cada operador. Note que os operadores precisam das constantes para operar.[7] Ou seja, a verdade de um operador depende da verdade das proposições relacionadas. Dessa forma, devemos apresentar, na tabela, o valor de verdade de todas as constantes. No geral, ao fazer a tabela verdade de uma proposição composta, devemos destrinchar todas as proposições envolvidas, e dar a verdade de cada uma delas. A verdade das proposições maiores é dependente da verdade das proposições "interiores" a ela. Definiremos as tabelas verdade dos operadores lógicos da seguinte forma:

Negação

| $X$ | $\neg X$ |
|---|---|
| **V** | **F** |
| **F** | **V** |

Conjunção

| $X$ | $Y$ | $X \wedge Y$ |
|---|---|---|
| **V** | **V** | **V** |
| **V** | **F** | **F** |
| **F** | **V** | **F** |
| **F** | **F** | **F** |

Disjunção

| $X$ | $Y$ | $X \vee Y$ |
|---|---|---|
| **V** | **V** | **V** |
| **V** | **F** | **V** |
| **F** | **V** | **V** |
| **F** | **F** | **F** |

Note que, no caso em que uma proposição é falsa, sua negação é verdadeira (vice-versa). Na conjunção, como o leitor deve ter percebido, sua verdade depende da verdade conjunta das proposições relacionadas. E a verdade da disjunção depende da verdade disjunta das proposições relacionadas, isto é, da verdade de, no mínimo, uma delas. Agora vejamos os

[7] Como vimos, não faz sentido negar uma conjunção (ou conjugar uma negação) assim: $\neg\wedge$

demais operadores:

Implicação

| $X$ | $Y$ | $X \rightarrow Y$ |
|---|---|---|
| **V** | **V** | **V** |
| **V** | **F** | **F** |
| **F** | **V** | **V** |
| **F** | **F** | **V** |

Bi-implicação

| $X$ | $Y$ | $X \leftrightarrow Y$ |
|---|---|---|
| **V** | **V** | **V** |
| **V** | **F** | **F** |
| **F** | **V** | **F** |
| **F** | **F** | **V** |

Olhe as tabelas por alguns instantes e tente tirar alguma conclusão do porquê que elas são assim. Pois bem, como, na implicação, $X$ é condição suficiente para $Y$, isso deve se refletir em todas as linhas. A verdade de $X$ é suficiente para a verdade de $Y$. Isso não se reflete na segunda linha, onde o antecedente é verdadeiro e o consequente falso. Esse é o único caso em que a implicação torna-se falsa. Podemos tentar visualizar de outra forma. Como $Y$ é necessário para $X$, podemos olhar as valorações ao contrário. A falsidade de $Y$ deve acarretar, necessariamente, na falsidade de $X$, o que não é o caso na segunda linha.

Na bi-implicação, temos que $X$ e $Y$ são condição necessária e suficiente uma para a outra. Aplicando o raciocínio do parágrafo anterior em ambas as direções, conclui-se sua tabela verdade. É oportuno ressaltar que, como a equivalência lógica e o bi-condicional se tratam do mesmo operador, podemos construir tabelas verdade para ambos de forma idêntica.

**Exercício:** Crie uma função interpretação e forme 5 proposições que exemplifiquem cada uma das operações, analisando como as valorações refletem na proposição em português.

### 3.2.2 Tautologias, Contradições e Contingências

Vamos categorizar as proposições em três categorias. Elas poderão ser *Tautologias*, *Contradições* ou *Contingências*. No CPC, quando possível[8], descobriremos isso pela sua tabela verdade. Vamos às definições:

**DEFINIÇÃO 3** *Dizemos que uma proposição é uma* ***tautologia*** *quando é verdadeira em todas as valorações possíveis.*

**DEFINIÇÃO 4** *Dizemos que uma proposição é uma* ***contradição*** *quando é falsa em todas as valorações possíveis.*

**DEFINIÇÃO 5** *Dizemos que uma proposição é uma* ***contingência*** *quando é verdadeira em pelo menos uma valoração, e falsa em pelo menos uma valoração.*

[8]Quando possível porque, quando tratamos de proposições com muitas constantes envolvidas, a tabela verdade fica grande de mais para um ser humano (ao contrário de um computador) construí-la num período de tempo razoável. Imagine construir uma tabela verdade para uma proposição de 7 constantes. A tabela verdade terá 128 linhas.

**Exemplos:** Vejamos qual a categoria da proposição $X \to (Y \to X)$:

| $X$ | $Y$ | $Y \to X$ | $X \to (Y \to X)$ |
|---|---|---|---|
| **V** | **V** | **V** | **V** |
| **V** | **F** | **V** | **V** |
| **F** | **V** | **F** | **V** |
| **F** | **F** | **V** | **V** |

Portanto, $X \to (Y \to X)$ é uma tautologia.[9]

Vejamos qual a categoria da proposição $X \wedge \neg X$:

| $X$ | $\neg X$ | $X \wedge \neg X$ |
|---|---|---|
| **V** | **F** | **F** |

Portanto, $X \wedge \neg X$ é uma contradição.[10]

Vejamos qual a categoria da proposição $\neg(\neg X \to Y) \to \neg Y \vee \neg X$:

| $X$ | $Y$ | $\neg X$ | $\neg Y$ | $\neg X \to Y$ | $\neg(\neg X \to Y)$ | $\neg Y \vee \neg X$ | $\neg(\neg X \to Y) \to \neg Y \vee \neg X$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **V** | **V** | **F** | **F** | **V** | **F** | **F** | **V** |
| **V** | **F** | **F** | **V** | **V** | **F** | **V** | **V** |
| **F** | **V** | **V** | **F** | **V** | **F** | **V** | **V** |
| **F** | **F** | **V** | **V** | **F** | **V** | **V** | **V** |

Portanto, $\neg(\neg X \to Y) \to \neg Y \vee \neg X$ é uma tautologia.

É de suma importância perceber que a negação de uma contradição é um tautologia e que qualquer proposição da forma $X \wedge \neg X$ é uma contradição. Segundo o princípio da não-contradição, devemos rejeitar qualquer hipótese que leve a isso. Chamaremos também (como em matemática) uma contradição de absurdo.

**Exercício:** Forme 3 contingências e faça suas tabelas verdade.

### 3.2.3 Principais tautologias

Todas as equivalências lógicas são tautologias,[11] mas nem todas as tautologias são equivalências lógicas. A última tabela verdade que fizemos evidencia isso. Usemos o símbolo "$\Rightarrow$" para sinalizar que o antecedente "implica logicamente" o consequente, num sentido similar ao da equivalência lógica. Ou seja, no caso da última tabela verdade, tivemos uma implicação lógica. Obviamente, "$\Rightarrow$" e "$\to$" se tratam do mesmo operador, utilizados para fins levemente diferentes. Veremos agora algumas das tautologias mais

[9]Conhecida como *Prefixação.*

[10]Quando, numa demonstração, se conclui algo como $X \wedge \neg X$, dizemos que a(s) hipótese(s) foram reduzidas a um absurdo.

[11]Como antes ressaltado, "$\Leftrightarrow$" e "$\leftrightarrow$" se tratam do mesmo operador.

importantes.[12] Considere X, Y, e Z proposições de qualquer tipo (simples ou compostas):

| | |
|---|---|
| Princípio de identidade | $X \Rightarrow X$ |
| Princípio de não contradição | $\neg(X \wedge \neg X)$ |
| Princípio do terceiro excluído | $X \vee \neg X$ |
| Comutatividade da disjunção | $X \vee Y \Leftrightarrow Y \vee Y$ |
| Comutatividade da conjunção | $X \wedge Y \Leftrightarrow Y \wedge X$ |
| Comutatividade do bi-condicional | $(X \leftrightarrow Y) \Leftrightarrow (Y \leftrightarrow X)$ |
| Associatividade da disjunção | $X \vee (Y \vee Z) \Leftrightarrow (X \vee Y) \vee Z$ |
| Associatividade da conjunção | $X \wedge (Y \wedge Z) \Leftrightarrow (X \wedge Y) \wedge Z$ |
| Associatividade do bi-condicional | $X \leftrightarrow (Y \leftrightarrow Z) \Leftrightarrow (X \leftrightarrow Y) \leftrightarrow Z$ |
| Distributividade | $X \wedge (Y \vee Z) \Leftrightarrow (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z)$ |
| | $X \vee (Y \wedge Z) \Leftrightarrow (X \vee Y) \wedge (X \vee Z)$ |
| Idempotência da disjunção | $X \vee X \Leftrightarrow X$ |
| Idempotência da conjunção | $X \wedge X \Leftrightarrow X$ |
| Leis de De Morgan | $\neg(X \wedge Y) \Leftrightarrow \neg X \vee \neg Y$ |
| | $\neg(X \vee Y) \Leftrightarrow \neg X \wedge \neg Y$ |
| Dupla Negação | $\neg\neg X \Leftrightarrow Y$ |
| Equivalência do condicional | $(X \rightarrow Y) \Leftrightarrow \neg X \vee Y$ |
| Equivalência do bi-condicional | $(X \leftrightarrow Y) \Leftrightarrow (X \wedge Y) \vee (\neg X \wedge \neg Y)$ |
| | $(X \leftrightarrow Y) \Leftrightarrow (X \rightarrow Y) \wedge (Y \rightarrow X)$ |
| Contraposição | $(X \rightarrow Y) \Leftrightarrow (\neg Y \rightarrow \neg X)$ |
| Exportação/Importação | $(X \wedge Y \rightarrow Z) \Leftrightarrow (X \rightarrow (Y \rightarrow Z))$ |
| Modus Ponens | $X \wedge (X \rightarrow Y) \Rightarrow Y$ |
| Modus Tollens | $\neg Y \wedge (X \rightarrow Y) \Rightarrow \neg X$ |
| Silogismo disjuntivo | $(X \vee Y) \wedge \neg X \Rightarrow Y$ |
| Silogismo hipotético | $(X \rightarrow Y) \wedge (Y \rightarrow Z) \Rightarrow (X \rightarrow Z)$ |
| Refutação por absurdo | $(X \rightarrow Y) \wedge (X \rightarrow \neg Y) \Rightarrow \neg X$ |
| Demonstração por absurdo | $(\neg X \rightarrow C) \Rightarrow X$ (C é uma contradição qualquer.) |

A seguir, voltaremos a falar sobre argumentação e, a partir das tautologias que vimos, apresentaremos meios para argumentar formalmente através de regras. Aplicaremos nossos resultados nos sistemas de dedução que veremos nas seções 3.3 e 3.4.

### 3.2.4 Consequência lógica

Já falamos de inferência na seção 1.3 e, como dito, inferência se trata de uma afirmação nova baseada em fatos anteriores. Esses fatos são proposições, onde um conjunto delas nos

[12] Dentre elas, as que darão fruto, posteriormente, às regras de inferência (as quais receberão os mesmo nomes das tautologias).

dará (ou não) a possibilidade de concluir algo novo. Esta seção introduzirá uma notação para uma consequência advinda de um conjunto de proposições. Será suficiente, para os fins do minicurso[13], fazer as considerações dos parágrafos seguintes.

Como dissemos, o conectivo "$\Leftrightarrow$" representa o mesmo ente lógico do conectivo "$\leftrightarrow$". Agora volte à lista de tautologias da seção anterior (3.2.3) e perceba, na linha da equivalência do bi-condicional, que $X \leftrightarrow Y$ é o mesmo que $X \rightarrow Y$ "e" $Y \rightarrow X$. O que nos permite afirmar que $X \Leftrightarrow Y$ é o mesmo que $X \Rightarrow Y$ "e" $Y \Rightarrow X$. Perceba, ainda, que essa equivalência reflete o fato de que $X$ é condição suficiente para $Y$ e $Y$ condição necessária para $X$, o que nos fornece $X \Rightarrow Y$, e, ainda, que $Y$ é condição suficiente para $X$ e $X$ condição necessária para $Y$, o que nos fornece $Y \Rightarrow X$.[14]

Fizemos isso pelo seguinte motivo. Considere a implicação lógica $(X \Rightarrow Y)$, onde $X$ e $Y$ são proposições de qualquer tipo. O antecedente $X$ é suficiente, ou me fornece base suficiente, para $Y$. Ou seja, podemos conseguir $Y$ com $X$. Introduziremos o símbolo "$\vdash$" para representar, num sentido parecido ao da implicação lógica, o que chamaremos de *consequência lógica*. A diferença é que, onde se colocaria o antecedente na implicação, aqui não só poderá estar uma proposição, mas um conjunto delas. Quando o conjunto for unitário, a consequência lógica será tratada de forma idêntica à implicação lógica que já conhecemos. Ao utilizarmos a consequência lógica, teremos algo como $\{X, Y\} \vdash Z$. Por exemplo:

$$\{A \rightarrow B,\ C \vee \neg A,\ (\neg B \wedge C) \rightarrow A\} \vdash C \vee B$$

Por hora, para saber se uma proposição é consequência lógica de um conjunto de proposições, basta conjugar cada elemento do conjunto, formando uma só proposição. Dessa forma ficamos com um conjunto unitário, o que nos permite tratar a consequência da mesma forma da implicação lógica, isto é, fazer uma tabela verdade e verificar se temos uma tautologia. O leitor perceberá que isso é o mesmo que colocar cada elemento do conjunto em uma coluna, já que iríamos fazer isso mesmo ao destrinchar a proposição que iríamos conjugar. Dessa forma, o conjunto será "verdadeiro"[15] na valoração em que cada elemento do conjunto for verdadeiro. Por exemplo, podemos reduzir o exemplo anterior à proposição

$$((A \rightarrow B) \wedge (C \vee \neg A)) \wedge ((\neg B \wedge C) \rightarrow A) \Rightarrow C \vee B$$

**Exercício:** Faça a tabela verdade desta proposição e diga se ela é uma tautologia, uma contradição ou uma contingência.

[13]Isto é, sem se aprofundar no assunto mais que o necessário.

[14]Lembre-se sempre que as proposições relacionadas no bi-condicional são necessárias e suficientes uma para a outra.

[15]Note que *verdadeiro* não é uma característica do conjunto inteiro, mas de cada elemento. Com "conjunto verdadeiro" queremos dizer "conjunto de proposições verdadeiras", em outras palavras, que a conjunção feita com cada elemento do conjunto de proposições é verdadeira se, e somente se, cada elemento for verdadeiro.

Trabalhando ainda com o exemplo anterior, vamos construir a tabela verdade dessa consequência lógica sem reduzi-la a uma implicação. Para simplificar, vamos dar números aos elementos do conjunto:

- $A \to B = 1$
- $C \vee \neg A = 2$
- $(\neg B \wedge C) \to A = 3$
- $\{A \to B,\ C \vee \neg A,\ (\neg B \wedge C) \to A\} = \Gamma$
- $C \vee B = \Delta$

Podemos construir nossa tabela verdade da seguinte forma:

| $A$ | $B$ | $C$ | $\neg A$ | $\neg B$ | 1 | 2 | 3 | $\Gamma$ | $\Delta$ | $\Gamma \vdash \Delta$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **V** | **V** | **V** | **F** | **F** | **V** | **V** | **V** | **V** | **V** | **V** |
| **V** | **V** | **F** | **F** | **F** | **V** | **V** | **V** | **F** | **V** | **V** |
| **V** | **F** | **V** | **F** | **V** | **F** | **V** | **V** | **F** | **V** | **V** |
| **F** | **V** | **V** | **V** | **F** | **V** | **V** | **V** | **V** | **V** | **V** |
| **V** | **F** | **F** | **F** | **V** | **F** | **F** | **V** | **F** | **F** | **V** |
| **F** | **V** | **F** | **V** | **F** | **V** | **V** | **V** | **V** | **V** | **V** |
| **F** | **F** | **V** | **V** | **V** | **V** | **V** | **F** | **F** | **V** | **V** |
| **F** | **F** | **F** | **V** | **V** | **V** | **V** | **V** | **V** | **F** | **F** |

Note que a verdade de $\Gamma$ decorreu da verdade de todos seus elementos. Note, ainda, que a última coluna, $\Gamma \vdash \Delta$, foi tratada como um condicional. Falhando apenas na última linha, concluímos que $C \vee B$ não é uma consequência lógica do conjunto $\{A \to B,\ C \vee \neg A,\ (\neg B \wedge C) \to A\}$, como o leitor deve ter percebido com o último exercício. Indicaremos este fato assim:

$$\{A \to B,\ C \vee \neg A,\ (\neg B \wedge C) \to A\} \nvdash C \vee B$$

Como você percebeu, este método de verificação não é algo prático. Às vezes o procedimento traz consigo uma tabela verdade longa (se tiver muitas constantes envolvidas) e larga (se os elementos conjugados forem proposições "bem" compostas). Ao contrário de um computador, para um ser humano o procedimento pode ficar enfadonho, ou até mesmo impossível de ser realizado num período de tempo razoável. Mas há uma boa notícia! Estudaremos procedimentos de prova muito mais eficazes adiante, o que possibilitará realizar esses e outros procedimentos de forma muito mais elegante e curta.

Até agora nós vimos que podemos reduzir uma consequência lógica a uma implicação lógica. Ora, podemos também fazer o caminho contrário sem problemas. Na realidade, o caminho contrário é muito mais comum na lógica. Podemos, por exemplo, reduzir o Modus Ponens que vimos na lista de tautologias a uma consequência lógica. Tínhamos

$$X \land (X \to Y) \Rightarrow Y$$

e ficamos com

$$\{X, (X \to Y)\} \vdash Y$$

Façamos, agora, uma analogia da consequência lógica com a argumentação formal. Veja a semelhança do modus ponens na forma consequência lógica com o argumento da mortalidade de Sócrates que demos na seção 1.3. Podemos dizer que o conjunto de proposições é um conjunto de premissas, e que a proposição consequência é a conclusão do argumento. Mas como foi possível inferir $Y$ a partir deste conjunto? Através de uma *Regra de Inferência* que, claro, chamaremos de *Modus Ponens.* Trataremos destas regras mais detalhadamente na seção 3.4.2 adiante.

## 3.3 Tablôs Semânticos (Semantic Tableaux)

Veremos agora nosso primeiro mecanismo de prova. É o método de *Provas por Tablôs.* Examinaremos todas as possibilidades de verdade de proposições e consequências lógicas (após supor que são falsas) a fim de encontrar tautologias. O método é mais elegante (e divertido) do que as tabelas verdade. É importante ressaltar que, com a prova por tablô, podemos saber se temos ou não uma tautologia. No entanto, nada é concluído a respeito de contradições ou contingências. Para certificar-se disto, a tabela verdade é necessária.

### 3.3.1 Introduzindo os tablôs

Saber a verdade de cada operador é suficiente para realizar demonstrações por tablôs. Os tablôs funcionam da seguinte maneira (nos ocuparemos com o início do tablô mais adiante). Teremos linhas com proposições falsas ou verdadeiras. Isso será indicado com **V** ou **F** no início da linha. Se a proposição é minimamente composta, há trabalho a fazer. Linha por linha, proposição por proposição, vamos analisar as possibilidades de verdade delas. Se houver apenas uma possibilidade de verdade, ela será descrita em outra linha abaixo. Se houver mais de uma possibilidade, abriremos ramos para acomodar todas elas. Por exemplo, se "**V** $X \land Y$" está numa linha, então temos apenas uma possibilidade, isto é, tanto $X$ quanto $Y$ são verdadeiras. Neste caso devemos colocar "**V** $X$" numa linha abaixo e "**V** $Y$" em outra. Assim:

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \mathbf{V}\ \ X \wedge Y \\ \mathbf{V}\ \ X \\ \mathbf{V}\ \ Y \end{array}$$

Por outro lado, se "**F** $X \wedge Y$" está numa linha, então temos duas possibilidades, pois se uma conjunção é falsa, ao menos uma das proposições relacionadas são falsas. Neste caso, abriremos dois ramos e acrescentaremos uma linha com "**F** $X$" em um deles e uma linha com "**F** $Y$" em outro, assim:

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \mathbf{F}\ \ X \wedge Y \\ \diagup \quad \diagdown \\ \mathbf{F}\,X \qquad \mathbf{F}\,Y \end{array}$$

Acrescentaremos o seguinte detalhe. Às linhas das proposições já utilizadas ("destrinchadas") acrescentaremos um "check" ✓ no fim. Faremos isso para indicar que já usamos essa linha e não precisaremos mais nos ocupar com ela. Isso evitará a tarefa de analisar quais linhas já trabalhamos ou não. Os tablôs anteriores ficam assim:

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \mathbf{V}\ \ X \wedge Y\ \checkmark \\ \mathbf{V}\ \ X \\ \mathbf{V}\ \ Y \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \mathbf{F}\ \ X \wedge Y\ \checkmark \\ \diagup \quad \diagdown \\ \mathbf{F}\,X \qquad \mathbf{F}\,Y \end{array}$$

A possibilidade de, como no exemplo, a partir de **V** $X \wedge Y$, acrescentar uma linha com **V** $X$ e outra com **V** $Y$, isto é, a possibilidade de acrescentar linhas com informações mais imediatas a respeito das proposições, é estabelecida por regras, como veremos na seção seguinte.

### 3.3.2 Regras de Construção de Tablôs

Veremos agora todas as chamadas *Regras de Construção de Tablôs* que usaremos para realizar provas por tablôs. Daremos todas as situações que necessitaremos para trabalhar com o CPC (posteriormente falaremos sobre tablôs para o CQC). Vimos, na seção anterior, duas das regras. Uma para o caso em que tivermos numa linha uma conjunção verdadeira, e outra, para quando a conjunção for falsa. O fato é que cada operador terá uma construção interna, pois cada proposição aliada a um operador é uma proposição composta. Vejamos como ficam as regras para os que vimos, e para os demais operadores (a proposição que está na linha/ramo abaixo do sublinhado da proposição marcada com o ✓ foi derivada desta):

$$\frac{\mathbf{V}\ \neg X\ \checkmark}{\mathbf{F}\ X} \qquad \frac{\mathbf{F}\ \neg X\ \checkmark}{\mathbf{V}\ X} \qquad \frac{\mathbf{V}\ X \wedge Y\ \checkmark}{\begin{array}{c}\mathbf{V}\ X \\ \mathbf{V}\ Y\end{array}} \qquad \frac{\mathbf{F}\ X \wedge Y\ \checkmark}{\begin{array}{cc}\mathbf{F}\ X & \mathbf{F}\ X\end{array}}$$

$$\frac{\mathbf{V}\ X \vee Y\ \checkmark}{\begin{array}{cc}\mathbf{V}\ X & \mathbf{V}\ X\end{array}} \qquad \frac{\mathbf{F}\ X \vee Y\ \checkmark}{\begin{array}{c}\mathbf{F}\ X \\ \mathbf{F}\ Y\end{array}} \qquad \frac{\mathbf{V}\ X \rightarrow Y\ \checkmark}{\begin{array}{cc}\mathbf{F}\ X & \mathbf{V}\ Y\end{array}} \qquad \frac{\mathbf{F}\ X \rightarrow Y\ \checkmark}{\begin{array}{c}\mathbf{V}\ X \\ \mathbf{F}\ Y\end{array}}$$

$$\frac{\mathbf{V}\ X \leftrightarrow Y\ \checkmark}{\begin{array}{cc}\mathbf{V}\ X & \mathbf{F}\ X \\ \mathbf{V}\ Y & \mathbf{F}\ Y\end{array}} \qquad \frac{\mathbf{V}\ X \leftrightarrow Y\ \checkmark}{\begin{array}{cc}\mathbf{V}\ X & \mathbf{F}\ X \\ \mathbf{F}\ Y & \mathbf{V}\ Y\end{array}}$$

Vamos comentar cada uma rapidamente. Sempre, na prova por tablô, serão analisadas todas as possibilidades de verdade. Na primeira e segunda regra temos que **a negação de uma proposição verdadeira é uma proposição falsa**, vice-versa. Isso decorre daquele princípio lógico fundamental. Para a conjunção, como já haviamos comentado sobre verdade conjunta, temos que uma conjunção será verdadeira quando cada proposição conjugada for. Ou seja, **a verdade de uma conjunção implica a verdade conjunta de ambas as proposições conjugadas**. E, como já sabemos, **a falsidade de uma conjunção implica a falsidade de pelo menos uma das proposições conjugadas**. De maneira similar, poderemos pronunciar a verdade disjunta como **a verdade de uma disjunção implica a verdade de pelo menos um das proposições disjuntadas**, e **a falsidade de uma disjunção implica a falsidade de ambas as proposições disjuntadas**.[16]

**Exercício:** formule uma frase para a verdade e outra para a falsidade de cada operador que falta comentar (condicional e bi-condicional).

### 3.3.3 Provando fórmulas

A seguir, veremos como realizar provas por tablôs de proposições quaisquer. Mas antes, vamos dar duas definições, para expandir um pouco nosso trabalho, e um famoso

[16]Estas regras de construção decorrem diretamente da definição de cada operador ou de alguma tautologia, portanto, ao demonstrar as tautologias, estaremos, indiretamente, mostrando regras de construção de tablôs. Provaremos algumas tautologias posteriormente.

teorema[17]:

**DEFINIÇÃO 6** *Uma expressão p é uma* ***fórmula*** *se é uma proposição.*

**TEOREMA 1** ***Teorema de Correção e Completude*** – *Uma fórmula $\alpha$ é uma tautologia se, e somente se, existe uma prova por tablôs de $\alpha$.*

**DEFINIÇÃO 7** *Uma fórmula $\alpha$ é* ***válida*** *se, e somente se, é uma tautologia.*

Devido a definição 7, procuraremos demonstrar se fórmulas são válidas. Para realizar uma prova por tablôs, vamos (sempre) supor que a fórmula em questão é falsa e, então, recorrer às regras de construção para, com elas, destrinchar todos os operadores. Caso encontremos qualquer absurdo num ramo que derivamos (linhas contraditórias), vamos colocar um $\times$ para indicar que este ramo está fechado. Então nos ocuparemos com os demais ramos. Se, ao destrinchar todos as operações de todos os ramos, conseguirmos fechar todos eles, a prova está concluída, isto é, a hipótese inicial deverá ser descartada, o que implica que a formula é válida.[18] A regra para o fechamento do tablô é a que segue:

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \mathbf{V}\ X \\ \mathbf{F}\ X \\ \times \end{array}$$

Vejamos como provar por tablô que a fórmula $X \wedge Y \to X$ é válida. Vamos começar nossa demonstração colocando nossa fórmula na primeira linha e supondo que ela é falsa:

$$\mathbf{F}\ X \wedge Y \to X$$

Agora, da regra para falsidade de implicações, acrescentaremos as duas linha seguintes, e indicaremos que já utilizamos a fórmula inicial com o $\checkmark$:

$$\begin{array}{c} \mathbf{F}\ X \wedge Y \to X\ \checkmark \\ \mathbf{V}\ X \wedge Y \\ \mathbf{F}\ X \end{array}$$

Note que nada podemos fazer com a terceira linha, pois não há operadores. Agora, utilizando a regra da verdade da conjunção, podemos derivar mais duas linhas da segunda

[17] A demonstração deste teorema é demasiada avançada. Trazê-la aqui fugiria dos objetivos do minicurso.

[18] Note que, ao fazer isso, prova-se que esta fórmula nunca é falsa – veja o absurdo gerado ao supor que ela poderia ser falsa – e, portanto, é uma tautologia.

linha. Lembrando de marcar a conjunção utilizada com o ✓:

$$\begin{array}{c}
\mathbf{F}\ X \wedge Y \rightarrow X\ \checkmark \\
\mathbf{V}\ X \wedge Y\ \checkmark \\
\mathbf{F}\ X \\
\mathbf{V}\ X \\
\mathbf{V}\ Y
\end{array}$$

Veja que temos uma linha afirmando que $X$ é falso e outra que é verdadeiro. Ora, estamos diante da situação requerida pela regra para fechar o tablô. Portanto, temos:

$$\begin{array}{c}
\mathbf{F}\ X \wedge Y \rightarrow X\ \checkmark \\
\mathbf{V}\ X \wedge Y\ \checkmark \\
\mathbf{F}\ X \\
\mathbf{V}\ X \\
\mathbf{V}\ Y \\
\times
\end{array}$$

e a prova está concluída. $X \wedge Y \rightarrow X$ é, de fato, uma fórmula válida.

Vejamos um exemplo com ramos. Vamos verificar se a fórmula $(X \vee X) \rightarrow X$ é uma tautologia. Vamos supor que esta proposição seja falsa e então adicionar, segundo aquela regra de construção (confira na lista), uma linha com o antecedente marcado como verdadeiro e o consequente como falso. Assim, temos:

$$\begin{array}{c}
\mathbf{F}\ X \vee X \rightarrow X\ \checkmark \\
\mathbf{V}\ X \vee X \\
\mathbf{F}\ X
\end{array}$$

Segundo a regra para a disjunção verdadeira, vem:

$$\begin{array}{c}
\mathbf{F}\ X \vee X \rightarrow X\ \checkmark \\
\mathbf{V}\ X \vee X\ \checkmark \\
\mathbf{F}\ X \\
\begin{array}{cc} \swarrow & \searrow \\ \mathbf{V}\ X & \mathbf{V}\ X \end{array}
\end{array}$$

Devido a falsidade anterior do $X$, temos uma contradição e ambos os ramos fecham:

$$\begin{array}{c} \mathbf{F}\ X \vee X \to X\ \checkmark \\ \mathbf{V}\ X \vee X \\ \mathbf{F}\ X \\ \begin{array}{cc} \mathbf{V}\ X & \mathbf{V}\ X \\ \times & \times \end{array} \end{array}$$

Concluímos, então, que a fórmula $X \vee X \to X$ é válida. Note que demonstramos metade da tautologia Indempotência da Disjunção da lista. Se quisermos mostrar o restante, devemos provar o sentido inverso da implicação, isto é, $X \to X \vee X$ (**Exercício**).

Vejamos um exemplo mais complexo. Vamos verificar se a fórmula $\neg(Y \to Y) \vee (X \wedge \neg X)$ é válida. Temos:

$$\begin{array}{c} \mathbf{F}\ \neg(Y \to Y) \vee (X \wedge \neg X)\ \checkmark \\ \mathbf{F}\ \neg(Y \to Y) \\ \mathbf{F}\ X \wedge \neg X \end{array}$$

E agora? Qual proposição derivar primeiro? Veja que, destrinchando primeiro a conjunção falsa, temos:

$$\begin{array}{c} \mathbf{F}\ \neg(Y \to Y) \vee (X \wedge \neg X)\ \checkmark \\ \mathbf{F}\ \neg(Y \to Y) \\ \mathbf{F}\ X \wedge \neg X\ \checkmark \\ \begin{array}{cc} \mathbf{F}\ X & \mathbf{F}\ \neg X \end{array} \end{array}$$

Se quisermos, agora, destrinchar a falsa negação da implicação, devemos derivar nos dois ramos, pois a fórmula está acima da bifurcação e, por isso, pertence a ambos os ramos. Como, segundo a regra para a negação, não abrimos mais bifurcações, note que o melhor era ter desenvolvido a negação primeiro. No geral, seguir a seguinte regra prática pode agilizar nosso trabalho:

**Regra prática para tablôs:** Derive o máximo que puder bifurcando o mínimo. Isso poderá ser feito destrinchando primeiro negações, conjunções verdadeiras e disjunções falsas. Dessa forma, evitaremos ter vários ramos para derivar neles. E ainda pode ocorrer de derivarmos uma contradição mais rapidamente (até mesmo antes de abrir ramos que poderíamos ter aberto se derivássemos de outra forma), fazendo com que nosso tablô fique menor.

Fazendo da forma mais rápida, ficamos com:

$$\begin{array}{c}
\mathbf{F}\ \neg(Y \to Y) \lor (X \land \neg X)\ \checkmark \\
\mathbf{F}\ \neg(Y \to Y)\ \checkmark \\
\mathbf{F}\ X \land \neg X\ \checkmark \\
\mathbf{V}\ Y \to Y\ \checkmark
\end{array}$$

$$\begin{array}{cc|cc}
\multicolumn{2}{c|}{\mathbf{V}\ Y} & \multicolumn{2}{c}{\mathbf{F}\ Y} \\
\mathbf{F}\ X & \mathbf{F}\ \neg X & \mathbf{F}\ X & \mathbf{F}\ \neg X
\end{array}$$

Se derivarmos as últimas negações, não haverá mais o que derivar, pois todas as fórmulas irão ter sido utilizadas. Isso sem encontramos alguma contradição. Acrescentaremos uma interrogação ao fim de cada ramo para indicar que não há mais o que fazer:

$$\begin{array}{c}
\mathbf{F}\ \neg(Y \to Y) \lor (X \land \neg X)\ \checkmark \\
\mathbf{F}\ \neg(Y \to Y)\ \checkmark \\
\mathbf{F}\ X \land \neg X\ \checkmark \\
\mathbf{V}\ Y \to Y\ \checkmark
\end{array}$$

$$\begin{array}{cc|cc}
\multicolumn{2}{c|}{\mathbf{V}\ Y} & \multicolumn{2}{c}{\mathbf{F}\ Y} \\
\mathbf{F}\ X & \mathbf{F}\ \neg X & \mathbf{F}\ X & \mathbf{F}\ \neg X \\
? & \mathbf{V}\ X & ? & \mathbf{V}\ X \\
 & ? & & ?
\end{array}$$

Concluímos, então, que a fórmula não é válida.
**Exercício:** Construa uma tabela verdade e verifique que esta fórmula não é uma tautologia. Descubra, então, se ela é uma contingência ou uma contradição.

> **Obs.:** Para provar que uma proposição não é consequência lógica de um conjunto de premissas, devemos citar uma valoração onde, em "$\Gamma \vdash \Delta$", se tenha "$\Gamma$" falso e "$\Delta$" verdadeiro. Isso porque "$\Gamma \vdash \Delta$" afirma que "$\Delta$" é verdadeira, qualquer que seja a valoração de "$\Gamma$", e para refutar teses deste tipo basta um único contra exemplo.

## EXERCÍCIOS

1. Verifique se as seguintes fórmulas são válidas utilizando tablôs:

   (a) Exercícios a coletar

(b) Exercícios a coletar

(c) Exercícios a coletar

(d) Exercícios a coletar

2. Demonstre por tablôs a validade das seguintes tautologias:

   (a) Exercícios a coletar

   (b) Exercícios a coletar

   (c) Exercícios a coletar

   (d) Exercícios a coletar

### 3.3.4 Provando consequências lógicas

Finalmente, vamos construir tablôs para provar uma consequência lógica (o que não será muito diferente do que fizemos com as fórmulas). Vamos acrescentar o seguinte teorema:

**TEOREMA 2** *Uma fórmula* $\Delta$ *é consequência lógica*[19] *de um conjunto de fórmulas* $\Gamma$ *se, e somente se, existe uma prova por tablôs de* $\Gamma \vdash \Delta$.[20]

Como já sabemos, "$\vdash$", "$\Rightarrow$" e "$\rightarrow$" são semelhantes, verdadeiramente falando ("$\Rightarrow$" e "$\rightarrow$" são iguais). Vale reforçar que a verdade de uma consequência lógica $\Gamma \vdash \Delta$ é tal qual a verdade de uma implicação. Isto é, $\Gamma \vdash \Delta$ será falso somente quando $\Gamma$ for verdadeiro[21] e $\Delta$ falso. Na prova por tablô, o que faremos é supor exatamente isso. Se encontrarmos algum problema (uma contradição) após supor que $\Delta$ é falso, concluiremos, por absurdo, que $\Delta$ é, de fato, verdadeiro. Caso não encontremos algum problema na hipótese, então estará provado que a conclusão não é consequência lógica das premissas. **Exercício:** Analise a relação que este procedimento tem com a tautologia da última linha da lista da seção 3.2.3.

Vejamos como fica a demonstração da consequência $\{(X \vee Y), \neg X\} \vdash Y$. Para construir a base da demonstração, a partir da qual começaremos aplicar as regras de construção, vamos dispor nossa consequência lógica na primeira linha, afirmando que $Y$ não é consequência lógica de $\{X \vee Y), \neg X\}$ (usando $\nvdash$) e, nas linhas abaixo, tomar como verdadeira cada uma das proposições do conjunto. Na outra linha, vamos tomar como

[19] O conceito de consequência tautológica não foi introduzido no minicurso para simplificar e facilitar o aprendizado.

[20] Assim como o teorema 1, não demonstraremos este teorema.

[21] Isto é, quando cada elemento do conjunto for verdadeiro

falsa a conclusão. Nosso tablô fica assim:

$$\begin{array}{c} \{(X \vee Y), \neg X\} \nvdash Y \\ \mathbf{V}\ X \vee Y \\ \mathbf{V}\ \neg X \\ \mathbf{F}\ Y \end{array}$$

É mais prático trabalhar primeiro a negação. Segundo a regra para negação verdadeira, temos:

$$\begin{array}{c} \{(X \vee Y), \neg X\} \vdash Y \\ \mathbf{V}\ X \vee Y \\ \mathbf{V}\ \neg X\ \checkmark \\ \mathbf{F}\ Y \\ \mathbf{F}\ X \end{array}$$

Agora, note que, como a regra da verdade da disjunção nos dirá que X é verdadeiro ou Y é verdadeiro, mas já temos X e Y como falsos antes, ambos os ramos que se abrirão vão fechar. Nosso tablô fica assim:

$$\begin{array}{c} \{(X \vee Y), \neg X\} \vdash Y \\ \mathbf{V}\ X \vee Y \\ \mathbf{V}\ \neg X \\ \mathbf{F}\ Y \\ \mathbf{F}\ X \\ \begin{array}{cc} \mathbf{V}\ X & \mathbf{V}\ Y \\ \times & \times \end{array} \end{array}$$

Daí, pelo fato de que supor $\{(X \vee Y), \neg X\} \nvdash Y$ gera uma absurdo, concluímos que $\{(X \vee Y), \neg X\} \vdash Y$. Assim, a tautologia Silogismo Disjuntivo fica demonstrada por tablô.

Perceba que, salvo algumas pequenas mudanças, o processo é o mesmo do anterior, quando tratamos apenas com proposições. Vamos fazer alguns exercícios e, então, ver o próximo procedimento de prova. O melhor, mais prático e mais elegante método dedutivo que mostraremos aqui.

## EXERCÍCIOS

1. Verifique por tablôs se as seguintes consequências lógicas procedem:

   (a) Exercícios a coletar

   (b) Exercícios a coletar

(c) Exercícios a coletar

(d) Exercícios a coletar

(e) Exercícios a coletar

(f) Exercícios a coletar

(g) Exercícios a coletar

(h) Exercícios a coletar

(i) Exercícios a coletar

(j) Exercícios a coletar

## 3.4 Dedução natural no CPC

O método de prova que mostraremos agora não requer valores de verdade. A partir de algumas proposições iniciais, deduziremos outras atravéz de algumas regras lógicas, sem precisar nos preocupar com valorações ou conteúdo (sentido) das proposições. As fórmulas que quisermos provar se seguirão de forma natural das premissas. É com o método de *Dedução Natural* que provaremos várias tautologias, e provaremos várias outras consequências lógicas.

Assim como nos tablôs, na dedução natural nós iremos dispor fórmulas de uma determinada maneira e derivar outras em linhas abaixo utilizando regras. Porém, a estrutura aqui é mais elegante por possibilitar uma demonstração parecida com uma lista de procedimentos, e por incluir, na prova, todas as informações necessárias sobre regras utilizadas. O método de dedução natural é superior ao dos tablôs em vários aspectos (muitos dos quais não falaremos aqui), como a possibilidade de formular hipóteses na demonstração. Além disso, quando falarmos de quantificadores no próximo capítulo, o leitor perceberá que os tablôs não dão conta de algumas proposições quantificadas.

### 3.4.1 Introduzindo a Dedução Natural

Por hora, mostraremos apenas como utilizar o método da *dedução natural* para demonstrar consequências lógicas. Podemos ilustrar a viabilidade de uma método ainda mais prático do que os tablôs supondo que tenhamos que mostrar a seguinte consequência:

**Consequência Lógica 1** $\{P \to (Q \wedge C),\ (Q \wedge C) \to D,\ D \to (E \vee (\neg E \to F)), P, \neg E\} \vdash F$

Note que um tablô para a consequência lógica 1 seria bem trabalhoso (**Exercício**). Com o método da dedução natural, este processo ficará mais simples. Conseguiremos demonstrar de maneira mais compacta.

**Exercício:** Quantas linhas teria uma tabela de verdade para a consequência lógica 1?

A estrutura da dedução será composta por linhas enumeradas. O número de linhas dependerá do tamanho da demonstração. Cada linha contará com seu número, seguido de uma proposição e, em seguida, da justificação desta. Separaremos a numeração e as proposições com uma linha vertical. Teremos algo como:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | Premissa 1 | Indicação da premissa 1 |
| 2 | Premissa 2 | Indicação da premissa 2 |
| 3 | Proposição | Justificação desta linha |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| $n$ | Conclusão | Justificativa da conclusão |

Para começar uma dedução, iremos dispor as proposições do conjunto uma em cada linha, informando à direita (com **P**) que se tratam de premissas. Na última premissa, a informação à direita será "**P** / ? **C**", onde C é a conclusão a que queremos chegar. A demonstração da consequência lógica 1 fica assim iniciada:

$$\{P \to (Q \land C),\ (Q \land C) \to D,\ D \to (E \lor (\neg E \to F)), P, \neg E\} \vdash F :$$

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $P \to (Q \land C)$ | **P** |
| 2 | $(Q \land C) \to D$ | **P** |
| 3 | $D \to (E \lor (\neg E \to F))$ | **P** |
| 4 | $P$ | **P** |
| 5 | $\neg E$ | **P** / ? F |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ |

Agora veremos quais são as regras que utilizaremos para, assim como com os tablôs, realizar nossas deduções.

### 3.4.2 Regras de Inferência Diretas

Na argumentação da dedução, poderemos ter uma determinada "situação lógica" da qual poderemos inferir coisas novas (derivar novas fórmulas). Ao conjunto situação-afirmação dá-se o nome de *Regra de Inferência*. Na seção 1.3 demos um exemplo de argumento (sobre a mortalidade de Sócrates) que se utiliza de uma regra de inferência (das mais importantes) para inferir a conclusão. A regra utilizada é chamada de *Modus Ponens*, justamente por derivar da tautologia de mesmo nome que consta na lista da seção 3.2.3.

Como sabemos, podemos reduzir uma tautologia a uma consequência lógica. Fazendo isso, fica assim escrito o Modus Ponens:

$$\{X \to Y,\ X\} \vdash Y\ ,$$

de onde derivamos nossa primeira regra de inferência. As proposições do conjunto serão suficientes para acrescentar a conclusão numa nova linha. Podemos escrever essa primeira regra assim:

Modus Ponens: **MP**

$$\begin{array}{l} X \to Y \\ \underline{X \qquad} \\ \therefore Y \end{array}$$

Dessa forma, devemos ter uma premissa em cada linha, e a conclusão em uma linha abaixo, sem esquecer de escrever a justificativa da conclusão. No caso do Modus Ponens, a justificativa será "**MP** m,n", onde m e n serão os números das linhas das premissas utilizadas. Claro que, no caso de uma regra que não precise de duas premissas, mas apenas de uma, você deverá indicar apenas um número. Na dedução, teremos algo como:

$$\begin{array}{l|ll} n & \vdots & \vdots \\ n+1 & X \to Y & \text{Justificativa} \\ n+2 & X & \text{Justificativa} \\ n+3 & Y & \textbf{MP},\ n+1,\ n+2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

Como exemplo, podemos aplicar esta regra de inferência na demonstração da consequência lógica 1, pois temos o necessário na linha 1 e 4. Derivemos, então, uma sexta linha utilizando o modus ponens:

$$\{P \to (Q \wedge C),\ (Q \wedge C) \to D,\ D \to (E \vee (\neg E \to F)), P, \neg E\} \vdash F :$$

$$\begin{array}{r|ll} 1 & P \to (Q \wedge C) & \textbf{P} \\ 2 & (Q \wedge C) \to D & \textbf{P} \\ 3 & D \to (E \vee (\neg E \to F)) & \textbf{P} \\ 4 & P & \textbf{P} \\ 5 & \neg E & \textbf{P} \ / \ ?\ \text{F} \\ 6 & Q \wedge C & \textbf{MP},\ 1{,}4 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

O modus ponens é uma das chamadas *regras de inferência diretas.* Foi essencial ter percebido que tínhamos, em linhas anteriores, premissas suficientes para aplicá-lo. Assim como fizemos com os tablôs, listamos algumas das regras de inferência diretas abaixo. Se, no processo de dedução, tivermos as proposições que estão acima da barra horizontal, podemos inferir (isto é, acrescentar em outra linha) a proposição que está abaixo.

Dupla Negação: **DN**

$$\frac{\neg\neg X}{X} \qquad \frac{X}{\neg\neg X}$$

Modus Ponens: **MP**

$$\begin{array}{c} X \to Y \\ \underline{X \quad\;\;} \\ Y \end{array}$$

Conjunção: **C**

$$\begin{array}{c} X \\ \underline{\quad Y \quad} \\ X \wedge Y \end{array}$$

Separação: **S**

$$\frac{X \wedge Y}{X} \qquad \frac{X \wedge Y}{Y}$$

Expansão: **E**

$$\frac{X}{X \vee Y} \qquad \frac{X}{Y \vee X}$$

Silogismo Disjuntivo: **SD**

$$\begin{array}{c} X \vee Y \\ \underline{\;\neg X\;} \\ Y \end{array} \qquad \begin{array}{c} X \vee Y \\ \underline{\;\neg Y\;} \\ X \end{array}$$

Condicionais para bi-condicional: **CB**

$$\begin{array}{c} X \to Y \\ \underline{Y \to X} \\ X \leftrightarrow Y \end{array}$$

Bi-condicional para condicionais: **BC**

$$\frac{X \leftrightarrow Y}{X \to Y} \qquad \frac{X \leftrightarrow Y}{Y \to X}$$

Antes de passar aos exercícios, vamos demonstrar o restante da consequência lógica 1:

$$\{P \to (Q \wedge C),\ (Q \wedge C) \to D,\ D \to (E \vee (\neg E \to F)), P, \neg E\} \vdash F :$$

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $P \to (Q \wedge C)$ | **P** |
| 2 | $(Q \wedge C) \to D$ | **P** |
| 3 | $D \to (E \vee (\neg E \to F))$ | **P** |
| 4 | $P$ | **P** |
| 5 | $\neg E$ | **P** / ? F |
| 6 | $Q \wedge C$ | **MP**, 1,4 |
| 7 | $D$ | **MP**, 2, 6 |
| 8 | $E \vee (\neg E \to F)$ | **MP**, 3, 7 |
| 9 | $\neg E \to F$ | **SD**, 5, 8 |
| 10 | $F$ | **MP**, 5, 9 |

E está acabada a dedução, isto é, mostramos que $F$ é consequência de $\{P \to (Q \wedge C),\ (Q \wedge C) \to D,\ D \to (E \vee (\neg E \to F)), P, \neg E\}$. Note que, no processo de dedução, nós transformamos fórmulas de forma a obter o resultado desejado. Devido a isso, muitos autores referem-se às regras de inferência como *regras de transformação*. Com muita prática, isto é, resolvendo muitos exercícios, o leitor se acostumará com o formato da dedução, e começará a perceber facilmente quando temos (ou o que falta para termos) o suficiente para aplicar umas das regras de inferência. Entender como cada regra funciona é essencial. A prática as tornará suas amigas, e estas darão grandes contribuições ao seu raciocínio e sua argumentação durante toda sua vida acadêmica (e até mesmo cotidiana). Os exercícios que faremos agora ajudarão nessa tarefa.

## EXERCÍCIOS

1. Diga qual regra de inferência foi utilizada para deduzir a conclusão das premissas.

   (a) $\{L \wedge B\} \vdash B$

   (b) $\{G \rightarrow H \wedge G\} \vdash H$

   (c) $\{A\} \vdash A \vee \neg K$

   (d) $\{B, D\} \vdash B \wedge D$

   (e) $\{\neg J, F \vee J\} \vdash F$

   (f) $\{P \rightarrow B, B \rightarrow P\} \vdash P \leftrightarrow B$

   (g) $\{\neg\neg(R \vee Q)\} \vdash R \vee Q$

   (h) $\{(R \vee M) \leftrightarrow \neg(C \rightarrow A)\} \vdash (R \vee M) \rightarrow \neg(C \rightarrow A)$

   (i) $\{P \rightarrow Q\} \vdash (A \Leftrightarrow B) \vee (P \rightarrow Q)$

   (j) $\{(P \rightarrow T) \wedge (A \vee \neg\neg R)\} \vdash A \vee \neg\neg R$

   (k) $\{\neg P \rightarrow (\neg Q \vee T), (\neg Q \vee T) \rightarrow \neg P\} \vdash \neg P \leftrightarrow (\neg Q \vee T)$

2. Justifique cada passo das deduções abaixo:

   (a)

   | | | |
   |---|---|---|
   | 1 | $(A \vee B) \rightarrow C$ | P |
   | 2 | $C \wedge A$ | P |
   | 3 | $A$ | |
   | 4 | $A \vee B$ | |
   | 5 | $C$ | |
   | 6 | $A \wedge C$ | |
   | 7 | $(A \vee B) \wedge (A \wedge C))$ | |

   (b)

   | | | |
   |---|---|---|
   | 1 | $A \rightarrow B$ | P |
   | 2 | $C \vee (B \rightarrow A)$ | P |
   | 3 | $D \rightarrow \neg C$ | P |
   | 4 | $E \wedge D$ | P |
   | 5 | $\neg C$ | |
   | 6 | $B \rightarrow A$ | |
   | 7 | $A \leftrightarrow B$ | |

(c)

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\neg\neg A \wedge (B \to C)$ | P |
| 2 | $E \wedge D$ | P |
| 3 | $((B \to C) \wedge (D \vee F)) \to G$ | P |
| 4 | $B \to C$ | |
| 5 | $D$ | |
| 6 | $D \vee F$ | |
| 7 | $(B \to C) \wedge (D \vee F)$ | |
| 8 | $G$ | |
| 9 | $E$ | |
| 10 | $\neg\neg A$ | |
| 11 | $A$ | |
| 12 | $G \wedge A$ | |
| 13 | $(G \wedge A) \wedge E$ | |

(d)

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $B \leftrightarrow A$ | P |
| 2 | $(B \vee C) \to (E \vee Q)$ | P |
| 3 | $(B \wedge A) \to C$ | P |
| 4 | $\neg E$ | P |
| 5 | $B$ | P |
| 6 | $B \to A$ | |
| 7 | $A$ | |
| 8 | $B \wedge A$ | |
| 9 | $C$ | |
| 10 | $B \vee C$ | |
| 11 | $E \vee Q$ | |
| 12 | $Q$ | |

(e)

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $(\neg B \to \neg A) \leftrightarrow (C \vee D)$ | P |
| 2 | $D$ | P |
| 3 | $\neg B$ | P |
| 4 | $A \vee (T \vee \neg\neg Q)$ | P |
| 5 | $(V \vee D) \to (\neg B \to \neg A)$ | |
| 6 | $C \vee D$ | |
| 7 | $\neg B \to \neg A$ | |
| 8 | $\neg A$ | |
| 9 | $T \vee \neg\neg Q$ | |
| 10 | $(T \vee \neg\neg Q) \vee R$ | |

(f)

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\neg(P \wedge B) \to \neg T$ | P |
| 2 | $T \vee (\neg\neg A \wedge \neg C)$ | P |
| 3 | $A \to \neg E$ | P |
| 4 | $\neg(P \wedge B)$ | P |
| 5 | $\neg T$ | |
| 6 | $\neg\neg A \wedge \neg C$ | |
| 7 | $\neg\neg A$ | |
| 8 | $A$ | |
| 9 | $\neg E$ | |
| 10 | $(A \to \neg E) \wedge \neg E$ | |

3. Demonstre as seguintes consequências lógicas pelo método da dedução natural:

   (a) $\{P_1 \vee P_2, \neg P_1\} \vdash P_2$

   (b) $\{P_1, P_2\} \vdash P_2 \wedge P_1$

   (c) $\{P_1 \to P_2, P_1\} \vdash P_1 \wedge P_2$

   (d) $\{P_1 \leftrightarrow P_2, P_1\} \vdash P_2$

   (e) $\{Q_1 \wedge Q_3\} \vdash Q_1 \vee B$

   (f) $\{R \vee \neg P_1, \neg\neg P_1\} \vdash R$

   (g) $\{P_1 \wedge P_2\} \vdash P_2 \wedge P_1$

   (h) $\{(P_1 \to R_1) \wedge P_1 \to F, P_1\} \vdash R_1 \wedge F$

   (i) $\{(R \vee C) \to, \neg\neg P, C\} \vdash P$

(j) $\{(P \vee Q) \wedge C, \neg Q\} \vdash P$

(k) $\{(\neg A \rightarrow P) \wedge (P \rightarrow \neg A)\} \vdash \neg A \leftrightarrow P$

(l) $\{\neg P \vee (Q \vee R), \neg\neg P \wedge \neg Q, R \rightarrow D\} \vdash D$

(m) $\{A \leftrightarrow Q, F \leftrightarrow R, A \wedge R\} \vdash F \wedge Q$

(n) $\{P \rightarrow (A \leftrightarrow B), C \vee D, D \rightarrow \neg\neg P, \neg C \wedge B\} \vdash A$

### 3.4.3 Regras de Inferência Hipotéticas

O que uma regra de inferência anuncia? Que se tivermos tais e tais condições, podemos concluir tais e tais coisas. Isso também acontece nos teoremas matemáticos quando, por exemplo, tomamos uma função, supomos algumas condições e então deduzimos um resultado. Esta demonstração está apoiada numa hipótese inicial, onde o resultado se segue sempre que a hipótese for satisfeita. Na dedução natural, a demonstração da grande maioria das tautologias requer hipóteses. No geral, como em matemática, podemos utilizar hipóteses para realizar variados tipos de demonstração. É muito comum, tanto em matemática como em lógica, se utilizar de uma hipótese afim de gerar um absurdo. Na dedução natural, além desta tarefa, utilizaremos as hipóteses para reduzir o que se seguiu a uma implicação.[22]

Esse tipo de hipótese será introduzido no método da dedução natural de forma muito simples. Para indicar que a linha que adicionamos à lista é hipotética, basta adicionar outra reta vertical, colocar a proposição à sua direita e justificar com **H**, indicando a hipótese. Além disso, sublinharemos a hipótese para facilitar sua visualização. Teremos algo como:

| | | |
|---|---|---|
| $n$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $n+1$ | Proposição comum | Justificativa |
| $n+2$ | | <u>Proposição hipotética</u> | **H** |
| $\vdots$ | | $\vdots$ | $\vdots$ |

Ao concluir a hipótese, você deverá encerrar a reta vertical e adicionar a proposição que você concluiu da hipótese numa linha comum da dedução. Haverá uma alteração na indicação das linhas utilizadas na justificativa das linhas da dedução. Como não utilizamos "uma linha e outra linha", mas sim, "de uma linha até outra linha", indicaremos que a hipótese se seguiu da linha $m$ até a linha $n$ com "$m$-$n$".

As *regras de inferência hipotéticas* se resumem a duas. A contradição (**CTR**), e a redução para condicional (**RPC**). Estas podem ser organizadas da seguinte maneira:

[22]Note que reduzir uma hipótese a uma implicação é, justamente, o que fazemos nos teoremas matemáticos. Por exemplo, considere as retas $a$ e $b$, e os planos $\alpha$ e $\beta$, do espaço. Vale a seguinte implicação:

$$(a /\!/ \alpha,\ \beta \supset a,\ \beta \cap \alpha = b) \Rightarrow b /\!/ a$$

que nada mais é do que o *teorema da existência de retas e planos paralelos*.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $m$ | $X$ | **H** / ? **RPC** | $m$ | $X$ | **H** / ? **CTR** |
| | $\vdots$ | $\vdots$ | | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $n$ | $Y$ | ... | $n$ | Contradição | ... |
| | $X \to Y$ | **RPC**, m-n | | $\neg X$ | **CTR**, m-n |

Note que indicamos onde, a partir da hipótese, queríamos chegar. No RPC, apenas deduzimos que, da hipótese da linha $m$, decorre a proposição da linha $n$. No CTR tivemos que, ao supor $X$ na linha $m$, obtemos uma contradição na linha $n$, o que nos fez negar a hipótese inicial.[23] Exemplificaremos o uso de ambas estas regras demonstrando algumas tautologias (ou regras de inferência).

### 3.4.4 Dedução de novas regras de inferência

Como em qualquer ciência dedutiva, temos que considerar algumas regras primitivas, das quais derivarão as demais. Note que as proposições se demonstram, mas é necessário partir da validade de algumas (escolheremos as mais simples) para garantir a validade de outras.[24] As seguintes regras de inferência serão tomadas como válidas: **DN** (Dupla Negação), **MP** (Modus Ponens), **C** (Conjunção), **S** (Separação) e **E** (Expansão). O leitor poderá garantir a validade de cada uma com uma tabela verdade (**Exercício**). Como as regras de inferência diretas decorrem das tautologias, caso demonstremos as tautologias estaremos tornando válidas as regras. Portanto, nossa tarefa será demonstrar as fórmulas denominadas tautologias. Para isso, considere a seguinte definição:

**DEFINIÇÃO 8** *Uma fórmula $\alpha$ é um teorema se há uma dedução de $\alpha$ do conjunto vazio de premissas. Isto é, se $\emptyset \vdash \alpha$*

Simbolizaremos este fato simplesmente por $\vdash \alpha$. Note que um teorema é uma tautologia demonstrada (ou demonstrável.)Esta definição coloca em termos formais que, por exemplo, para demonstrar $X \vee X \to X$, começaremos a dedução com a hipótese $X \vee X$, isto é, sem acrescentar premissas, e tentaremos derivar $X$, donde utilizaremos o RPC para reduzir o que se seguiu da hipótese a um condicional e concluir o teorema. As demonstrações que faremos a seguir exemplificarão fortemente o uso de hipóteses.

Vamos começar demonstrando CB e BC. O leitor perceberá que a demonstração é a própria definição de bi-condicional. Para CB, temos que provar que $\vdash (X \to Y) \wedge (Y \to X) \to (X \leftrightarrow Y)$. Começaremos nossa demonstração supondo o antecedente para tentar derivar o consequente e, então, terminar a demonstração utilizando RPC:

[23] Note que negar $X$ é o mesmo que afirmar $\neg X$.

[24] Caso análogo acontece com os casos de congruência de triângulos. Existem os casos LAL, ALA, $LAA_0$, LLL e $LLA_r$. Estes casos se demonstram, daí vem a necessidade de considerar um deles como válido (geralmente o ALA, que é bem simples) para demonstrar os demais.

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\quad (X \to Y) \land (Y \to X)$ | H / ? RPC |
| 2 | | |

Usando a definição de bi-condicional e o RPC, vem:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\quad (X \to Y) \land (Y \to X)$ | H / ? RPC |
| 2 | $\quad X \leftrightarrow Y$ | Def. Bi-cond., 1 |
| 3 | $(X \to Y) \land (Y \to X) \to (X \leftrightarrow Y)$ | RPC, 1-2 |

E fica demonstrado que $\vdash (X \to Y) \land (Y \to X) \to (X \leftrightarrow Y)$ é válida. Agora para o BC, temos que mostrar que (1) $\vdash (X \leftrightarrow Y) \to (X \to Y)$ e (2) $\vdash (X \leftrightarrow Y) \to (Y \to X)$. Primeiro (1):

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\quad X \leftrightarrow Y$ | H / ? RPC |
| 2 | $\quad (X \to Y) \land (Y \to X)$ | Def. Bi-cond., 1 |
| 3 | $\quad X \to Y$ | S, 2 |
| 4 | $(X \leftrightarrow Y) \to (X \to Y)$ | RPC, 1-2 |

Agora (2):

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\quad X \leftrightarrow Y$ | H / ? RPC |
| 2 | $\quad (X \to Y) \land (Y \to X)$ | Def. Bi-cond., 1 |
| 3 | $\quad Y \to X$ | S, 2 |
| 4 | $(X \leftrightarrow Y) \to (Y \to X)$ | RPC, 1-2 |

Fica, então, provado CB e BC, o que nos permite utilizar estas duas regras nas próximas demonstrações.

Vamos começar nossas demonstrações “mais trabalhadas” com a 2ª Lei de De Morgan, que tem uma demonstração longa e, à primeira vista, complicada. Começando assim, o leitor terá uma demonstração que se utiliza de muitas hipóteses para analisar. Comentaremos cuidadosamente os passos. Pedimos que o leitor analise a dedução com calma a fim de entender cada passo da demonstração.

Queremos demonstrar que $\vdash \neg(X \lor Y) \leftrightarrow \neg X \land \neg Y$. Como se trada de um bi-condicional, teremos que derivar uma implicação nos dois sentidos para, utilizando a regra BC, unirmos as duas implicações num bi-condicional. Iniciaremos a dedução supondo, numa nova hipótese, o antecedente da implicação e, a partir dele, tentaremos derivar o consequente. Se conseguirmos isso, usaremos a regra RPC para obter uma das implicações que queremos:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\quad \neg(X \lor Y)$ | H / ? RPC |
| 2 | | |

Note que queremos uma conjunção, isto é, $\neg X \land \neg Y$. Para obter esta conjunção, vamos tentar obter cada uma das proposições e conjugá-las. Uma das proposições é $\neg X$. Façamos, então, mais uma hipótese. Vamos supor $X$ e utilizar a Expansão para obter

$X \vee Y$:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\mid\ \mid\ \underline{\neg(X \vee Y)}$ | H / ? RPC |
| 2 | $\mid\ \mid\ \mid\ \underline{X}$ | H / ? CTR |
| 3 | $\mid\ \mid\ \mid\ X \vee Y$ | E, 2 |

Perceba que a linha 1 e 4 são contraditórias. Vamos, então, conjugá-las. A contradição obtida nos permite negar a hipótese, isto é, obter $\neg X$ num ramo da hipótese anterior. Assim:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\mid\ \mid\ \underline{\neg(X \vee Y)}$ | H / ? RPC |
| 2 | $\mid\ \mid\ \mid\ \underline{X}$ | H / ? CTR |
| 3 | $\mid\ \mid\ \mid\ X \vee Y$ | E, 2 |
| 4 | $\mid\ \mid\ \mid\ \neg(X \vee Y) \wedge (X \vee Y)$ | C, 1,3 |
| 5 | $\mid\ \mid\ \neg X$ | CTR, 2-4 |

Vamos repetir o procedimento agora supondo $Y$:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\mid\ \mid\ \underline{\neg(X \vee Y)}$ | H / ? RPC |
| 2 | $\mid\ \mid\ \mid\ \underline{X}$ | H / ? CTR |
| 3 | $\mid\ \mid\ \mid\ X \vee Y$ | E, 2 |
| 4 | $\mid\ \mid\ \mid\ \neg(X \vee Y) \wedge (X \vee Y)$ | C, 1,4 |
| 5 | $\mid\ \mid\ \neg X$ | CTR, 2-4 |
| 6 | $\mid\ \mid\ \mid\ \underline{Y}$ | H / ? CTR |
| 7 | $\mid\ \mid\ \mid\ X \vee Y$ | E, 6 |
| 8 | $\mid\ \mid\ \mid\ \neg(X \vee Y) \wedge (X \vee Y)$ | C, 1,7 |
| 9 | $\mid\ \mid\ \neg Y$ | CTR, 6-8 |

Agora, vamos conjugar $\neg X$ com $\neg Y$ e depois reduzir nossa hipótese inicial a um condicional utilizando o RPC:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\mid\ \mid\ \underline{\neg(X \vee Y)}$ | H / ? RPC |
| 2 | $\mid\ \mid\ \mid\ \underline{X}$ | H / ? CTR |
| 3 | $\mid\ \mid\ \mid\ X \vee Y$ | E, 2 |
| 4 | $\mid\ \mid\ \mid\ \neg(X \vee Y) \wedge (X \vee Y)$ | C, 1,4 |
| 5 | $\mid\ \mid\ \neg X$ | CTR, 2-4 |
| 6 | $\mid\ \mid\ \mid\ \underline{Y}$ | H / ? CTR |
| 7 | $\mid\ \mid\ \mid\ X \vee Y$ | E, 6 |
| 8 | $\mid\ \mid\ \mid\ \neg(X \vee Y) \wedge (X \vee Y)$ | C, 1,7 |
| 9 | $\mid\ \mid\ \neg Y$ | CTR, 6-8 |
| 10 | $\mid\ \mid\ \neg X \wedge \neg Y$ | C, 5,9 |
| 11 | $\mid\ \neg(X \vee Y) \rightarrow \neg X \wedge \neg Y$ | RPC, 1-10 **LEMA 1** |

Temos, agora, que fazer o caminho de volta, ou seja, obter $\neg X \wedge \neg Y \rightarrow \neg(X \vee Y)$. Poderíamos fazer isso na mesma dedução, mas para deixar nossa demonstração menor, chamaremos o resultado obtido de **LEMA 1**. Agora, em uma nova dedução, vamos supor $\neg X \wedge \neg Y$ hipoteticamente para tentar derivar $\neg(X \vee Y)$. Acrescentemos, ainda, outra hipótese. A de que $X \vee Y$. O intuito, como antes, é derivar um absurdo e negar esta hipótese, o que faria terminar a dedução. Temos:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\neg X \wedge \neg Y$ | H / ? RPC |
| 2 | $X \vee Y$ | H / ? CTR |
| 3 | $\neg\neg X \vee Y$ | DN, 2 |

Na linha 3, aplicamos o DN para ficar com uma proposição na forma $\neg A \vee B$. O intuito é utilizar a definição do condicional, pois veja que $\neg(\neg X) \vee Y$ é o mesmo que $\neg X \rightarrow Y$. Vamos ainda separar $\neg X$ da primeira linha. Pois bem:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\neg X \wedge \neg Y$ | H / ? RPC |
| 2 | $X \vee Y$ | H / ? CTR |
| 3 | $\neg\neg X \vee Y$ | DN, 2 |
| 4 | $\neg X \rightarrow Y$ | Def. Cond., 3 |
| 5 | $\neg X$ | S, 1 |

Como o leitor deve ter percebido, utilizaremos MP para obter Y. Note, ainda, que podemos separar $\neg Y$ da primeira linha, o que nos permite formar uma contradição e negar a hipótese. Procedendo dessa forma:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\neg X \wedge \neg Y$ | H / ? RPC |
| 2 | $X \vee Y$ | H / ? CTR |
| 3 | $\neg\neg X \vee Y$ | DN, 2 |
| 4 | $\neg X \rightarrow Y$ | Def. Cond., 3 |
| 5 | $\neg X$ | S, 1 |
| 6 | $Y$ | MP, 4,5 |
| 7 | $\neg Y$ | S, 1 |
| 8 | $Y \wedge \neg Y$ | C, 6,7 |
| 9 | $\neg(X \vee Y)$ | CTR, 2-8 |

Agora vamos utilizar a RPC para obter $\neg X \wedge \neg Y \rightarrow \neg(X \vee Y)$. Convocaremos, então, o **LEMA 1** e terminaremos nossa demonstração com o BC:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\neg X \wedge \neg Y$ | H / ? RPC |
| 2 | $X \vee Y$ | H / ? CTR |
| 3 | $\neg\neg X \vee Y$ | DN, 2 |
| 4 | $\neg X \to Y$ | Def. Cond., 3 |
| 5 | $\neg X$ | S, 1 |
| 6 | $Y$ | MP, 4,5 |
| 7 | $\neg Y$ | S, 1 |
| 8 | $Y \wedge \neg Y$ | C, 6,7 |
| 9 | $\neg(X \vee Y)$ | CTR, 2-8 |
| 10 | $\neg X \wedge \neg Y \to \neg(X \vee Y)$ | RPC, 2,9 |
| 11 | $\neg(X \vee Y) \to \neg X \wedge \neg Y$ | **LEMA 1** |
| 12 | $\neg(X \vee Y) \leftrightarrow \neg X \wedge \neg Y$ | BC, 10,11 |

Portanto, está demonstrado o teorema, isto é, que $\vdash \neg(X \vee Y) \leftrightarrow \neg X \wedge \neg Y$ é válida. Temos, então, mais uma regra de inferência para usar nas próximas demonstrações:

2ª Lei de De Morgan: **DM2**

$$\frac{\neg(X \vee Y)}{\neg X \wedge \neg Y} \qquad \frac{\neg X \wedge \neg Y}{\neg(X \vee Y)}$$

**Exercício:** Mostre a 1ª Lei de De Morgan.

Listaremos abaixo as demonstrações de alguns outros teoremas. Comentaremos sobre a dedução ao fim de cada uma. Mostremos o SD, isto é, $\vdash (X \vee Y) \wedge \neg X \to Y$:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $(X \vee Y) \wedge \neg X$ | H / ? RPC |
| 2 | $X \vee Y$ | S, 1 |
| 3 | $\neg X$ | S, 1 |
| 4 | $\neg Y$ | H / ? CTR |
| 5 | $\neg X \wedge \neg Y$ | C, 3,4 |
| 6 | $\neg(X \vee Y)$ | DM2, 5 |
| 7 | $(X \vee Y) \wedge \neg(X \vee Y)$ | C, 2,6 |
| 8 | $\neg\neg Y$ | CTR, 4-7 |
| 9 | $Y$ | DN, 8 |
| 10 | $(X \vee Y) \wedge \neg X \to Y$ | RPC, 1-9 |

Como antes, queríamos obter um condicional, o que nos levou a começar uma hipótese buscando RPC. Na linha 4, a ideia foi tentar obter uma contradição ao supor $\neg Y$, o que nos forneceria $Y$, como foi o caso, dando fim à demonstração.

**Exercício:** Faça o segundo caso do SD, isto é, prove $\vdash (X \vee Y) \wedge \neg Y \to X$.

Demonstremos o Modus Tollens, isto é, $\vdash (X \to Y) \wedge \neg Y \to \neg X$:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $(X \to Y) \wedge \neg Y$ | H / ? RPC |
| 2 | $X \to Y$ | S, 1 |
| 3 | $\neg Y$ | S, 1 |
| 4 | $X$ | H / ? CTR |
| 5 | $Y$ | MP, 2,4 |
| 6 | $Y \wedge \neg Y$ | C, 3,5 |
| 7 | $\neg X$ | CTR, 4-6 |
| 8 | $(X \to Y) \wedge \neg Y \to \neg X$ | RPC, 1-7 |

Fica, assim, demonstrado o Modus Tollens. Como queríamos $\neg X$, a chave foi supor $X$ e encontrar a contradição. Podemos, então, acrescentá-lo às regras de inferência:

Modus Tollens: **MT**

$$\frac{\begin{array}{c} X \to Y \\ \neg Y \end{array}}{\neg X}$$

Demonstremos a contraposição, isto é, $\vdash (X \to Y) \leftrightarrow (\neg Y \to \neg X)$:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $(X \to Y)$ | H / ? RPC |
| 2 | $\neg Y$ | H / ? RPC |
| 3 | $\neg X$ | MT, 1,2 |
| 4 | $\neg Y \to \neg X$ | RPC, 2-3 |
| 5 | $(X \to Y) \to \neg Y \to \neg X$ | RPC, 1-4 |

**Exercício:** Mostre que $(\neg Y \to \neg X) \to (X \to Y)$ e conclua a demonstração da Contraposição.

Assim, fica estabelecida mais uma regra de inferência:

Contraposição: **CT**

$$\frac{\neg Y \to \neg X}{X \to Y} \qquad \frac{X \to Y}{\neg Y \to \neg X}$$

Chamaremos de *regras reversíveis* aquelas derivadas de equivalências. Simbolizaremos que uma regra é reversível com duas barras, ao invés de apenas uma. Por exemplo, a contraposição fica assim escrita:

Contraposição: **CT**

$$\begin{array}{c} \neg Y \to \neg X \\ \hline\hline X \to Y \end{array}$$

Isso indicará que a fórmula acima das duas barras poderá ser inferida da de baixo. Ou seja, o processo de inferência vale nas duas direções.

Abaixo listaremos as regras de inferência que utilizaremos nos exercícios, as anteriores vão ser reincluídas para que o leitor tenha o acesso a elas facilitado. Algumas das regras que não foram demonstradas ficarão como exercício mais abaixo.

Dupla Negação: **DN**

$$\begin{array}{c} \neg\neg X \\ \hline\hline X \end{array}$$

Modus Ponens: **MP**

$$\begin{array}{c} X \to Y \\ X \\ \hline Y \end{array}$$

Modus Tollens: **MT**

$$\begin{array}{c} X \to Y \\ \neg Y \\ \hline \neg X \end{array}$$

Conjunção: **C**

$$\begin{array}{c} X \\ Y \\ \hline X \wedge Y \end{array}$$

Separação: **S**

$$\begin{array}{c} X \wedge Y \\ \hline X \end{array} \qquad \begin{array}{c} X \wedge Y \\ \hline Y \end{array}$$

Expansão: **E**

$$\begin{array}{c} X \\ \hline X \vee Y \end{array} \qquad \begin{array}{c} X \\ \hline Y \vee X \end{array}$$

Condicionais para bi-condicional: **CB**

$$\begin{array}{c} X \to Y \\ Y \to X \\ \hline X \leftrightarrow Y \end{array}$$

Bi-condicional para condicionais: **BC**

$$\begin{array}{c} X \leftrightarrow Y \\ \hline X \to Y \end{array} \qquad \begin{array}{c} X \leftrightarrow Y \\ \hline Y \to X \end{array}$$

Silogismo Disjuntivo: **SD**

$$\begin{array}{c} X \vee Y \\ \neg X \\ \hline Y \end{array} \qquad \begin{array}{c} X \vee Y \\ \neg Y \\ \hline X \end{array}$$

Silogismo Hipotético: **SH**

$$\begin{array}{c} X \to Y \\ Y \to Z \\ \hline X \to Z \end{array}$$

Contradição: **CTR**

$$\begin{array}{c} X \\ \neg X \\ \hline Y \end{array}$$

Contraposição: **CT**

$$\begin{array}{c} \neg Y \to \neg X \\ \hline\hline X \to Y \end{array}$$

Leis de De Morgan: **DM**

$$\begin{array}{c} \neg(X \wedge Y) \\ \hline\hline \neg X \vee \neg Y \end{array} \qquad \begin{array}{c} \neg(X \vee Y) \\ \hline\hline \neg X \wedge \neg Y \end{array}$$

## EXERCÍCIOS

1. Prove a validade das formas de argumento abaixo. Você vai precisar introduzir uma única hipótese.

   (a) $\{P \to Q, Q \to C\} \vdash P \to C$

   (b) $\{P \to \neg Q, Q \vee R\} \vdash P \to R$

   (c) $\{F \to G, \neg G\} \vdash \neg F$

   (d) $\{P\} \vdash (P \to Q) \to Q$

   (e) $\{P \vee P\} \vdash P$

   (f) $\{P, \neg P\} \vdash Q$

   (g) $\{P \to (Q \to C)\} \vdash (P \wedge Q) \to C$

   (h) $\{\neg L_{359} \to L_{359}\} \vdash L_{359}$

   (i) $\{F \wedge G\} \vdash \neg(F \to \neg G)$

2. Prove a validade das formas de argumento abaixo. Agora, você vai precisar introduzir, em cada caso, mais de uma hipótese.

   (a) $\{(T \wedge P) \to Q\} \vdash T \to (P \to Q)$

   (b) $\{A \to (M \to C)\} \vdash (A \to M) \to (A \to C)$

   (c) $\{P \to ((Q \to D) \to R)\} \vdash (Q \to D) \to (P \to R)$

   (d) $\{Q \to R, C \to \neg R\} \vdash Q \to \neg C$

   (e) $\{\neg A \vee B\} \vdash A \to B$

   (f) $\{\neg Q \to \neg A\} \vdash (\neg Q \to A) \to Q$

3. Demonstre as regras de inferência que não demonstramos no texto, digo, a segunda forma do SD, o SH, a CTR e a 1ª Lei de De Morgan.

Chegamos, em fim, ao estudo do CPC. Nesse ponto, esperamos que o estudante já tenha uma grande afinidade com o processo de inferência da lógica. Passaremos a estudar o cálculo de predicados de primeira ordem. Nosso estudo ficará muito mais interessante pois não só nos aproximaremos, mas encostaremos em conteúdos matemáticos com os quais o estudante tem (ou terá) contato.

# Capítulo 4

# O CÁLCULO QUANTIFICACIONAL CLÁSSICO (CQC)

Começaremos a estudar o CQC, que nada mais é do que uma extensão do CPC. O propósito desta extensão discutiremos agora. Tome a letra I da função interpretação 1. Veja que a interpretação de I é "João é filho de Paulo". Atribuindo um único caractere a esta letra, temos seu conteúdo reduzido a uma proposição. Porém, note que no interior dessa proposição ocorrem mais "coisas". Como poderíamos trabalhar com os demais filhos de Paulo (se ele tiver)? Usar uma letra maiúscula para cada filho que ele tiver não é a melhor forma de lidar com essas informações. E se falássemos de números inteiros, negativos e múltiplos de três? Se procedêssemos como antes, estaríamos desconsiderando três características distintas de um sujeito. O que estamos querendo é tomar o predicado como diferente do sujeito, e não uni-los em uma única constante, tomando-os como uma única coisa, uma proposição. O fato é que o CPC não é suficiente para, por exemplo, desenvolver a matemática. O CQC elimina esse problema (quase que completamente[1]). A partir de agora, calcularemos predicados.

Para começarmos nosso estudo, voltemos o começo da seção 3, onde expomos o alfabeto do CQC. Pois bem, os caracteres não utilizados passarão, a partir de agora, a fazer parte do nosso ferramental de construção dessa linguagem artificial. As letras minúsculas $a, b, c, ..., t$ serão utilizadas para os sujeitos (vamos chamar de constantes individuais). As maiúsculas $A, B, C, ..., T$ serão utilizadas para predicados (vamos chamar de constantes de predicado). Caso necessitemos de mais caracteres, podemos utilizar os números de 1 a 9 no nosso alfabeto para acrescentar índices às letras, ou seja, temos infinitos caracteres

[1]Como vimos no primeiro capítulo, o CQC tem ordem 1. Porém, alguns procedimentos matemáticos de demonstração se valem de uma segunda ordem, como o método da indução finita. Nesse caso, basta acrescentar uma ordem ao CQC (o que não o mudará substancialmente) e então trabalhar estes e outros métodos.

para utilizar:

$$a, b, c, ..., s, a_1, a_2, ..., a_{10}, a_{11}, ..., a_{36879}, a_{36880}, ..., a_n, b_1, ...$$

## 4.1 Predicados

Como sabemos da gramática, o predicado enuncia uma característica de um sujeito. Para simbolizar a afirmação que, por exemplo, 'Piu-Piu é um pássaro', vamos escolher uma constante de predicado e uma individual para, respectivamente, representar o predicado de 'ser pássaro' e o sujeito Piu-Piu. Escolhendo P e p, podemos escrever:

$$Pp$$

Isto é, unindo os dois caracteres e colocando a constante de predicado antes da constante individual.[2] Note, porém, que o Pica-Pau também é um pássaro, assim como o Zeca Urubu, o Patinho Feio, o Faísca e o Fumaça. Ou seja, a constante individual do predicado $P$ vai variar (tanto quanto quisermos, ou tanto quanto nossa criatividade permitir). No entanto, não precisamos de uma constante de predicado para cada pássaro que encontrarmos voando (ou trapaceando) por aí. Podemos agrupar todos os objetos que tem essa característica e utilizar apenas a constante P para todos eles. Quero dizer que podemos formar o conjunto de todos os objetos que tem a característica de ser pássaro. Para constantes individuais variáveis, usaremos os caracteres $u, v, w, x, yez$. Portanto, temos o conjunto $Px$: $x$ é um pássaro. Estamos, então, dizendo que os predicados podem ser interpretados como conjuntos. Para o CQC, os predicados são, de fato, conjuntos. Fazendo b: Zeca Urubu; f: Patinho Feio; s: Faísca e m: Fumaça, formamos o conjunto $P = \{p, b, f, s, m\}$.

Como ficaria, agora, a sentença 'João é filho de Paulo'? Fazendo $j$ para João e F para predicar 'ser filho de Paulo', temos:

$$Fj$$

Que ainda não é bom o suficiente, pois poderíamos separar o objeto 'Paulo' do predicado. Poderíamos predicar apenas ´ser filho de'. Fazendo k: Paulo, podemos escrever a sentença assim

$$Fjk$$

Dessa forma, estamos formando o conjunto $Fxy$: $x$ é filho de $y$,[3] ou seja, formando não um conjunto de elementos $x$, mas de pares ordenados (x,y). Como o leitor sabe, a ordem dos termos é essencial. Fazendo r: Jimi Hendricks; q: Xuxa; h: Chimbinha; c: Jesus; l:

[2]Conforme vemos em outras obras, essa representação pode variar, dependendo do gosto do autor. O importante mesmo é fixar uma sintaxe e utilizá-la de forma homogênea.

[3]Alguns autores usam $xFy$.

Saxa; e: Javé; g: Cerberus e o: Txutxucão, podemos formar o conjunto:

$$F = \{(c, e), (h, r), (g, o), (l, q)\}$$

**Exercício**: interprete cada par ordenado.

Chamaremos $P$ de *constante de predicado unária* e $F$ de *constante de predicado binária*. Procedendo da mesma forma, podemos ter uma *constante de predicado n-ária*.[4] Do predicado binário ao n-ário, o predicado é muitas vezes chamado de *Relação*. Poderíamos, por exemplo, formalizar a sentença '$x$ orou durante meses para $y$, mas quem ajudou mesmo foi $z$' com $Oxyz$. Note que há uma relação entre $x$, $y$ e $z$.

**Exercício:** interprete $Ojck$.

Existem, contudo, proposições sem sujeito, como por exemplo 'Chove'. Representaremos este tipo de proposição usando apenas uma constante de predicado. Assim, podemos fazer C: Chove. No caso, C é chamada de *constante de predicado zerária*. Vale ressaltar que $C = \emptyset$.

## EXERCÍCIOS

1. Usando a notação sugerida, traduza as sentenças abaixo para a linguagem do CQC. c: Cleo; m: Miau; r: Tweety; Fx: x é um peixe; Px: x é um pássado; Gx: x é um gato; Mxy: x é maior do que y; Lxyz: x gosta mais de y do que de z.

   (a) Cleo é um pássaro.

   (b) Miau é um peixe.

   (c) Miau é maior que Cleo.

   (d) Tweety é um gato.

   (e) Tweety é maior que Miau.

   (f) Se Miau é maior do que Cleo e Tweety é maoor do que Miau, então Tweety é maior do que Cleo.

   (g) Miau é maior que Tweety.

   (h) Miau gosta mais de Cleo do que de Tweety

   (i) Tweety gosta mais de Miau do que de Cleo.

   (j) Cleu gosta mais de si mesma do que de Miau.

   (k) Não é o caso que, se Tweety gosta mais de Miau do que de Cleo, e Miau gosta mais de Cleo do que de Tweety, então Cleo gosta mais de Tweety do que de Miau.

[4] Para simplificar o conteúdo do minicurso, não falaremos sobre funções, bem como injeções, sobrejeções e bijeções. Buscaremos sempre tratar do assunto de maneira pouco rigorosa, de forma a torná-lo o mais acessível possível.

2. Traduza as seguintes sentenças para a linguagem do CQC, usando a notação sugerida:

   (a) Carla é pintora. (c: Carla; Px: x é pintora)

   (b) Paulo é jogador de futebol. (p: Paulo; Jx: x é jogador de futebol)

   (c) Carla é mais alta do que Paulo. (Ax: x é mais alto do que y)

   (d) Paulo é irmão de Carla. (Ixy: x é irmão de y)

   (e) Paulo ama Denise. (d: Denise; Axy: x ama y)

   (f) Denise ama Paulo.

   (g) Carla gosta de si própria. (Gxy: x gosta de y)

   (h) A Lua é um satélite da Terra. (l: a Lua; t: a Terra; Sxy: x é um satélite de y)

   (i) Carla deu a Paulo o livro de Denise. (Dxyz: x dá a y o livro de z)

   (j) Paulo deu a Carla o Livro de Denise.

   (k) Paulo é filho de Alberto e Beatriz. (a: Alberto; b: Beatriz; Fxyz: x é filho de y e z)

   (l) Florianópolis fica entre Porto Alegre e Curitiba. (f: Florianópolis; p: Porto Alegre; c: Curitiba; Exyz: x fica entre y e z)

   (m) Curitiba fica entre Florianópolis e São Palo. (s: São Paulo)

   (n) Paulo comprou em Curitiba um quadro de Marisse para presentear Denise. (m: Marisse; Cxyzw: x comprou em y um quadro de z para presentear w)

   (o) Alberto comprou em São Paulo um quadro de van Gogh para presentear Beatriz. (g: van Gogh)

3. Usando a notação sugerida, transcreva as sentenças abaixo para a linguagem do CQC.
   x: Cleo; m: miau; t: Tweety; Fx: x é um peixe; Px: x é um pássaro; Gx: x é um gato; Mxy: x é maior do que y; Lxyz: x gosta mais de y do que de z.

   (a) Cleo não é um pássaro.

   (b) Miau não é um peixe.

   (c) Miau é um gato ou é um pássaro.

   (d) Miau é um gato e é maior que Cleo.

   (e) Tweety não é um gato.

   (f) Ou Tweety é maior que Miau, ou Miau é maior que Tweety.

   (g) Se miau é maior que Tweety, então Tweety não é maior que Miau.

(h) Miau é maior que Tweety, se Tweety não é maior que Miau.

(i) Se miau é um gato, então não é um peixe.

(j) Miau gosta mais de Cleo do que de Tweety se e somente se Tweety é um pássaro.

(k) Tweety gosta mais de miau do que de Cleo, mas Miau não gosta mais de Cleo do que Tweety.

(l) nem Miau nem Cleo são pássaros.

(m) Tweety gosta mais de Miau do que de Cleo. Mas Miau não gosta mais de Cleo do que Tweety.

(n) Nem Miau nem Cleo são pássaros.

(o) Tweety não é um gato ou não é um peixe.

(p) Não é verdade que Tweety é um gato e um peixe.

(q) Não é o caso que, se Miau é um gato, então é um peixe.

4. Formalize as sentenças abaixo, usando a notação sugerida:

   (a) Ou Paulo é engenheiro, ou Carla o é. (c: Carla; p: Paulo; Ex: x é engenheiro)

   (b) Se Sócrates é o mestre de Platão, então Platão é um filósofo. (s: Sócrates; p: Platão; Mxy: x é o mestre de y; Fx: x é um filósofo)

   (c) Paulo ama a si próprio se e somente se ele é narcisista. (Axy: x ama y; Nx: x é narcisista)

   (d) Se o tempo não estiver bom, então, se fizer muito frio, João não irá à praia. (T: o tempo está bom; F: faz muito frio; Px: x vai à praia; j: João)

   (e) Miau é um gato angorá que não é preto. (m: Miau; Ax: x é angorá; Gx: x é um gato; Px: x é preto)

   (f) Carla é mais alta que Paulo somente se Paulo é mais baixo que Carla. (p: Paulo; c: Carla; Axy: x é mais alto que y; Bxy: x é mais baixo que y)

   (g) Carla não é mais alta que Paulo somente se for mais baixa ou tiver a mesma altura que ele. (Txy: x tem a mesma altura que y)

5. Traduzir as fórmulas abaixo da linguagem do CQC para o português, sendo que: a: Antônio; b: Bernardo; c: Cláudia; d: Débora; Fx: x é filósofo; Gxy: x gosta de y; Dxy: x detesta y.

   (a) $Gbd$

   (b) $Fb \wedge Fd$

   (c) $Fb \wedge \neg Fa$

(d) $Fa \wedge Gac$

(e) $Gbd \wedge Ddb$

(f) $\neg Gcb \vee \neg Gbc$

(g) $Gbb \to Dcb$

(h) $Gbd \leftrightarrow Dcd$

(i) $Dbd \to (Fb \vee Fd)$

(j) $(Fa \wedge Fc) \to (Gac \wedge Gca)$

## 4.2 Quantificadores

Como transcrever para a linguagem do CQC a expressão 'Alguém é estudante', ou 'Qualquer ser humano é mamífero'? Até agora, vimos fórmulas de vários tipos. Fórmulas do tipo $C$ ou $Pmn$ serão chamadas de *fórmulas atômicas*. São as mais simples possíveis. A partir do momento que passamos a utilizar conectivos (operadores), formamos fórmulas do tipo $\neg C$ ou $Pmn \vee C \to Ijn$, que serão chamadas de *fórmulas moleculares*. Agora veremos um novo tipo de fórmula, as chamadas *fórmulas gerais*. Na seção 1.3, o argumento sobre a mortalidade de Sócrates contém uma sentença entre suas premissas que é a expressão de uma fórmula geral, falo da proposição 'Todo homem é mortal'. Nesta seção, veremos como transcrever este tipo de proposição para a linguagem do CQC.

### 4.2.1 Quantificação simples

Pois bem, tome a expressão $Fxy$: $x$ é filho de $y$. $Fxy$ não está afirmando algo, isto é, não está especificando de quem estamos falando. Não há como dizer se é verdadeiro ou falso, visto que $x$ e $y$ estão variando. O fato é que, dependendo do conjunto de pessoas das quais estamos falando, e se alguma delas tiver um filho que também está no conjunto, podemos dizer que $Fxy$ tem um elemento, ou seja, dependendo de quem estivermos falando, $Fxy$ poderá formar um conjunto. Caso análogo acontece com a expressão $x < 5$: $x$ é menor que cinco. Dependendo de que tipo de número estivermos falando, formaremos um conjunto de elementos que se enquadram nesses termos. A conclusão a tirar é: $Fxy$ não é uma proposição.

Agora considere a afirmação:

Todo $x$ é filho de algum $y$.

Diferente da afirmação do parágrafo precedente, dependendo do conjunto de pessoas, podemos dizer se esta sentença é verdadeira ou falsa, isto é, temos uma proposição (que é falsa no caso em que o conjunto do qual estamos coletando sujeitos incluir aqueles animais criados em laboratório). Em $Fxy$, $x$ e $y$ são chamadas de variáveis livres. Chamaremos expressões do tipo $Xx$ de *fórmula de variáveis livres* ou de *fórmula aberta* (em contraposição a *fórmula fechada*). Dessa forma, nossa definição de fórmula se estende:

**DEFINIÇÃO 9** *Uma expressão p é uma* ***fórmula*** *se, e somente se, é uma proposição ou uma sentença declarativa de variáveis livres.*

Na expressão 'Todo $x$ é filho de algum $y$', $x$ e $y$ são chamadas de variáveis quantificadas (note, pois, que impomos uma quantidade aos indivíduos pelos quais $x$ e $y$ podem variar). Para quantificar uma variável, vamos utilizar dois tipos de *quantificadores*, o *quantificador universal* e o *quantificador existencial*, respectivamente simbolizados por $\forall$ e $\exists$. O quantificador universal pode ser expresso em português por: para todos, para todo, qualquer que seja, todos, cada, etc. E o existencial, por: existe pelo menos um, algum, alguns, alguém, etc.

Para quantificar uma variável, devemos colocar o quantificador, seguido da variável a ser quantificado, antes da fórmula. Por exemplo, seja $Hx$: $x$ é um homem. Podemos formalizar a sentença 'Todos os x são homens' (ou 'Todos são homens') com a seguinte fórmula geral:

$$\forall x Hx$$

Mas somente para o caso em que a fórmula a ser quantificada for atômica. Para quantificar uma fórmula molecular, devemos evidenciar a fórmula a ser quantificada utilizando parênteses. Assim, para formalizar a expressão 'Todas as mulheres são bonitas' devemos proceder assim (Mx: x é mulher; Bx: x é bonita):

$$\forall x (Mx \to Bx)$$

Pode ocorrer de o estudante, por engano, formalizar a expressão 'Todas as mulheres são bonitas' assim:

$$\forall x (Mx \land Bx)$$

No entanto, esta fórmula diz que 'Todos são mulheres e são bonitas', ou melhor, que 'Todos são mulheres bonitas', o que não é o desejado. É viável às vezes reescrever a expressão a ser formalizada de forma a ficar mais semelhante à linguagem da lógica. De fato, a expressão 'Todas as mulheres são bonitas' está propondo que o fato de ser mulher implica beleza, podendo ser reescrita como 'Mulheres são bonitas, e isso serve para todos', ou melhor, 'Para todos, se são mulheres então são bonitas'.

A sintaxe do quantificador existencial é idêntica à do universal. Portanto, formaremos proposições do tipo:

$$\exists x Ax$$

ou

$$Ma \to \exists x(Bx \vee Fax)$$

As variáveis só estão quantificadas quando estão no *escopo* de um quantificador (região da fórmula onde o quantificador está atuando). Na fórmula $\forall x(Mx \to Bx)$, o escopo do quantificador é $Mx \to Bx$. Se fosse $\forall xMx \to Bx$, o escopo do quantificador universal seria apenas $Mx$ e a variável $x$ em $Bx$ seria considerada livre (não quantificada). Vale ressaltar, ainda, que $\forall xMx \to Bx$, ao contrário de $\forall x(Mx \to Bx)$, não é uma fórmula geral, mas uma implicação.

**EXERCÍCIOS**

1. Usando a notação sugerida entre parênteses, transcreva as sentenças abaixo para a linguagem do CQC:

   (a) Algo é branco. (Bx: x é branco)

   (b) Tudo é azul. (Ax: x é azul)

   (c) Alguma coisa não é azul.

   (d) Algo é bonito. (Bx: x é bonito)

   (e) Todos são mortais. (Mx: x é mortal)

   (f) Nada é insubstituível. (Ix: x é insubstituível)

   (g) Nem tudo dura para sempre. (Dx: x dura para sempre)

   (h) Centauros não existem. (Cx: x é um centauro)

   (i) Alguma coisa não é verde. (Gx: x é verde)

   (j) Cada objeto é igual a si mesmo. (Ix: x é igual a y)

   (k) Há objetos que não são iguais a si mesmos.

   (l) Nem tudo é cor-de-rosa. (Rx: x é cor-de-rosa)

   (m) Nada é cor-de-rosa.

   (n) Alguém é mais velho que Pedro. (p: Pedro; Oxy: x é mais velho que y)

   (o) Ninguém é mais velho que Pedro.

   (p) Matusalém é mais velho que alguém. (m: Matusalém)
   [**Obs.**: nem a Dercy viveu tanto quanto Matusalém, 969 anos]

   (q) Matusalém é mais velho que todos.

   (r) Não é verdade que Matusalém é mais velho que todos.

   (s) Alguém gosta de si mesmo. (Gxy: x gosta de y)

   (t) Todos gostam de si mesmos.

(u) Ninguém gosta de Funk. (f: Funk)

(v) Alguém não gostam de si mesmo.

(w) Não existe alguém que goste de si mesmo.

(x) Não existe alguém que não goste de si mesmo.

(y) Ninguém gosta mais de Paulo do que de Denise. (p: Paulo; d: Denise; Lxyz: x gosta mais de y do que de z)

(z) Nem todos gostam mais de Paulo do que de Denise.

2. Traduza as sentenças abaixo para a linguagem do CQC, usando a notação sugerida:

(a) Alguns homens não são sinceros. (Hx: x é homem; Sx: x é sincero)

(b) Todas as mulheres são lindas. (Mx: x é mulher; Lx: x é linda)

(c) Nenhum peixe é anfíbio. (Px: x é peixe; Ax: x é anfíbio)

(d) Alguns metais são líquidos. (Mx: x é um metal; Sx: x é líquido)

(e) Nenhum animal é vegetal. (Ax: x é um animal; Tx: x é um vegetal)

(f) Nem todos os animais são invertebrados. (Ix: x é invertebrado)

(g) Alguns papagaios não são vermelhos. (Px: x é um papagaio; Rx: x é vermelho)

(h) Nenhum papagaio é vermelho.

(i) Há ao menos um papagaio vermelho.

(j) Há ao menos um papagaio, e ao menos uma coisa vermelha.

(k) Alguns números naturais são ímpares. (Nx: x é um número natural; Ix: x é ímpar)

(l) Tudo que é azul é bonito. (Ax: x é azul; Bx: x é bonito)

(m) Todo poeta é romântico. (Px: x ´um poeta; rx: x é romântico)

(n) Nenhum poeta romântico vende livros. (Lx: x vende muitos livros)

(o) Qualquer pessoa que seja persistente pode aprender lógica. (Px: x é uma pessoa; Tx: x é persistente; Lx: x pode aprender lógica)

(p) Há crianças que gosta de brincar. (Cx: x e uma criança; Gx: x gosta de brincar)

(q) Toda criança gosta de brincar.

(r) Toda criança travessa gosta de brincar. (Tx: x é travessa)

(s) Toda criança travessa gosta de brincar e de ir ao cinema. (Kx: x gosta de ir ao cinema)

(t) Qualquer amigo de Pedro é amigo de João (p: Pedro; j: João; Axy:x é amigo de y)

(u) Nem todos os espiões são mais perigosos do que Boris. (b: Boris; Sx: x é um espião; Dxy: x é mais perigoso do que y)

(v) Nenhum espião é mais perigoso do que Natasha. (n: Natasha)

(w) Qualquer espião que seja mais perigoso do que Natasha é mais perigoso do que Boris

(x) Nenhum espião que seja mais perigoso do que Natasha é mais perigoso do que Boris.

(y) Alguém é mais perigoso do que Boris e Natasha.

(z) Há um espião que não é mais perigoso do que Boris e nem do que Natasha.

3. As chamadas proposições categóricas são parte do silogismo de Aristóteles. São quatro proposições de caráter geral. Formalize cada uma:

   (a) Todo A é B

   (b) Nenhum A é B

   (c) Algum A é B

   (d) Algum A não é B

### 4.2.2 Quantificação múltipla

Como presume o leitor, pode ocorrer mais de um quantificador em uma mesma fórmula. De um modo geral, poderíamos conjugar duas fórmulas gerais, o que nos forneceria uma fórmula onde ocorrem dois quantificadores. No entanto, nosso interesse nesta seção é falar sobre um caso especial de múltiplos quantificadores. Falo do caso em que um quantificador ocorre no escopo do outro. Tome a expressão já citada anteriormente 'Todo x é filho de algum y'. Acontece que nesta sentença ocorrem as palavras 'todo' e 'algum'. Queremos formalizá-la e, para isso, nada mais viável do que tentar transcrevê-la para que as palavras esclareçam como as variáveis estão sendo quantificadas. De fato, 'Todo x é filho de algum y' é equivalente a 'Para qualquer x, existe algum y, de forma que x é filho dele', isto é, 'Para todo x, existe um y tal que x é filho de y'. Fazendo $Fxy : x$ é filho de $y$, nossa fórmula geral fica assim anotada:

$$\forall x \exists y Fxy$$

Esta é a denominada *quantificação múltipla*. Note que a ordem dos quantificadores é crucial para o sentido (a semântica) da frase, e consequentemente, para a verdade dela. Veja que a semântica de $\forall x \exists y Fxy$ é diferente da de $\exists y \forall x Fxy$. Enquanto a primeira diz que ‘Para todo x, existe um y tal que x é filho de y’, isto é, ‘Qualquer um é filho de alguém’, o que é verdadeiro, a segunda diz que ‘Existe um y tal que, para todo x, x é filho de y’, isto é, ‘Existe alguém de quem todos são filhos’ o que é falso (ou verdadeiro, dependendo da sua crença). Note, ainda, que $\exists x \forall y Fxy$ é a formalização da frase ‘Alguém é filho de todos’.

**Exercício:** Descreva o sentido de: (1) $\forall x \forall y Fxy$ e (2) $\exists x \exists y Fxy$

Antes de passarmos aos (muitos) exercícios, vejamos alguns exemplos do uso da quantificação múltipla. Um pouco diferente da fórmula anterior, como ficaria a formalização de ‘Alguém não é filho de ninguém’? No cotidiano, esta frase é utilizada com um sentido diferente do que ela receberia na lógica. De fato, usa-se ‘Alguém não é filho de ninguém’ quando se quer dizer que ‘Alguém é filho de ninguém’ ou ‘Alguém não é filho de alguém’ (uma espécie de filho de chocadeira).[5] Para o sentido cotidiano, isto é, para quando se quer dizer que ‘Alguém é filho de ninguém’, e fazendo $Fxy$: $x$ é filho de $y$, escrevemos:

$$\exists x \forall y \neg Fxy$$

Para o caso puramente lógico da frase, isto é, quando queremos dizer que ‘Alguém é filho de alguém’ (note que ‘Não é filho de ninguém’ quer dizer ‘É filho de alguém’), escrevemos:

$$\exists x \exists y Fxy$$

Também podemos parafrasear a frase ‘Alguém não é filho de ninguém’ como ‘Não é o caso que alguém seja filho de ninguém’, dessa forma, escrevemos

$$\exists x \neg \forall y \neg Fxy$$

que é idêntica a $\exists x \exists y Fxy$, como veremos adiante.

Façamos alguns exemplo mais “trabalhados”. Vamos traduzir a sentença ‘Todo homem ama uma mulher que o ama’ para a linguagem do CQC. Pode parecer simples, mas a frase está carregada de informações. Notação: Hx: x é um homem, Mx: x é uma mulher e Axy: x ama y. Essa proposição é muito similar a uma categórica universal. De fato, está dizendo que todo homem é alguma coisa, ou melhor, tem uma característica, que, no caso, é a de existir uma mulher da qual ele ama e é amado por ela. Dessa forma, certamente entrará uma implicação na fórmula. Lembre-se, ‘Todo A é B’ pode (ou deve?) ser escrito na forma ‘Se A então B’ quantificada universalmente. A fórmula fica assim anotada:

$$\forall x(Hx \rightarrow \exists y(My \wedge (Axy \wedge Ayx)))$$

Agora, vamos traduzir a sentença ‘Um filósofo e um psicólogo deram um livro para Beatriz’. Simples? Com a notação que utilizaremos, nem tanto. Notação: $b$: Beatriz,

[5] Existem variados casos análogos a este. Imagine que você pede a alguém que vá em uma determinada sala ver se alguém está lá. Esta pessoa volta e te diz: “Não tem ninguém lá!”. Logicamente falando, esta pessoa acabou de afirmar que, certamente, alguém está na sala, pois o que ela disse é o mesmo que “Não é verdade que ninguém está lá”.

Px: x é um psicólogo, fx: x é um filósofo, Lx: x é um livro, Dxyz: x dá y para z. Veja que a sentença fala sobre "um" psicólogo, "um" filósofo e "um" livro. São todas palavras que indicam quantificação existencial. Na fórmula, devemos garantir a existência de um filósofo, um psicólogo e um livro. Além das informações sobre os presenteamentos. Podemos formalizar esta sentença de diversas formas. Podemos transcrevê-la como 'Existe um x que é um livro, e existe um filósofo que deu x a Beatriz, e um psicólogo que também deu x a Beatriz'. Nossa fórmula fica assim escrita:

$$\exists x(Lx \wedge (\exists y(Fy \wedge Dyxb) \wedge \exists z(Pz \wedge Dzxb))$$

A proposição também pode ser escrita como:

$$\exists x(Lx \wedge \exists y \exists z((Fy \wedge Pz) \wedge (Dyxb \wedge Dzxb)))$$

Por fim, vamos traduzir a sentença 'Ou os filósofos gostam de todos os livros, ou gostam de nenhum'[6] para a linguagem do CQC. Usaremos a notação da fórmula anterior, acrescentando Gxy: x gosta de y. 'Os filósofos' que dizer 'Todos os filósofos'. A fórmula será composta pela disjunção de duas fórmulas gerais. Faremos cada uma separadamente e depois as disjuntaremos. Na sentença 'Os filósofos gostam de todos os livros', teremos certamente uma implicação (note a semelhança com a *universal afirmativa* de Aristóteles), pois está dizendo que todo filósofo tem uma característica, que é a de gostar de todos os livros. A primeira fórmula geral fica assim:

$$\forall x(Fx \rightarrow \forall y(Ly \rightarrow Gxy))$$

A segunda fórmula mudará apenas o fato de que, para qualquer y que seja livro, os filósofos não gostam de y. Isso poderá ser feito negando $Gxy$. Assim:

$$\forall x(Fx \rightarrow \forall y(Ly \rightarrow \neg Gxy))$$

Disjuntando ambas as fórmulas, ficamos com:

$$\forall x(Fx \rightarrow \forall y(Ly \rightarrow Gxy)) \vee \forall x(Fx \rightarrow \forall y(Ly \rightarrow \neg Gxy))$$

Talvez puséssemos transcrever a sentença de outra forma(**Exercício**).

## EXERCÍCIOS

1. Traduza as sentenças abaixo para a linguagem do CQC, usando a notação sugerida:
   (a) Nenhum amigo de Pedro é amigo de João. (p: Pedro; j: João; Axy: x é amigo de y)
   (b) Qualquer amigo de Pedro que não seja político é amigo de João. (Px: x é político)

[6]Cotidianamente, pronuncia-se esta proposição com a sentença 'Ou os filósofos gostam de todos os livros, ou *não* gostam de nenhum'.

(c) Qualquer amigo de Pedro ou Carlos é amigo de João. (c: Carlos)

(d) Qualquer amigo de Pedro é amigo de algum amigo de João.

(e) Qualquer amigo de Pedro ou Carlos é amigo de qualquer amigo de João.

(f) Nenhuma mulher é feia, mas algumas mulheres não são bonitas. (Mx: x é mulher; Fx: x é feia; Bx: x é bonita)

(g) Se todos os humanos não imortais, então Sócrates é imortal ou Sócrates não é humano. (s: Sócrates; Hx: x é humano; Ix: x é imortal)

(h) Nem todas as aves voam, se Tweety não voa. (t:Tweety; Ax: x é uma ave; Fx: x voa)

(i) Todo fazendeiro tem um burro no qual ele bate. (Fx: x é um fazendeiro; Bx: x é um burro; Tyx: x pertence a y; Hxy: x bate em y)

(j) Algum fazendeiro tem um burro no qual ele não bate.

(k) Todo homem ama uma mulher que o ama. (Hx: x é um homem; Mx: x é uma mulher; Axy: x ama y)

(l) Nem todo homem ama uma mulher que o ama.

(m) Todo homem ama uma mulher que ama alguém.

(n) Se todos os filósofos espertos são cínicos e apenas mulheres são filósofos espertos, então, se há algum filósofo esperto, alguma mulher é cínica. (Fx: x é filósofo; Mx: x é uma mulher; Ex: x é esperto; Cx: x é cínico)

2. Traduza as sentenças abaixo (algumas são um pouco complicadas!) para a linguagem do CQC, usando a seguinte notação:
a: Alice; b: Beatriz; c: Cláudia; Lx: x é um livro; Px: x é um psicólogo; Fx: x é um filósofo; Gxy: x gosta de y; Dxyz: x dá y para z.

(a) Alice gosta de algum filósofo que gosta dela.

(b) Todo filósofo gosta de algum livro.

(c) Há um livro do qual todos os filósofos gostam.

(d) Os filósofos gostam de todos os livros. Os filósofos gostam de todos os livros.

(e) Há um livro do qual nenhum psicólogo gosta.

(f) Filósofos não gostam de psicólogos.

(g) Um filósofo deu um livro para Alice.

(h) Um filósofo deu um livro para Alice, do qual ela não gostou.

(i) Alice e Beatriz deram um livro para Cláudia.

(j) Um filósofo e um psicólogo deram um livro para Beatriz.

(k) Nem todos os filósofos nem os psicólogos gostam de si mesmos.

(l) Se algum psicólogo gosta de Beatriz, então algum filósofo também gosta.

(m) Se algum psicólogo gosta de alguém, então algum filósofo gosta desta mesma pessoa.

(n) Se algum psicólogo gosta de alguém, então algum filósofo também gosta de alguém.

(o) Ou os filósofos gostam de todos os livros, ou não gostam de nenhum.

(p) Alice e Beatriz gostam de todos os filósofos, se algum filósofo dá algum livro para alguém.

(q) Todos gostam dos filósofos, se todo filósofo dá algum livro para alguém.

## 4.3 Tabelas Verdade

Na seção 3.2.1, discutimos com construir tabelas verdade para verificar se algumas fórmulas são tautologias, contradições ou contingências. Porém, note que isso foi feito apenas para o CPC. As proposições que calculamos serão vistas, no CQC, como predicados zerários. De fato, sabemos muito bem como construir uma tabela verdade para esses predicados. Tentaremos (de forma breve) aplicar o método das tabelas verdade ao CQC.

Como o CQC contém predicados zerários e todos os operadores do CPC, já sabemos que as tabelas se aplicam a uma parte dele. Pois bem, considere agora a fórmula:[7]

$$\forall x Bx \to Ba$$

Será que esta fórmula pode ser falsa? Se dissermos que ela é falsa, estaremos afirmando que o antecedente é verdadeiro e o consequente é falso. Então suponha que seja o caso. $\forall x Bx$ é verdadeiro e $Ba$ é falso. Ora, se é verdade que todos se predicam de $B$, em particular, $a$ deverá se predicar de $B$, isto é, deveremos ter $Ba$. Mas isso contradiz a afirmação de que $Ba$ é falso. Podemos concluir, então, que $\forall x Bx \to Ba$ é, de fato, verdadeira.[8]

Como $\forall x Bx \to Ba$ é sempre verdadeira, este fato talvez se reflita na tabela verdade (possivelmente indicando uma tautologia). Vamos, então, ver como fica uma tabela verdade esta fórmula[9]:

[7] A semântica de $B$ não interferirá nas considerações que farei.

[8] Formalizaremos provas desse tipo quando virmos a dedução natural para o CQC na seção 4.5.

[9] Na seção 3.2.1, o leitor deve ter pensado que colocávamos as fórmulas que queríamos mostrar ser, por exemplo, tautologias, na última coluna na tabela. Mas, na verdade, fazíamos isso porque a verdade da última coluna depende da verdade das colunas precedentes. Por isso nos ocupávamos com elas por último. Resumindo, a conclusão não precisa estar na última coluna.

| $\forall xBx$ | $Ba$ | $\forall xBx \to Ba$ |
|---|---|---|
| **V** | **V** | **V** |
| **V** | **F** | **F** |
| **F** | **V** | **V** |
| **F** | **F** | **V** |

Oh não! $\forall xBx \to Ba$ é falsa na linha 2! Com certeza concluímos que $\forall xBx \to Ba$ não é uma tautologia. No entanto, como demonstramos sua validade (por absurdo), esta fórmula será chamada de *fórmula válida*. De fato, existem infinitas fórmulas válidas que não são tautologias.

E agora? Concluímos que não podemos usar as tabelas verdade para o CQC? A resposta é sim. As tabelas verdade não dão conta dos quantificadores (outros métodos darão). No entanto, podemos utilizar as tabelas verdade para uma boa parte do CQC. O fato é que, todas as vezes que podemos entender uma fórmula qualquer como uma fórmula composta de predicados zerários, podemos usar tabelas verdade para analisar, por exemplo, a validade de um argumento (quando as premissas verdadeiras implicam na conclusão verdadeira). Por exemplo, podemos entender $\forall xBx \to Ba$ como uma fórmula do tipo $X \to Y$ (daí percebe-se de onde surgiu a falsidade da linha 2), a fórmula $Ma \to \exists x(Bx \vee Fax)$ também como uma fórmula do tipo $X \to Y$ (mesmo que isso seja insuficiente para algumas considerações) ou a fórmula $(\neg Pa \to (Mab \wedge Pb)) \vee \exists x \forall y(Mxy)$ como uma fórmula do tipo $(\neg A \to (B \wedge C)) \vee D$.

A partir da próxima seção, veremos que há procedimentos de provas (que você já conhece) que podem ser aplicados com sucesso ao CQC.

## 4.4 Tablôs Semânticos no CQC

Como o leitor percebeu, os predicados unários, binários, ternários, ... e n-ários são tratados da mesma forma que os zerários, que vimos na seção 3. O que é novo para nós é o uso dos quantificadores. Trabalhar com fórmulas gerais requer um tratamento diferente. Os tablôs semânticos de predicados não sofrerão alterações. Nesta seção, aprenderemos a trabalhar os tablôs semânticos de fórmulas gerais, e de consequências lógicas envolvendo premissas/conclusão gerais. Falaremos sobre as regras de construção para a verdade ou falsidade desse tipo de fórmula.

Pois bem. Em ambos os quantificadores (universal e existencial), as regras de construção permitirão a substituição das variáveis por constantes individuais (por sujeitos). Cada quantificador, verdadeiro ou falso, receberá uma regra. Como temos dois quantificadores, teremos quatro regras de construção a considerar. Antes de resumi-los num quadro, vamos dialogar e exemplificar rapidamente o sentido de cada um.

Suponha que queiramos verificar se a fórmula $\forall xPx \to Pc$, que significa que 'Se todos são pedreiros, então Cícero é pedreiro'. A validade desta fórmula parece não suscitar dúvidas, porém, sabemos usar os tablôs apenas para ver se uma fórmula é uma tautologia. E já vimos que há infinitas fórmulas válidas que não são tautologias. Precisamos expandir a função do tablôs. Isso será feito acrescentando uma segunda versão do Teorema de Correção e Completude:

**TEOREMA 3** ***Teorema de Correção e Completude II*** – *Uma fórmula $\alpha$ é válida se, e somente se, existe uma prova por tablôs de $\alpha$.*

Se conseguirmos, sempre supondo a falsidade da fórmula, fechar todos os ramos do tablôs, estaremos diante da prova por tablô desta fórmula, que garante sua validade. No caso da fórmula $\forall xPx \to Pc$, supor que ela é falsa para começar o tablô, indica afirmar que $\forall xPx$ é verdadeiro é $Pc$ falso. Assim, temos:

$$\begin{array}{c} \mathbf{F}\ \forall xPx \to Pc\ \checkmark \\ \mathbf{V}\ \forall xPx \\ \mathbf{F}\ Pc \end{array}$$

Sabemos que nada poderemos fazer a respeito de $Pc$. Mas que dizer de $\forall xPx$? Semanticamente falando, se é verdade que 'Todos x são pedreiros', então podemos certamente afirmar que, em particular, é verdade que c é pedreiro. O que nos permite acrescentar **V** $Pc$ abaixo e fechar o tablô:

$$\begin{array}{c} \mathbf{F}\ \forall xPx \to Pc\ \checkmark \\ \mathbf{V}\ \forall xPx \\ \mathbf{F}\ Pc \\ \mathbf{V}\ Pc \\ \times \end{array}$$

E podemos afirmar que $\forall xPx \to Pc$ é, de fato, válida. Perceba que não colocamos o $\checkmark$ na linha **V** $\forall xPx$. Ora, o $\checkmark$ indica que extraímos todas as informações que a fórmula continha, e que não precisaríamos mais dela. Então eu pergunto. Quando acrescentamos **V** $Pc$, extraímos todas as informações de **V** $\forall xPx$? É óbvio que não. Se todos os indivíduos são pedreiros, então $a$, $b$, $c$ ... $a_1$, $a_2$,... são todos pedreiros, isto é, uma infinidade de indivíduos é pedreiro. Esse tipo de fórmula (universal verdadeira) nunca receberá o $\checkmark$, visto que é impossível listar todas as possibilidades que essa fórmula gera, isto é, uma lista infinita de indivíduos que tem uma propriedade. Dessa forma, utilizaremos (acrescentaremos indivíduos novos nos ramos) quando acharmos necessários à demonstração do tablô.

Como poderíamos formalizar a regra de construção que acabamos de utilizar? Bem, note que substituímos a variável $x$ quantificada, em todas as ocorrências na fórmula (no caso, a única ocorrência foi em $Px$), por uma constante individual. Podemos formalizar este procedimento da seguinte forma:

**Universal Verdadeiro:** *Seja $\alpha$ uma fórmula onde $x$ ocorre, e denotemos por $\alpha[x/c]$ a fórmula $\alpha$ sendo feita a substituição de todas as ocorrências livres da variável $x$ por uma constante individual $c$. Se* $\boldsymbol{V}\ \forall x\alpha$ *ocorre num ramo do tablôs, podemos derivar* $\boldsymbol{V}\ \alpha[x/c]$ *quantas vezes quisermos, e utilizando as variáveis que quisermos.*

Agora vamos construir uma tablô para verificar se a fórmula $\neg\exists xPx \to \forall x\neg Px$ é válida. Esta fórmula diz que, ' Se não existem pedreiros, então ninguém é pedreiro' ou, dizendo de outra forma, que ' Se não existem pedreiros, então todos não são pedreiros'. Começando o tablô, temos:

$$\begin{array}{c} \mathbf{F}\ \neg\exists xPx \to \forall x\neg Px \\ \mathbf{V}\ \neg\exists xPx \\ \mathbf{F}\ \forall x\neg Px \end{array}$$

Perceba que na segunda linha temos a verdade de uma negação. Acrescentemos, então, uma nova linha aplicando a regra de construção que vimos para os predicados zerários:

$$\begin{array}{c} \mathbf{F}\ \neg\exists xPx \to \forall x\neg Px \\ \mathbf{V}\ \neg\exists xPx\ \checkmark \\ \mathbf{F}\ \forall x\neg Px \\ \mathbf{F}\ \exists xPx \end{array}$$

Pois bem, temos duas fórmulas gerais para analisar. Comecemos com $\mathbf{F}\ \forall x\neg Px$. Ela diz que 'Não é o caso que todo indivíduo tem a propriedade de não ser pedreiro'. Para visualizar melhor, vamos simbolizar a propriedade de não ser pedreiro por $\beta$. Então $\mathbf{F}\ \forall x\neg Px$ afirma que é falso que todo indivíduo é $\beta$. Ora, se é falso que todo indivíduo é $\beta$, então deve existir um indivíduo particular que não é $\beta$, ou podemos dizer que existe um indivíduo em particular onde é falso que ele é $\beta$. Note, porém, que um universal falso só me garante que existe 1 indivíduo, isto é, o universal falso afirma que existe no mínimo um indivíduo onde $\beta[x/c]$ é falsa. Isso quer dizer que podemos derivar apenas uma vez uma linha que afirma que 'é falso que $c$ é $\beta$'. Mas há uma restrição. Essa constante individual não poderá ter ocorrido antes no tablô (**Exercício:** explique o porquê). Definimos o tratamento da $\mathbf{F}\ \forall x\neg Px$ assim:

**Universal Falso:** *Seja $\alpha$ uma fórmula onde $x$ ocorre, e denotemos por $\alpha[x/c]$ a fórmula $\alpha$ sendo feita a substituição de todas as ocorrências livres da variável $x$ por uma constante individual $c$. Se* $\boldsymbol{F}\ \forall x\alpha$ *ocorre num ramo do tablôs, então podemos derivar* $\boldsymbol{F}\ \alpha[x/c]$ *uma única vez, e sendo $c$ uma constante que até então não tenha ocorrido no tablô.*

Escolhendo a constante $a$ (que não ocorreu anteriormente), temos:

$$
\begin{gathered}
\mathbf{F}\ \neg\exists x Px \to \forall x \neg Px \\
\mathbf{V}\ \neg\exists x Px\ \checkmark \\
\mathbf{F}\ \forall x \neg Px\ \checkmark \\
\mathbf{F}\ \exists x Px \\
\mathbf{F}\ \neg Pa\ \checkmark \\
\mathbf{V}\ Pa
\end{gathered}
$$

Agora, o que dizer de $\mathbf{F}\ \exists x Px$? Podemos interpretar como 'Não é o caso que existam pedreiros', isto é, a partir de $\mathbf{F}\ \exists x Px$, podemos acrescentar quantas $\alpha[x/c]$ quisermos, e com as constantes que desejarmos. O tratamento desta fórmula é muito semelhante ao da universal verdadeira, só que ao invés de derivar quantas afirmações verdadeiras quisermos, aqui derivamos quantas afirmações falsas quisermos. Nossa regra ficará assim anotada:

**Existencial Falso:** *Seja $\alpha$ uma fórmula onde $x$ ocorre, e denotemos por $\alpha[x/c]$ a fórmula $\alpha$ sendo feita a substituição de todas as ocorrências livres da variável $x$ por uma constante individual $c$. Se $\boldsymbol{F}\ \exists x\alpha$ ocorre num ramo do tablôs, podemos derivar $\boldsymbol{F}\ \alpha[x/c]$ quantas vezes quisermos, e utilizando as variáveis que quisermos.*

Vamos, obviamente, escolher a constante $a$ e fechar o tablô:

$$
\begin{gathered}
\mathbf{F}\ \neg\exists x Px \to \forall x \neg Px \\
\mathbf{V}\ \neg\exists x Px\ \checkmark \\
\mathbf{F}\ \forall x \neg Px\ \checkmark \\
\mathbf{F}\ \exists x Px \\
\mathbf{F}\ \neg Pa\ \checkmark \\
\mathbf{V}\ Pa \\
\mathbf{F}\ Pa \\
\times
\end{gathered}
$$

Por último, vamos verificar se a fórmula $\exists x \neg Px \to \neg\forall x Px$ é válida. Ela diz que 'Se alguém não é pedreiro, então nem todos são pedreiros'. Começando o tablô, temos:

$$
\begin{gathered}
\mathbf{F}\ \exists x \neg Px \to \neg\forall x Px \\
\mathbf{V}\ \exists x \neg Px \\
\mathbf{F}\ \neg\forall x Px\ \checkmark \\
\mathbf{V}\ \forall x Px
\end{gathered}
$$

Já sabemos lidar com o universal verdadeiro, mas o que dizer de $\mathbf{F}\ \exists x \neg Px$? Está dizendo que 'alguém não é pedreiro', isto é, que existe um indivíduo que tem uma característica. Quem é esse indivíduo? Não sabemos. Então, poderemos dar uma constante a este indivíduo que não conhecemos, mas esta constante não pode ter aparecido antes. A regra ficará enunciada da seguinte forma:

**Existencial Verdadeiro:** *Seja $\alpha$ uma fórmula onde $x$ ocorre, e denotemos por $\alpha[x/c]$ a fórmula $\alpha$ sendo feita a substituição de todas as ocorrências livres da variável $x$ por uma constante individual $c$. Se* ***V*** *$\exists x\alpha$ ocorre num ramo do tablôs, então podemos derivar* ***V*** *$\alpha[x/c]$ uma única vez, e sendo $c$ uma constante que até então não tenha ocorrido no tablô.*

Como até agora nenhuma constante apareceu, vamos chamar esse indivíduo que não conhecemos de $a$. Continuando o tablô:

$$\begin{array}{c} \mathbf{F}\ \exists x \neg Px \to \neg\forall x Px \\ \mathbf{V}\ \exists x \neg Px\ \checkmark \\ \mathbf{F}\ \neg\forall x Px\ \checkmark \\ \mathbf{V}\ \forall x Px \\ \mathbf{V}\ \neg Pa\ \checkmark \\ \mathbf{F}\ Pa \end{array}$$

E, agora, utilizando a regra antes enunciada para o quantificador universal verdadeiro, e escolhendo a constante $a$, terminamos o tablô:

$$\begin{array}{c} \mathbf{F}\ \exists x \neg Px \to \neg\forall x Px \\ \mathbf{V}\ \exists x \neg Px\ \checkmark \\ \mathbf{F}\ \neg\forall x Px\ \checkmark \\ \mathbf{V}\ \forall x Px \\ \mathbf{V}\ \neg Pa\ \checkmark \\ \mathbf{F}\ Pa \\ \mathbf{V}\ Pa \\ \times \end{array}$$

Terminamos, assim, a demonstração de que $\exists x \neg Px \to \neg\forall x Px$ é válida. Adiante voltaremos a falar sobre as fórmulas demonstradas nesta seção.

Concluiremos a seção resumindo as quatro regras para verdade e falsidade dos quantificadores:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\dfrac{\mathbf{V}\ \forall x\alpha}{\mathbf{V}\ \alpha[x/c]}$ | $\dfrac{\mathbf{F}\ \exists x\alpha}{\mathbf{F}\ \alpha[x/c]}$ | $\dfrac{\mathbf{F}\ \forall x\alpha}{\mathbf{F}\ \alpha[x/c]}$ | $\dfrac{\mathbf{V}\ \exists x\alpha}{\mathbf{V}\ \alpha[x/c]}$ |
| Para qualquer $c$ | Para qualquer $c$ | Desde que $c$ seja nova no ramo | Desde que $c$ seja nova no ramo |

Antes de passar aos exercícios, vamos fazer mais dois exemplos. Vamos construir um tablô para a fórmula $\exists y\forall x Axy \to \forall x\exists y Axy$. Começando o tablô, temos:

$$\begin{array}{c} \mathbf{F}\ \exists y\forall x Axy \to \forall x\exists y Axy \\ \mathbf{V}\ \exists y\forall x Axy \\ \mathbf{F}\ \forall x\exists y Axy \end{array}$$

Note que, em $\exists y\forall x Axy$, a fórmula $\alpha$ citada na regra é $\forall x Axy$, que é o escopo do quantificador existencial. O mesmo vale para $\forall x\exists y Axy$, cujo escopo é $\exists y Axy$. No, ainda, que não fará diferença derivar uma ou outra primeiro, visto que a regra de derivação de ambas são semelhantes. Comecemos por $\exists y\forall x Axy$. Vamos fazer a mudança $\alpha[y/b]$, isto é, trocar todas as ocorrências da variável $y$ pela constante $b$. Dessa forma, temos:

$$\begin{array}{c} \mathbf{F}\ \exists y\forall x Axy \to \forall x\exists y Axy \\ \mathbf{V}\ \exists y\forall x Axy\ \checkmark \\ \mathbf{F}\ \forall x\exists y Axy \\ \mathbf{V}\ \forall x Axb \end{array}$$

Agora vamos fazer a mudança $\alpha[x/a]$ em $\forall x\exists y Axy$, isto é, trocar todas as ocorrências da variável $x$ pela constante $a$:

$$\begin{array}{c} \mathbf{F}\ \exists y\forall x Axy \to \forall x\exists y Axy \\ \mathbf{V}\ \exists y\forall x Axy\ \checkmark \\ \mathbf{F}\ \forall x\exists y Axy\ \checkmark \\ \mathbf{V}\ \forall x Axb \\ \mathbf{F}\ \exists y Aay \end{array}$$

Chegamos a um ponto interessante, pois ao aplicar as regras às quantificações que temos, podemos escolher quaisquer constante que quisermos (vide regra). Dessa forma, em $\forall x Axb$ vamos fazer a mudança $\alpha[x/a]$ e em $\exists y Aay$ vamos fazer a mudança $\alpha[y/b]$, o faz fechar o tablô:

$$\begin{array}{c} \mathbf{F}\ \exists y\forall x Axy \to \forall x\exists y Axy \\ \mathbf{V}\ \exists y\forall x Axy\ \checkmark \\ \mathbf{F}\ \forall x\exists y Axy\ \checkmark \\ \mathbf{V}\ \forall x Axb \\ \mathbf{F}\ \exists y Aay \\ \mathbf{V}\ Aab \\ \mathbf{F}\ Aab \\ \times \end{array}$$

Agora vamos verificar se a fórmula $\forall x Ax \vee \forall x Bx \to \forall x(Ax \vee Bx)$ é válida. Iniciando o tablô, temos:

$$\begin{array}{c}\mathbf{F}\ \forall xAx \vee \forall xBx \to \forall x(Ax \vee Bx)\\ \mathbf{V}\ \forall xAx \vee \forall xBx\\ \mathbf{F}\ \forall x(Ax \vee Bx)\end{array}$$

A fórmula $\forall xAx \vee \forall xBx$ não é geral, pois é uma disjunção. Vamos utilizar a regra para disjunção verdadeira:

$$\begin{array}{c}\mathbf{F}\ \forall xAx \vee \forall xBx \to \forall x(Ax \vee Bx)\\ \mathbf{V}\ \forall xAx \vee \forall xBx\\ \mathbf{F}\ \forall x(Ax \vee Bx)\\ \begin{array}{cc}\mathbf{V}\ \forall xAx & \mathbf{V}\ \forall xBx\end{array}\end{array}$$

Agora, em $\forall x(Ax \vee Bx)$, o escopo do quantificador é $Ax \vee Bx$, e devemos escolher uma variável para fazer a substituição nele. Vamos escolher $a$. Lembre-se, a fórmula pertence a ambos os ramos, e, por isso, devemos derivar em ambos os ramos:

$$\begin{array}{c}\mathbf{F}\ \forall xAx \vee \forall xBx \to \forall x(Ax \vee Bx)\\ \mathbf{V}\ \forall xAx \vee \forall xBx\\ \mathbf{F}\ \forall x(Ax \vee Bx)\\ \begin{array}{cc}\mathbf{V}\ \forall xAx & \mathbf{V}\ \forall xBx\\ \mathbf{F}\ Aa \vee Ba & \mathbf{F}\ Aa \vee Ba\end{array}\end{array}$$

Para as fórmulas $\forall xAx$ e $\forall xBx$, como são ambas verdadeiras, podemos fazer a mudança $\alpha[x/c]$ para qualquer constante $c$ que quisermos. Vamos escolher $a$ em ambos os ramos. Além disso, em cada disjunção na ponta de cada ramo, vamos utilizar a regra para disjunções falsas. Note que, dessa forma, fechamos o tablô e concluímos a demonstração:

$$\begin{array}{c}\mathbf{F}\ \forall xAx \vee \forall xBx \to \forall x(Ax \vee Bx)\\ \mathbf{V}\ \forall xAx \vee \forall xBx\\ \mathbf{F}\ \forall x(Ax \vee Bx)\\ \begin{array}{cc}\mathbf{V}\ \forall xAx & \mathbf{V}\ \forall xBx\\ \mathbf{F}\ Aa \vee Ba & \mathbf{F}\ Aa \vee Ba\\ \mathbf{V}\ Aa & \mathbf{V}\ Ba\\ \mathbf{F}\ Aa & \mathbf{F}\ Aa\\ \mathbf{F}\ Ba & \mathbf{F}\ Ba\\ \times & \times\end{array}\end{array}$$

Um último comentário antes dos exercícios. Como o leitor deve ter percebido, não alteramos a forma de tratar os tablôs no CQC, apenas foram acrescentadas regras para um novo tipo de fórmula, as gerais. No mais, tudo continua como antes. Dessa forma, não precisaremos falar sobre consequência lógica, pois a forma como demonstrá-las continua idêntica, com o acréscimo de quatro novas regras. Agora sim, aproveite os exercícios.

**EXERCÍCIOS**

1. Mostre a validade das seguintes fórmulas usando tablôs:

   (a) Exercícios a coletar

   (b) Exercícios a coletar

   (c) Exercícios a coletar

   (d) Exercícios a coletar

   (e) Exercícios a coletar

   (f) Exercícios a coletar

   (g) Exercícios a coletar

   (h) Exercícios a coletar

2. Mostre a validade das seguintes consequências lógicas usando tablôs:

   (a) Exercícios a coletar

   (b) Exercícios a coletar

   (c) Exercícios a coletar

   (d) Exercícios a coletar

   (e) Exercícios a coletar

   (f) Exercícios a coletar

   (g) Exercícios a coletar

   (h) Exercícios a coletar

### 4.4.1 Comentários sobre variáveis livres

Não falamos do *conjunto universo* por dois motivos fortes. O primeiro é que supor a existência deste conjunto leva a uma contradição (vide *Paradoxo de Russel*[10]). E a segunda

[10] Vamos resumir o paradoxo informalmente. Ao afirmar a existência do *conjunto universo*, isto é, do *conjunto de todos os conjuntos*, estaríamos afirmando que ele contém ele mesmo. É fato que o conjunto das partes de um dado conjunto não-vazio A é "maior" do que A (e o conjunto universo, obviamente, é não-vazio). Mas o *conjunto de todos os conjuntos* deveria conter, também, o seu próprio conjunto das partes, o que o faria ser maior ou igual a ele, o que é um absurdo. Isto é, supor a existência de um *conjunto universo* gera uma contradição.

é que a exposição almeja simplificar o conteúdo. No entanto, para falar de uma fórmula de variáveis livres, vale falar de um conjunto "maior", que contém as constantes pelas quais podemos substituir as variáveis na fórmula (algo como um "universo de discurso"). Como dito, uma fórmula de variáveis livres não é uma proposição, pois não podemos dar um valor de verdade para ela. De fato, dependendo da constante que escolhermos no conjunto "maior", podemos avaliar a verdade da fórmula. Note que, ao falar de uma variável livre, podemos entender que temos a liberdade de substituir a variável pela constante que quisermos e, então, ver o que acontece. No geral, há um subconjunto do conjunto "maior" que, para qualquer constante que escolhermos neste subconjunto, a fórmula poderá ser avaliada como verdadeira, e outro subconjunto onde a fórmula será falsa.

Dizendo de outra forma, dependendo do conjunto "maior", uma fórmula de variáveis livres gera um conjunto (podendo, claro, ser vazio). Este tipo de fórmula é de maior interesse para a teoria dos conjuntos do que para o CQC. No entanto, podemos facilmente aproveitar estas fórmulas fazendo com que se fechem, utilizando o que chamaremos de *fecho*. Você (além da fórmula) também será livre para fechá-las como quiser, isto é, usando o *fecho universal* ou o *fecho existencial*. Geralmente é mais interessante testar o fecho universal, pois poderíamos dizer que casos de existência são "menos gerais" (porém importantíssimos em muitos casos, como temos em geometria euclidiana). Podemos formalizar os fechos da seguinte maneira:

**DEFINIÇÃO 10** *Seja $\alpha$ uma fórmula aberta, e sejam $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ suas variáveis livres. Diremos que a fórmula $\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 ... \forall x_n \alpha$ é o* ***fecho universal*** *de $\alpha$.*

**DEFINIÇÃO 11** *Seja $\alpha$ uma fórmula aberta, e sejam $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ suas variáveis livres. Diremos que a fórmula $\exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 ... \exists x_n \alpha$ é o* ***fecho existencial*** *de $\alpha$.*

Fechamos uma fórmula com o intuito de aproveitar sua construção. O fecho possibilita trabalharmos com ela nos procedimentos de prova e em outras aplicações do CQC.

O próximo comentário merece destaque. O faremos com o intuito de esclarecer um detalhe do conteúdo que, possivelmente, poderá ter confundido o leitor. Falo de um detalhe na regra de construção para os quantificadores. Pois bem, como o leitor deve ter percebido, falamos que $\alpha[x/c]$ é a fórmula $\alpha$, sendo substituída todas as ocorrências *livres* da variável $x$ por uma constante individual $c$. Talvez o leitor se perguntou: Ocorrência livre? Como assim, se $\alpha$ estava quantificada? O fato é que "$\alpha$ simplesmente" não estava quantificada.

Veja bem. Quando afirmamos $\forall x \alpha$, supomos que $x$ ocorre em $\alpha$, e que o quantificador universal quantificou essa(s) ocorrência(s). O fato é que $\alpha$ é uma fórmula aberta onde ocorre $x$, fechada (aplicado o fecho) pela quantificação $\forall x$. O fato é que, ao aplicar a regra, devemos retirar a quantificação de $\alpha$ e, então, substituir as ocorrências de $x$ que ficaram livres. Por que fazer isso? Para exemplificar, tomemos a fórmula $\forall x(Px \to \exists x Sx)$. Neste caso, a fórmula $\alpha$ é $Px \rightarrow \exists xSx$. Veja que a única ocorrência livre da variável $x$ em $\alpha$ é em $Px$. Se quisermos fazer a substituição $\alpha[x/c]$, devemos, conforme a regra, substituir as ocorrências *livres*, isto é, substituir apenas em $Px$, pois $x$ não ocorre livre em $Sx$. Se, no enunciado das regras, não falássemos de ocorrências livres, o estudante iria cometer o erro de mudar todas as ocorrências de $x$ na fórmula $\alpha$. E, no caso, o que aconteceria com $\exists x$? Esperamos ter esclarecido as regras.

## 4.5 Dedução Natural no CQC

Certamente o leitor suspeita (corretamente) que a dedução natural não sofrerá alterações com a introdução dos predicados, e que apenas se acrescentarão regras de inferência novas para os quantificadores. De fato, é o caso. Constantes proposicionais e constantes de predicados são, ambas, fórmulas atômicas, e deverão ser tratadas na dedução da mesma maneira. Nesta seção, apresentaremos quatro regras de inferência diretas para os quantificadores.

### 4.5.1 Regras para o quantificador universal

As regras que apresentaremos apresentam certa semelhança com aquelas dos tablôs. Continuaremos a usar $\alpha[x/c]$ para os mesmos propósitos, porém, como sabemos, a dedução não envolve verdade, mas apenas a manipulação das fórmulas que já temos. Vejamos nossa primeira regra de inferência, a *eliminação do universal*, simbolizada por **E**$\forall$:

Eliminação do Universal (E$\forall$): $$\frac{\forall x\alpha}{\alpha[x/c]}$$

O enunciado é idêntico ao dos tablôs, isto é, de $\forall x\alpha$, podemos derivar $\alpha[x/c]$, para qualquer constante $c$.

Além de eliminar o universal, também poderemos, com algumas restrições, introduzi-lo. A regra se chamará introdução do universal e será simbolizada por **I**$\forall$. Seja $\alpha(c)$ a fórmula $\alpha$ contendo alguma ocorrência de uma constante $c$, e $\alpha[c/x]$ a fórmula alpha tendo todas as ocorrências da constante $c$ substituídas por $x$. A fórmula fica assim:

Introdução do Universal (I$\forall$): $$\frac{\alpha(c)}{\forall x\alpha[c/x]}$$

porém com duas restrições. A primeira é que essa constante não pode ocorrer nas premissas ou em alguma hipótese que ainda esteja valendo na linha de $\alpha$. Se não seguíssemos estas restrições, estaríamos, por exemplo, validando o seguinte argumento:

$$\begin{array}{r|ll} 1 & Cs & \text{P} \\ 2 & \forall x Cx & \forall,\ 1 \end{array}$$

E estaríamos concluindo de 'Sérgio é canhoto' que 'Todos são canhotos'. O que é, obviamente, inválido.

A segunda restrição é que a constante $c$ seja substituível por $x$ em $\alpha$. A definição de constante substituível pode ser formulada assim:

**DEFINIÇÃO 12** *Seja $\alpha$ uma fórmula onde uma constante $c$ ocorre. Dizemos que $c$ é substituível por $x$ em $\alpha$ se nenhuma parte de $\alpha$ da forma $\exists x\beta$ ou $\forall x\beta$ contém $c$.*

Ilustremos com o seguinte exemplo. Se $\alpha$ for a fórmula $\exists xBxa$, da definição, decorre que a constante $a$ não é substituível por $x$. Não fosse a restrição, nos seria permitido introduzir o universal e obter

$$\forall x\exists xBxx$$

e teríamos um quantificador desnecessário. Poderíamos, então, descartá-lo e obter

$$\exists xBxx$$

que não foi o pretendido.

As regras de inferência diretas para o quantificador universal ficam assim resumidas:

| Eliminação do Universal (E$\forall$) | Introdução do Universal I$\forall$ |
|---|---|
| $\dfrac{\forall x\alpha}{\alpha[x/c]}$ | $\dfrac{\alpha(c)}{\forall x\alpha[c/x]}$ |
| para qualquer constante $c$. | desde que $c$ não ocorre em alguma premissa ou em hipótese aberta, e que $c$ seja substituível por $x$ em $\alpha$ |

Posteriormente (na seção 4.5.4) haverá uma pequena abordagem dos erros mais comuns que o estudante poderá cometer. Caso queira, leia a seção antes de fazer os exercícios. Se compreendeu com clareza como as regras E$\forall$ e I$\forall$ funcionam, então pode começar a divertir-se com alguns exercícios:

### EXERCÍCIOS

1. Demonstre a validade das seguintes formas de argumento:

(a) $\{\forall x(Px \to Qx), \neg Qb\} \vdash \neg Pb$

(b) $\{\forall x(\neg Gx \to \neg Fx), Fc\} \vdash Gc$

(c) $\{\forall x(Px \to Qx), \forall x(Qx \to Rxb)\} \vdash Pa \to Rab$

(d) $\{\forall x Fx \wedge \forall y Hy, \forall z \forall x Tzx\} \vdash Fa \wedge Tab$

(e) $\{\forall x(Px \wedge Qx)\} \vdash \forall x Px$

(f) $\{\forall x(Ax \to Bx)\} \vdash \forall x(\neg Bx \to \neg Ax)$

(g) $\{\forall x Px \to \forall x Qx, \neg Qa\} \vdash \neg \forall x Px$

(h) $\{\forall x \forall y Lxy\} \vdash \forall y \forall x Lxy$

2. Traduza, usando a notação sugerida, e demonstre a validade:

(a) Todo papagaio é vermelho. Currupaco é um papagaio. Logo, Currupaco é vermelho. (c: Currupaco; Px: x é um papagaio; Rx: x é vermelho)

(b) Nenhuma arara é vermelha. Todos os papagaios são vermelhos. logo, nenhuma arara é um papagaio. (Ax: x é uma arara)

(c) Todo papagaio é vermelho ou verde. Currupaco não é verde. Logo, se currupaco é um papagaio, então é vermelho. (Gx: x é verde)

(d) Todos amam todos. Logo, Romeu ama Julieta e Julieta ama Romeu. (r: Romeu; j: Julieta; Axy: x ama y)

(e) Todos os papagaios amam Julieta. Quem ama julieta detesta romeu. Quem detesta Romeu tem bom gosto. Logo, todos os papagaios têm bom gosto. (Dxy: x detesta y; Gx: x tem bom gosto)

### 4.5.2 Regras para o quantificador existencial

Também semelhantes às dos tablôs, as regras de inferência diretas para o quantificador existencial serão, também, as de *eliminação do existencial* (**E**$\exists$) e de *introdução do existencial* (**I**$\exists$). Vejamos primeiro a segunda, que diz, por exemplo, que da informação de que 'Pietra é bailarina', podemos concluir que 'alguém é bailarina':

Introdução do existencial (I$\exists$):
$$\frac{\alpha(c)}{\exists x \alpha[c/x]}$$

onde $\alpha(c)$ é uma fórmula onde $c$ ocorre, e $\alpha[c/x]$ é a fórmula resultante da substituição de *uma ou mais* ocorrências da constante $c$ em $\alpha$ por $x$, desde que $c$ seja substituível por $x$ (vide definição 12). Veja que, ao contrário da introdução do universal, aqui podemos substituir *uma ou mais* constantes. Não somos obrigados a substituir *todas* as ocorrências, mas apenas aquelas que nos for conveniente na demonstração. Por exemplo, seja $Bxy$:

$x$ ama $y$. Se tivermos $Bss$ (Sheyla ama ela mesma) numa linha, podemos introduzir o existencial de três maneiras:

1. $\exists xBxs$ (alguém ama Sheyla)

2. $\exists xBsx$ (Sheyla ama alguém)

3. $\exists xBxx$ (alguém ama a si mesmo)

Vejamos mais um exemplo. "Suponhamos" que Sarney seja um político bandido, e queiramos concluir de 'Sarney é um político bandido', que 'alguém é um político bandido':

$$\begin{array}{r|ll} 1 & Ps \wedge Bs & \text{P} \\ 2 & \exists x(Px \wedge Bx) & \text{I}\exists,\ 1 \end{array}$$

Na linha 1, temos $\alpha(s)$ (que é $Ps \wedge Bs$) e, segundo o enunciado da regra, podemos aplicá-la sem se preocupar se a constante está em premissas ou se estamos aplicando a regra numa hipótese aberta. Ainda poderíamos aplicar a regra da seguinte forma:

$$\begin{array}{r|ll} 1 & Ps \wedge Bs & \text{P} \\ 2 & \exists x(Px \wedge Bs) & \text{I}\exists,\ 1 \end{array} \quad \textit{ou} \quad \begin{array}{r|ll} 1 & Ps \wedge Bs & \text{P} \\ 2 & \exists x(Ps \wedge Bx) & \text{I}\exists,\ 1 \end{array}$$

Deixamos por último a regra de eliminação do universal porque esta é mais complicada (não no sentido de difícil) do que as demais. Suponhamos que temos numa linha a fórmula $\exists xBx$ (alguém é um bobão). Não sabemos de qual(is) constante(s) a fórmula de refere. Sabemos que existe, no mínimo, um indivíduo que tem a propriedade de ser bobão. Será que poderíamos, como nos tablôs, derivar $Bc$ para alguma constante $c$ que ainda não apareceu?

$$\begin{array}{r|ll} 1 & \exists xBx & \text{P} \\ 2 & Bc & \text{Será que podemos?} \end{array}$$

Note que, qualquer que seja a constante $c$ que coloquemos neste caso, teríamos uma constante que não aparece em premissa, nem em hipótese vigente, o que nos permite aplicar I$\forall$:

$$\begin{array}{r|ll} 1 & \exists xBx & \text{P} \\ 2 & Bc & \text{Será que podemos?} \\ 3 & \forall xBx & \text{I}\forall,\ 1 \end{array}$$

Dessa forma, concluímos de 'Alguém é um bobão' que 'Todos são bobões', o que é, obviamente, inválido. Então, em que situações podemos eliminar um existencial? A se estabelecerá da seguinte maneira (atenção nas restrições):

Eliminação do existencial (E$\exists$):
$$\begin{array}{|l} \exists x\alpha \\ \quad\begin{array}{|l} \underline{\alpha[x/c]} \\ \vdots \\ \beta \end{array} \\ \beta \end{array}$$

sendo $\alpha[x/c]$ a fórmula resultante da substituição de todas as ocorrências livres da variável $x$ em $\alpha$ pela constante $c$, desde que $c$: (1) não ocorra em premissa alguma, (2) não ocorra em hipótese que esteja valendo na linha da aplicação da regra, (3) não ocorra em $\alpha$ e (4) não ocorra em $\beta$.

Ou seja, para aplicar E$\exists$, devemos supor hipoteticamente $-$ porque não sabemos de quem estamos falando $-$ que o quantificador refere-se a uma constante $c$ que devemos assegurar ser uma constante nova (não necessariamente nova[11]). Se conseguirmos derivar uma fórmula $\beta$ onde a suposta constante $c$ não mais ocorre, então podemos fechar a hipótese e afirmar $\beta$ numa linha comum da dedução.

Vamos fazer um exemplo. Vamos provar a validade da sentença 'Se existem mulheres lindas então existem mulheres', que formularemos como a consequência lógica: $\{\exists x(Mx \wedge Lx)\} \vdash \exists x Mx$:

$$\begin{array}{r|l l} 1 & \exists x(Mx \wedge Lx) & \text{P} \\ 2 & \quad \underline{Ma \wedge La} & \text{H (para E}\exists\text{)} \\ 3 & \quad Ma & \text{S, 2} \\ 4 & \quad \exists x Mx & \text{I}\exists\text{, 3} \\ 5 & \exists x Mx & \text{E}\exists\text{, 1, 2-4} \end{array}$$

E, assim, fica provada a consequência lógica que queríamos. Façamos uma pequena narração da dedução. Primeiro, notando que a constante $a$ não ocorre, conforme as restrições da regra que queremos aplicar, fizemos uma hipótese com o intuito de aplicar E$\exists$. Ao fazer a hipótese, conseguimos derivar $Ma$, que estava de acordo com a regra I$\exists$. Obtemos, assim, uma fórmula onde a suposta constante não mais ocorre (e que é a fórmula que queremos), o que nos permite aplicar a regra E$\exists$ e, então, afirmar esta fórmula numa linha não-hipotética da dedução, o que nos fez concluir a demonstração.

Na seção 4.5.4 veremos, além dos erros mais comuns que o estudante possa cometer, a exemplificação do que pode ocorer caso não respeitemos as restrições impostas pelas regras para os quantificadores universal e existencial. Resumindo, agora, as regras para o quantificador existencial que vimos, ficamos com o seguinte quadro:

[11] Se a constante foi inserida na dedução pela aplicação da regra E$\forall$, ou se a constante aparece numa hipótese fechada (descartada), a regra poderá ser aplicada sem problemas.

Introdução do existencial (I∃)

$$\frac{\alpha(c)}{\exists x\alpha[c/x]}$$

para qualquer constante $c$ substituível por $x$ em $\alpha$

Eliminação do existencial (E∃)

$$\begin{array}{|l} \exists x\alpha \\ \quad \begin{array}{|l} \alpha[x/c] \\ \hline \vdots \\ \beta \end{array} \\ \beta \end{array}$$

desde que $c$ não ocorra em premissa, nem em hipótese aberta, nem em $\alpha$ e nem em $\beta$

**EXERCÍCIOS**

1. Demonstre a validade dos seguintes argumentos:

   (a) $\{Rab\} \vdash \exists x \exists y Rxy$

   (b) $\{\forall x(Px \to Qx), Pa\} \vdash \exists x Qx$

   (c) $\{\forall x(Px \lor Qx), \neg Qb\} \vdash \exists y Py$

   (d) $\{\exists x Px \to \forall x \neg Qx, Pa\} \vdash \neg Qa$

   (e) $\{\forall x(Px \to Qx), \exists x \neg Qx\} \vdash \exists x \neg Px$

   (f) $\{\forall x(\neg Gx \to \neg Fx), \exists x Fx\} \vdash \exists x Gx$

   (g) $\{\forall x(Px \lor Qx), \exists y \neg Py\} \vdash \exists z Qz$

   (h) $\{\forall x((Ax \lor Bx) \to Cx), \exists x Ax\} \vdash \exists x Cx$

2. Traduza usando a notação sugerida

   (a) Todo papagaio é vermelho. Existem papagaios. Logo, existem coisas vermelhas. (Px: x é um papagaio; Rx: x é vermelho)

   (b) Nenhuma arara é um papagaio. Currupaco é um papagaio. Logo, algo não é uma arara. (c: Currupaco; Ax: x é uma arara)

   (c) Nenhum papagaio é cor-de-laranja. Algumas aves são papagaios. Log, algumas aves não são cor-de-laranja. (Bx: x é uma ave; Lx: x é cor-de-laranja)

   (d) Alguém é amado por todos. Logo, todos amam alguém. (Axy: x ama y)

(e) Qualquer um que seja mais perigoso que Natasha é mais perigoso que Boris. Há espiões mais perigosos que Natasha. Logo, há espiões mais perigosos que Boris. (b: Boris; n: Natasha; Ex: x é um espião; Dxy: x é mais perigoso que y)

(f) As pessoas românticas são inspiradas pela Lua. Quem é inspirado pela Lua não gosta de rosas. Mas todos gostam ou de rosas ou de flores do campo. Logo, pessoas românticas gostam de flores do campo. (Px: x é uma pessoa romântica; Lx: x é inspirado pela lua; Rx: x gosta de rosas; Fx: x gosta de flores do campo)

(g) Alberto é amigo daqueles que não são amigos de si mesmos. Logo, alguém é amigo de si mesmo. (a: Alberto; Fxy: x é amigo de y)

(h) Tudo deve estar em movimento ou em repouso, mas um objeto em voo sempre ocupa um espaço igual a si mesmo. Mas o que sempre ocupa um espaço igual a si mesmo não está em movimento. Como o que não está em movimento está em repouso, segue-se que um objeto em voo está, na verdade, em repouso. [Um dos paradoxos de Zênon de Eléia] (Mx: x está em movimento; Rx: x está em repouso; Ox: x é um objeto em voo; Ex x sempre ocupa um espaço igual a si mesmo)

### 4.5.3 Regras de inferência derivadas para quantificadores

O leitor deve recordar que, na seção 4.4, demonstramos a validade de $\neg\exists xPx \rightarrow \forall x\neg Px$, bem com de $\exists x\neg Px \rightarrow \neg\forall xPx$. O fato é que ambas as formas são, na verdade, equivalências lógicas. Estas darão fruto a duas regras de inferência reversíveis para os quantificadores. As chamaremos de *Intercâmbio de Quantificadores*, e as simbolizaremos por IQ. Serão formuladas assim:

$$\frac{\neg\forall x\alpha}{\exists x\neg\alpha} \qquad\qquad \frac{\neg\exists x\alpha}{\forall x\neg\alpha}$$

Vamos demonstrar, via dedução, que $\neg\forall x\alpha \Rightarrow \exists x\neg\alpha$. A recípocra desta, e a outra, digo $\neg\exists x\alpha \Leftrightarrow \forall x\neg\alpha$, será deixada como exercício.

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\neg\forall x\alpha$ | P / ? $\exists x\neg\alpha$ |
| 2 | $\quad \neg\exists x\neg\alpha$ | H / ? CTR |
| 3 | $\quad\quad \neg\alpha(c)$ | H / ? CTR |
| 4 | $\quad\quad \exists x\neg\alpha$ | I$\exists$, 3 |
| 5 | $\quad\quad \exists x\neg\alpha \land \neg\exists x\neg\alpha$ | C, 2,4 |
| 6 | $\quad \neg\neg\alpha(c)$ | CTR, 3-5 |
| 7 | $\quad \alpha(c)$ | DN, 6 |
| 8 | $\quad \forall x\alpha$ | I$\forall$, 7 |
| 9 | $\quad \forall x\alpha \land \neg\forall x\alpha$ | C, 1,8 |
| 10 | $\neg\neg\exists x\neg\alpha$ | CTR, 2-9 |
| 11 | $\exists x\neg\alpha$ | DN, 10 |

E fica, assim, demonstrado que $\exists x\neg\alpha$ decorre de $\neg\forall x\alpha$.

**EXERCÍCIOS**

1. Prove os demais casos da regra de Intercâmbio de Quantificadores.

2. Demonstre:

    (a) $\{\neg\forall x\neg Px\} \vdash \exists xPx$

    (b) $\{\neg\exists x\neg Px\} \vdash \forall xPx$

    (c) $\{\forall x(Px \land Qx)\} \vdash \forall xPx \land \forall xQx$

    (d) $\{\forall xFx \land \forall xHx\} \vdash \forall x(Fx \land Hx)$

    (e) $\{\forall x(Px \land \neg Rxb), \exists x(\neg Qx \lor Rxb), \forall x(\neg Rxb \to Qx)\} \vdash \exists yRyb$

    (f) $\{\forall x(Fx \to Hx), \forall z(Tz \to Fz), \exists y(Ty \land Qy)\} \vdash \exists x(Hx \land Qx)$

    (g) $\{\exists x(Px \land Qx)\} \vdash \exists xPx \land \exists xQx$

    (h) $\{\forall xPx \to \forall xQx, \exists x\neg Qx\} \vdash \neg\forall xPx$

    (i) $\{\exists xPbx, \forall x\forall y(Pxy \to Syx)\} \vdash \exists xSxb$

### 4.5.4 Erros e violações

Faremos, agora, umas poucas ressalvas, evidenciando fatos das regras que talvez o estudante esqueça e acabe não as aplicando devidamente.

Comecemos pela regra do quantificador universal. O primeiro ponto a ressaltar é que, no caso da múltipla quantificação, você deve eliminar um quantificador de cada vez. Por exemplo, a validade de $\forall x\forall y\forall zBxyz \Rightarrow Babc$ fica assim demonstrada:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\forall x\forall y\forall zBxyz$ | P / ? Babc |
| 2 | $\forall y\forall zBayz$ | E$\forall$, 1 |
| 3 | $\forall zBabz$ | E$\forall$, 2 |
| 4 | $Babc$ | E$\forall$, 3 |

Isso porque a fórmula $\alpha$ citada na regra é $\forall y\forall zBxyz$, e $\alpha[x/c]$ diz para trocar *uma variável livre* $x$ por uma constante, nunca mais que isso.

Outro erro comum é aplicar a regra da seguinte forma:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\forall xBx \to Hb$ | P |
| 2 | $Ba \to Hb$ | E$\forall$, 1 |

O passo 2 está completamente fora das regras. Note que E$\forall$ aplica-se a fórmulas gerais, não a implicações. Ter $\forall xBx \to Hb$ não é o mesmo que ter $\forall x(Bx \to Hb)$, não se engane! A primeira é uma implicação, a segunda, sim, é uma fórmula geral. O mesmo serve para a I$\exists$ e as demais. Logo exemplificaremos.

Agora, para introduzir um universal, isto é, utilizar I$\forall$, devemos respeitar a regra e escolher uma constante que não está nas premissas, bem como em hipóteses abertas. Além do mais, devemos verificar se a constante é substituível (isso também serve para I$\exists$). Já exemplificamos os erros que podem acontecer em caso de violação das restrições. A única coisa é que, em $\alpha[c/x]$, ao aplicar I$\forall$, *todas* as ocorrências da constante deve ser substituída por $x$. O mesmo vale para $\alpha[x/c]$ quando aplicamos E$\forall$, pois devemos fazer a substituição de *todas* as variáveis livres pela constante. Caso não respeitemos isso, veja um exemplo do que pode ocorrer. Seja Gxy: x gosta de y, e Nx: x é narcisista.

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\forall x(Gxx \to Nx)$ | P |
| 2 | $Gpp \to Np$ | E$\forall$, 1 |
| 3 | $\forall y(Gyp \to Ny)$ | I$\forall$ ERRO! |

Ou seja, a partir da premissa de que todos que gostam de si mesmos são narcisistas, estamos concluindo que todos que gostam do palhaço biribinha são narcisistas, o que é, obviamente, inválido. Se usássemos corretamente a regra na linha três, obteríamos $\forall y(Gyy \to Ny)$ (que é idêntica à fórmula inicial).

Agora sobre a regra I$\exists$. Esta é, sem dúvida, a regra mais liberal das de quantificadores. Com ela, da informação de que uma constante tem uma característica, podemos concluir que alguém tem essa característica (por exemplo, a constante da qual derivamos). O que podemos falar sobre ela é um cuidado que não é sobre a regra em si, mas sobre a forma como usamos as regra de introdução e de eliminação de quantificadores. Como dito, estas regras são aplicadas a fórmulas, não a partes de fórmulas. Não podemos, pois, fazer o seguinte (considere Fx: x foi a garota fantástico; Lx: x é linda):

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | $Fl \to Ll$ | P | |
| 2 | $\exists x Fx \to Ll$ | I$\exists$, 1 | ERRO! |

Caso aceitássemos esta aplicação errada da regra, estaríamos concluindo, da premissa de que 'Se Lacraia foi a garota fantástico então Lacraia é linda', que 'Se alguém foi a garota fantástico então Lacraia é linda', o que é inválido. Uma aplicação correta da regra na linha dois forneceria $\exists x(Fx \to Lx)$.

Por último, a regra de eliminação do existencial. Vejamos o que podemos deduzir, se não respeitamos as regras. No presente exemplo, vamos escolher uma constante que está ocorrendo numa hipótese aberta (considere a notação: Px: x é um peixe, Fx: x é um felino, Cx: x é carnívoro):

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | $\exists x(Px \wedge Cx)$ | P | |
| 2 | $\exists x(Fx \wedge Cx)$ | P | |
| 3 | $Pa \wedge Ca$ | H / (Para E$\exists$) | |
| 4 | $Fa \wedge Ca$ | H / (Para E$\exists$ ???) | |
| 5 | $Pa$ | S, 3 | |
| 6 | $Fa$ | S, 4 | |
| 7 | $Pa \wedge Fa$ | 5,6, C | |
| 8 | $\exists x(Px \wedge Fx)$ | 7, I$\exists$ | |
| 9 | $\exists x(Px \wedge Fx)$ | 2,4-8, E$\exists$ | ERRADO! |
| 10 | $\exists x(Px \wedge Fx)$ | 1,3-9, E$\exists$ | |

Na linha 4 foi feita uma hipótese sem fundamento. Poderíamos fazê-la para outro proposito, não há problema nela. Mas para o proposito assinalado (Para E$\exists$ ???) é totalmente inadequada. O fato é que, na linha 9, a aplicação da regra falhou. Vamos examinar o porquê. A partir do momento que fizemos a hipótese da linha 4, já tornamos impossível a aplicação da E$\exists$, pois escolhemos uma constante (a constante $a$) que já estava numa hipótese aberta. Assim, 9 não é uma aplicação válida da regra, pois a constante $a$ escolhida ainda está ocorrendo numa hipótese aberta (a da linha 3). Note que, interpretando esta dedução errada, percebemos a que absurdo chegamos na conclusão. Da premissa de que alguns peixes são carnívoros ($\exists x(Px \wedge Cx)$) e, de outra, que alguns felinos são carnívoros ($\exists x(Fx \wedge Cx)$), concluímos (erroneamente) que alguns peixes são felinos ($\exists x(Px \wedge Fx)$).

## 4.6 Considerações Finais do capítulo

Fechamos, assim, mais um capítulo. Em questão de conteúdo,praticamente encerramos o que tínhamos para estudar. Para o leitor que leu atentamente e fez os exercícios (pelo menos a maioria deles), esperamos que esteja convencido de que seu raciocínio lógico e sua compreensão da lógica por trás dos argumentos tenha sido elevada notavelmente. Especialmente na matemática, a argumentação formal (processos formais de inferências) são essenciais para a aceitação das demonstrações. Há alguns séculos, com o advento do conceito de demonstração formal de Frege[12], não há mais espaço para qualquer tipo de inferência que requeira qualquer tipo de persuasão ou coisa do tipo. E, em enorme escala, a lógica está impregnada na matemática, em seus enunciados e definições. Uma mistura de lógica com matemática dá fruto ao que se chama, comumente, de lógica-matemática. E este tipo de lógica, para ser bem compreendido, requer um estudo orientado para a parte mais pura da lógica (já que a parte pura da matemática, o estudante tem um contato maior).

Na próxima seção, faremos aplicações do método da dedução natural em demonstrações matemáticas (sinta-se incentivado a aplicar os tablôs também). Nosso foco será a Teoria dos Conjuntos, mas também sobrevoaremos outras disciplinas importantes da matemática.

[12]Gottlob Frege (1848-1925) foi um matemático e lógico (além de filósofo) alemão. Seus estudos inovaram ao introduzir o conceito de demonstração formal, que hoje conhecemos e realizamos amplamente nas teorias axiomáticas. Ao leitor curioso, recomendamos fortemente a leitura de REFERENCIAR.

# Capítulo 5

# DEDUÇÃO NATURAL APLICADA A SISTEMAS AXIOMÁTICOS

Nesta seção, falaremos sobre sistemas axiomáticos, bem como aplicaremos nossa estratégia de dedução natural a algumas disciplinas da matemática. Porém, como o estudante perceberá, a aplicação que faremos não esgota (longe disso) as disciplinas às quais o método é aplicável. Como veremos, todo e qualquer sistema axiomático pode ter suas demonstrações realizadas com o procedimento da dedução natural (claro, com uma adaptação aqui, outra ali). Mas, antes de começarmos, vale falar um pouco do que são sistemas axiomáticos, e da história deles.

## 5.1 Axiomatização e formalização

Tudo começou com a matemática, mais especificadamente com a geometria, há mais de 4500 anos. Os povos antigos do Egito usavam o método de "medição da terra" para demarcar terras cujas marcações haviam sido apagadas pela cheia do Rio Nilo. Mas esta geometria era muito diferente das que temos hoje. Não havia nenhum caráter formal dessas medições, nem havia conjunto amplo de informações essenciais além de fatos básicos como "a linha divide terra em duas partes", mas nada formalizado. O foco do conhecimento era a aplicação.

A história da geometria começa a mudar com o filósofo que foi, possivelmente, o introdutor da geometria na Grécia, Tales de Mileto, mais ou menos no século VI a.C. Com Tales, surgiram os primeiros resquícios formais de um sistema geométrico. Haviam muitas informações essenciais, verdades geométricas comprovadas, e cada vez se descobria mais. Não só conhecimentos aplicados (ou aplicáveis), mas também se desenvolvia conhecimento abstrato. Na Grécia antiga realizavam-se as primeiras demonstrações de verdades geométricas, como o teorema de Pitágoras. A geometria passa a, cada vez mais, acumular teoremas demonstrados. Sabia-se muito bem que, de sentenças verdadeiras, poderíamos extrair outras sentenças ainda verdadeiras.

Tudo vai muito bem, não? Não. O problema das demonstrações até então realizadas era o seguinte. Suponha que haja uma sentença $\alpha$ demonstrada pelo conjunto de sentenças $\beta, \beta_1, \beta_2, \beta_3, ..., \beta_n$. A verdade de $\alpha$ é garantida pela verdade de cada sentença $\beta$. Mas como verificar a verdade de, por exemplo, $\beta_2$? Ora, a sentença beta dois foi demonstrada pelo conjunto de sentenças $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_n$. E o que garantiu a verdade das sentenças $\gamma$? Dessa forma, ou regredimos ao infinito, ou entramos num círculo vicioso, isto é, temos sentenças que se demonstram. Um outro grande problema era a quantidade de fatos que eram aceitos pela "intuição intelectual" simplesmente, sem uma demonstração. Os vários fatos que os filósofos consideravam como intuitivamente verdadeiros eram rapidamente adicionados ao estoque de sentenças verdadeiras. Esse ato muitas vezes gerava erros graves, obrigando os filósofos a investigar onde a intuição falhou.

O problema tem uma solução (ou quase) com Euclides, em meados do século III a.C., em sua obra prima *Os Elementos*. A ideia de Euclides era reduzir o máximo possível a quantidade de sentenças aceitas intuitivamente sem demonstrações, bem como de termos aceitos sem definição, entendidos intuitivamente. Algumas poucas sentenças (as mais intuitivamente evidentes) aceitas sem demonstração serviriam de base para a demonstração de todas as outras. Estas sentenças formaram um pequeno conjunto de sentenças *auto-evidentes*, e foram chamadas de *axiomas e postulados*. Dessa forma, para toda sentença verdadeira da geometria, ou ela era um axioma ou um postulado, ou ela pode ser concluída a partir deles através da argumentação do geômetra. Da mesma forma, alguns pouco termos foram aceitos sem definição (os chamados *termos primitivos*), e, a partir destes, todos os demais termos seriam definidos. O método axiomático de Euclides permaneceu praticamente inalterado durante mais de 2000 anos, e ainda hoje é utilizado. Na verdade, nesse período, este método se quer foi questionado! Porém, como nem tudo são flores, o método axiomático de Euclides simplesmente não era suficiente para garantir a verdade de todas as sentenças afirmadas. O fato é que, apesar da exigência de demonstrações, o processo de argumentação merecia atenção. Muitas destas demonstrações usavam argumentos intuitivos, alguns até duvidáveis. O processo de inferência utilizado carecia de formalismo. Uma demonstração consistia em um processo psicológico que o intelectual realizava a fim de convencer outras pessoas da verdade das sentenças. O que se exigia no processo era apenas que o argumento seja intuitivamente convincente.

Agora, sim. O problema tem uma solução no século XX, com a noção de *demonstração formal* de Frege. Não havia mais processo psicológico envolvido (falo de qualquer tipo de persuasão ou qualquer coisa do tipo). A noção de Frege possibilitou aos sistemas axiomáticos tornarem-se *sistemas formais*. Entra aí todas a formalização que viemos estudando, incluindo as regras de inferência. A noção de Frege evidenciou a necessidade de estabelecer regras sintáticas formais para obtenção de sentenças verdadeiras a partir das sentenças primitivas, bem como de obter novas regras sintáticas, a partir de algumas poucas tomadas como válidas *a priori*.

As características de um sistema formais são bem definidas. Seus componentes básicos são os quatro seguintes:

1. Um sistema formal $\Gamma$ deve ter um *alfabeto*, que deverá conter todos os caracteres utilizados na linguagem a ser formalizada.

2. Um sistema formal $\Gamma$ deve conter um conjunto de *regras de formação*, que permitirão decidir se uma sequência de caracteres da linguagem forma uma sentença dela.

3. Um sistema formal $\Gamma$ deve conter um conjunto de *axiomas*, isto é, um conjunto de sentenças bem formadas aceitas (afirmadas) sem demonstração.

4. Um sistema formal $\Gamma$ deve conter um conjunto de *regras de transformação*, que permitirão obter (derivar) novas sentenças a partir dos axiomas ou de sentenças já obtidas anteriormente.

Obviamente, o CQC é um sistema formal. Na próxima seção, o utilizaremos para realizar demonstrações em algumas disciplinas matemáticas, utilizando o método da dedução natural. Claro que, em cada disciplina destas, o método da dedução pois poderá sofrer algumas alterações. Não obstante, o aspecto geral será praticamente idêntico ao que viemos estudando.

## 5.2 Teoria dos Conjuntos

Supomos que o leitor já tenha afinidade, ou ao menos familiaridade, com o que há de mais elementar na teoria dos conjuntos. Faremos uma revisão rápida dos principais conceitos e operações, para então começarmos nossas demonstrações. Mais uma observação. Para simplificar a notação, as relações e operações entre conjuntos que veremos terão precedência sintática (precederão no cálculo) apenas dos operadores condicional (bem como implicação lógica) e bi-condicional (bem como equivalência lógica). Ou seja, quando operarmos condição, não precisamos de parênteses. Quando operarmos com conjunções e disjunções, separaremos por parênteses. E, como antes, a negação precede tudo, isto é, quando operarmos com negação, os parênteses são desnecessários.

**Uma observação importante**. Em muitas definições e enunciados de propriedades que veremos, por vezes trabalharemos com variáveis livres. Por padrão, considere que o fecho dessas variáveis é *sempre* o fecho universal.

### 5.2.1 Nota inicial

Sabemos trabalhar com os quantificadores sobre variáveis. Vimos, no CQC, como dizer de todos os indivíduos, bem como de alguns, que eles têm uma certa propriedade.

Antes de trabalharmos com as disciplinas matemáticas que trataremos, vale adiantar uma das primeiras adaptações que a nossa forma de trabalhar, até agora, sofrerá. Para exemplificar, tome os seguintes predicados: $Cx$: $x$ é um cachorro; $Mx$: $x$ morde forte; e $Lx$: $x$ late alto. A frase 'Todo cachorro morde forte e late alto' pode ser formalizada como:

$$\forall x(Cx \to Mx \wedge Lx)$$

Como ficaria esta fórmula, se disséssemos que a variável x só será usada para cachorros? Sem dúvida, podemos eliminar $Cx$ e ficar com $\forall x(Mx \wedge Lx)$. Já fizemos algo parecido quando dissemos que letra maiúsculas são para predicados e as minúsculas para sujeitos, de forma que não precisaríamos dizer, na fórmula, que $C$ é um predicado, ou que $x$ é um sujeito. Na verdade, estas afirmações nem pertencem à linguagem em questão, mas à metalinguagem.

Nas teorias matemáticas, por exemplo, na teoria dos conjuntos, diremos que as letras maiúsculas A, B, C, etc. são exclusivas para conjuntos, e que as variáveis x, y, z, etc. são exclusivas para elementos. Os predicados da teoria dos conjuntos (que são bem definidos e todos binários) serão diferentes. Para eles, surgirão símbolos como '$=, \in, \subset$, etc.', que são predicados, mas que serão utilizados de uma forma um pouco diferente: o símbolo se localizará entre os sujeitos. Por exemplo, ao invés de escrever $= AB$ ou $= xy$, escreveremos $A = B$ e $x = y$. A respeito das quantificações, as disciplinas separarão certas variáveis para certos entes, e estas poderão ser quantificados. Ou seja, poderá ocorrer, mesmo que estranho para nós, a quantificação $\forall X$. Neste caso, não precisamos de um predicado para afirmar que $X$ é um conjunto, pois já está implícito na linguagem da teoria.

### 5.2.2 Conceitos básicos

Na linguagem da teoria dos conjuntos, utilizaremos os símbolos da linguagem do CQC, acrescentando os seguintes símbolos (e, talvez, alguns outros):

$$\in, \notin, =, \subset, \supset, \subsetneq, \supsetneq, \cup, \cap, -, \complement, \times$$

Como já comentamos, um dos conceitos matemáticos que não apresentam uma definição satisfatória é o conceito de conjunto. Entenda *conjunto* como uma coleção de elementos. Para conjuntos, reservaremos as letras maiúsculas: $A, B, ..., X, Y, ...$[1] Para elementos, as letras minúsculas: $a, b, ..., x, y, ...$. Qualquer caractere admitirá índices.

Quando falamos sobre fórmula de variáveis livres, comentamos sua importância para a teoria dos conjuntos. Vale adiantar que, em definições e demonstrações posteriores, por vezes olharemos para fórmulas de variáveis livres que descrevem a relação de pertinência de

[1]Não precisamos mais utilizar variáveis para predicados, pois os predicados (na verdade, as relações) da teoria dos conjuntos são finitos e, de certa forma, poucos. É nesse sentido que dizemos que são bem definidos.

um elemento qualquer em um conjunto como uma "proposição" (lembrando que esse tipo de fórmula não é uma proposição). Dizendo mais corretamente, trabalharemos com este tipo de fórmula como trabalhávamos com uma constante proposicional. Embora $x \in X$ seja uma fórmula de variáveis livres, na maioria das demonstrações, teremos que $x \in X \Leftrightarrow P$, e calcularemos $x \in X$ como se fosse simplesmente $P$, embora não substituamos $x \in X$ por $P$ na demonstração. Por exemplo, da informação de que $x \in X \to y \in Y$ e que $x \in X$, podemos aplicar Modus Ponens e obter $y \in Y$.

Escrevemos os conjuntos colocando seus elementos entre chaves e separados por vírgulas. E, para facilitar nosso trabalho, podemos dar letras maiúsculas a eles. Por exemplo, o conjunto $F_1$ dos Dois Filhos de Francisco pode ser assim escrito: $F_1 = \{\text{Zézé}, \text{Luciano}\}$. O conjunto unitário $F_2$ dos filhos da Xuxa podem ser assim escritos: $F_2 = \{\text{Sacha}\}$. O conjunto infinito $P$ das pessoas pobres do Brasil pode ser assim escrito: $P = \{$Filha do Seu Zé, Seu Zé, Cleide, Márcio da Silva, Eu, ..., Você, ...$\}$. O conjunto vazio $H$ dos políticos brasileiros honestos pode ser escrito de duas maneiras, $H = \emptyset$ ou $H = \{\}$. Da mesma forma, podemos escrever o conjunto $I$ dos bons investimentos do dinheiro público brasileiro como $I = \emptyset$.

Pois bem, comecemos com a relação que considero a mais básica da teoria dos conjuntos: a *relação de pertinência*. Quando um elemento $x$ pertence a um conjunto $X$, ou seja, quando $x$ é um dos elementos de $X$, escrevemos $x \in X$. Quando não, escrevemos $x \notin X$. Note que dizer que um elemento não pertence a um conjunto, é negar que ele pertence. Ou seja, $\neg(x \in X)$ é o mesmo que $x \notin X$. Por exemplo:

$$a \in A$$
$$\text{Sarney} \notin H$$
$$\text{Sasha} \in F_2$$
$$\text{Eu} \notin F_1$$
$$\text{Copa de 2014} \notin I$$

A relação de pertinência é uma relação que se dá entre elementos de conjuntos e conjuntos.

A segunda relação básica é a *igualdade* de conjuntos. Dizemos que dois conjuntos $X$ e $Y$ são iguais se satisfazerem a seguinte fórmula (utilizamos '$\Leftrightarrow$' para evidenciar a substituição que faremos ao aplicar a definição):

$$\forall X \forall Y (X = Y \Leftrightarrow (x \in X \leftrightarrow x \in Y))$$

Interpretando a definição, temos que: dois conjuntos são iguais se, e somente se, possuem os mesmos elementos. Vale lembrar que se dois conjuntos são iguais, então eles são o mesmo conjunto, de modo que 'igual' quer dizer 'o mesmo'.

A terceira relação básica é a *relação de inclusão*. Quando todos os elementos de um conjunto $X$ são, também, elementos de um conjunto $Y$, dizemos que $Y$ contém $X$, ou que $Y$ é superconjunto de $X$, e escrevemos $Y \supset X$. Da mesma forma, podemos dizer que $X$

está contido em $Y$, ou que $X$ é subconjunto de $Y$, e escrever $X \subset Y$. Quando dizemos que $X$ está contido em $Y$, estamos dizendo que todo elemento de $X$ é elemento de $Y$, algo parecido com 'Todo $X$ é $Y$' (universal afirmativa), de forma que a definição de $X \subset Y$ é a seguinte:

$$\forall X \forall Y (X \subset Y \rightarrow \forall x (x \in X \rightarrow x \in Y))$$

Como $X \subset Y \Leftrightarrow Y \supset X$, ambos apresentam a mesma definição (obs.: a relação de inclusão se dá entre conjuntos). Faremos uma adaptação na definição de inclusão. Libertaremos a variável $x$, de forma a trabalhar com essa variável livre. Utilizaremos '$\Rightarrow$' para evidenciar a substituição que será feita ao aplicarmos a definição. Ficamos, portanto, com a seguinte definição de inclusão:

$$\forall X \forall Y (X \subset Y \Rightarrow (x \in X \rightarrow x \in Y))$$

Não há problema, pois trataremos $x \in A$ como $P$, lembra? Além do mais, $x \notin A$ é o mesmo que $\neg P$. É muito importante recordar isso, pois, como $(x \in A) \wedge (x \notin A)$ é o mesmo que $P \wedge \neg P$, e este é uma contradição, concluímos que aquele também o é. É importante ressaltar que a definição é aplicada quando temos, por exemplo, $D \subset H$, de modo a obter $x \in D \rightarrow x \in H$. Todas as definições são aplicadas de forma análoga.
**Exercícios:** (1) Qual fórmula deve ser satisfeita para que se possa concluir que um conjunto $X$ não é subconjunto de um conjunto $Y$? (2) Mostre que o conjunto vazio é subconjunto de todos os conjuntos.

A relação de inclusão verifica as três seguintes propriedades:

- Reflexividade: $\forall X (X \subset X)$
- Antissimetricidade: $\forall X \forall Y ((X \subset Y) \wedge (Y \subset X) \Leftrightarrow X = Y)$
- Transitividade: $\forall X \forall Y \forall Z ((X \subset Y) \wedge (Y \subset Z) \Rightarrow X \subset Z)$

Podemos unir as informações $A \subset B$ e $A \neq B$ numa mesma notação escrevendo $A \subsetneq B$ (ou $B \supsetneq A$). Neste caso, dizemos que $A$ é *subconjunto próprio* de $B$.

### 5.2.3 Conjunto vazio

O conjunto vazio é definido como aquele que não contém elementos. Isto é, por definição de conjunto vazio, tem-se que:

$$\forall x (x \notin \emptyset)$$

Assim como fizemos antes, libertaremos a variável da definição para utilizá-la assim: $x \notin \emptyset$. Lembrando $x \notin \emptyset$ é o mesmo que $\neg(x \in \emptyset)$. Esta última forma é mais útil na demonstração. Lembrando que podemos "chamar" (acrescentar em uma linha) essa definição a qualquer momento em uma demonstração.

Outra propriedade relacionada ao conjunto vazio muito útil nas demonstrações é a *Determinação do Conjunto Vazio*. Essa propriedade segue da definição de igualdade de conjuntos, e diz que, se qualquer conjunto tiver os mesmos elementos do conjunto vazio (isto é, nenhum), então esse conjunto *é* o conjunto vazio:

$$\forall X(\forall x(x \notin X) \leftrightarrow X = \emptyset)$$

Como sempre, libertaremos a variável $x$ e trabalharemos com a definição da seguinte maneira:

$$\forall X(x \notin X \Leftrightarrow X = \emptyset)$$

Ao utilizar esta propriedade numa demonstração, abreviaremos por *Det.* $\emptyset$. Ao utilizar a definição de conjunto vazio, abreviaremos por Def. $\emptyset$.

### 5.2.4 Primeiras demonstrações com dedução natural

Começaremos a utilizar a dedução natural para demonstrar algumas propriedades dos conjuntos nesta seção. O leitor não terá dificuldade em aprender como fazer, pois já conhecemos muito bem a dedução natural usual, que é praticamente igual. Portanto, alguns poucos comentários serão feitos. Vamos começar demonstrando as três propriedades do fim da seção anterior, começando pela reflexividade. Ao aplicar uma definição, justificaremos com uma abreviação inteligível. O estudante pode escolher como abreviar à sua maneira (desde que não haja ambiguidade), ou então não abreviar. A demonstração se seguirá por absurdo:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | $\quad \neg(A \subset A)$ | H / ? CTR | |
| 2 | $\quad \neg(x \in A \to x \in A)$ | Def. $\subset$, 1 | |
| 3 | $\quad \neg(\neg(x \in A) \vee (x \in A))$ | Def. $\to$, 2 | |
| 4 | $\quad \neg\neg(x \in A) \wedge \neg(x \in A)$ | DM, 3 | |
| 5 | $A \subset A$ | CTR, 1-4 | (Passo resumido) |
| 6 | $\forall X(X \subset X)$ | I$\forall$, 5 | |

Simples, não? Note que abreviamos a dupla negação na linha 5. Podemos fazer isso sempre que a negação da hipótese nos fornece uma dupla negação que não queremos. No entanto, não esqueça que a regra permite negar a hipótese, o que retira negações é a regra DN. Na dúvida, utilize a regra corretamente. A demonstração se seguiu simples e elegante. Seu professor de análise vai adorar uma dessas na prova!

A propriedade antissimétrica é facilmente demonstrada pela definição de igualdade de funções, embora a demonstração seja um pouco longa. A demonstração fica assim:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $(A \subset B) \wedge (B \subset A)$ | H / ? RPC |
| 2 | $A \subset B$ | S, 1 |
| 3 | $B \subset A$ | S, 1 |
| 4 | $x \in A \to x \in B$ | Def. $\subset$, 2 |
| 5 | $x \in B \to x \in A$ | Def. $\subset$, 3 |
| 6 | $x \in A \leftrightarrow x \in B$ | CB, 4,5 |
| 7 | $A = B$ | Def. $=$, 6 |
| 8 | $(A \subset B) \wedge (B \subset A) \to A = B$ | RPC, 1-7 |
| 9 | $A = B$ | H / ? RPC |
| 10 | $x \in A \leftrightarrow x \in B$ | Def. $=$,9 |
| 11 | $x \in A \to x \in B$ | BC, 10 |
| 12 | $x \in B \to x \in A$ | BC, 10 |
| 13 | $A \subset B$ | Def. $\subset$, 11 |
| 14 | $B \subset A$ | Def. $\subset$, 12 |
| 15 | $(A \subset B) \wedge (B \subset A)$ | C, 13,14 |
| 16 | $A = B \to (A \subset B) \wedge (B \subset A)$ | RPC, 9,15 |
| 17 | $(A \subset B) \wedge (B \subset A) \leftrightarrow A = B$ | CB, 8,16 |
| 18 | $\forall X \forall Y((X \subset Y) \wedge (Y \subset X) \Leftrightarrow X = Y)$ | I$\forall$, 17 (Passo resumido) |

Na linha 18 resumimos a aplicação da regra I$\forall$. O intuito é, quando evidente, reduzir o tamanho da demonstração. Faremos isso mais vezes. Porém, lembre-se que, assim como na eliminação, a regra estabelece a introdução de um quantificador de cada vez.

**Exercício:** Demonstre que vale a transitividade (3ª propriedade).

### 5.2.5 Operações com conjuntos I: União e Interseção

Chamamos de *reunião* (ou *união*) dos conjuntos $A$ e $B$ o conjunto formado pelos elementos de $A$ somados aos de $B$. Simbolizamos por $A \cup B$ (leia 'A união B'). Antes de definir união, permita-me fazer um comentário. Até agora vimos as relações que podem ocorrer entre conjuntos (inclusão e igualdade) e entre uma elemento e um conjunto (pertinência). Agora veremos algumas operações que podemos realizar entre conjuntos de modo a obter outros conjuntos. Embora, do ponto de vista lógico, não exista muita diferença, pois ambas, relações e operações, serão definidas como fórmulas, no contexto matemático a coisa muda um pouco. Assim como olhamos para, por exemplo, $\alpha v$ como um vetor (que, sim, é obtido pela multiplicação de um escalar $\alpha$ com um vetor $v$), olhamos para $A \cup B$ como um conjunto (que, sim, foi obtido pela união de um conjunto $A$ com um conjunto $B$). Digo isso por que ter $A \subset (B \cup C)$ é como ter $A \subset D$. É como se '$\subset$'

precedesse '$\cup$'. Mas é mais profundo: $A \subset B$ é uma sentença declarativa da teoria dos conjuntos, $A \cup B$ é um termo. Não haverá, pois, ambiguidade ao escrever $A \subset B \cup C$, pois estamos afirmando que o conjunto $A$ está contido no conjunto $B \cup C$. Agora, sim, a definição de reunião de conjuntos:

$$\forall X \forall Y (x \in X \cup Y \Leftrightarrow (x \in X) \vee (x \in Y))$$

Ou seja, se o elemento $x$ pertence a, no mínimo, um do conjuntos envolvidos, então ele pertence à união.

Chamamos de *interseção* dos conjuntos $A$ e $B$, e escrevemos $A \cap B$, o conjunto formado pelos elementos que são comuns a $A$ e a $B$, isto é, que estão tanto em $A$ quanto em $B$. A assim definida a interseção de conjuntos:

$$\forall X \forall Y (x \in X \cap Y \Leftrightarrow (x \in X) \wedge (x \in Y))$$

Ou seja, um elemento $x$ está na interseção de dois conjuntos $A$ e $B$ se satisfaz a conjunção $(x \in A) \wedge (x \in B)$. Um comentário a respeito das demonstrações. Quando quisermos demonstrar uma igualdade de conjuntos, devemos sempre obter o que a definição de igualdade requer: uma bi-implicação dizendo que um elemento está em um se, e somente se, está em outro. E, como sabemos, para obter uma bi-implicação, devemos obter primeiro duas implicações "em sentidos opostos" e, então, usar CB.

Vamos, agora, demonstrar algumas propriedades acerca da união e interseção de conjuntos. Começando com a propriedade

$$\forall X (X \cup \emptyset = X)$$

Para essa igualdade, devemos obter a bi-implicação requerida pela definição de igualdade. Como sempre, começaremos fazendo a hipótese para um conjunto qualquer e quantificar depois.

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $x \in A \cup \emptyset$ | H / ? RPC |
| 2 | $x \in A \vee x \in \emptyset$ | Def. $\cup$, 1 |
| 3 | $\neg(x \in \emptyset)$ | Def. $\emptyset$ |
| 4 | $x \in A$ | SD, 2,3 |
| 5 | $x \in A \cup \emptyset \rightarrow x \in A$ | RPC, 1,5 |
| 6 | $x \in A$ | H / ? RPC |
| 7 | $x \in A \vee x \in \emptyset$ | E, 6 |
| 8 | $x \in A \cup \emptyset$ | Def. $\cup$, 7 |
| 9 | $x \in A \rightarrow x \in A \cup \emptyset$ | RPC, 6,8 |
| 10 | $x \in A \cup \emptyset \leftrightarrow x \in A$ | CB, 5,9 |
| 11 | $A \cup \emptyset = A$ | Def. =, 10 |
| 12 | $\forall X(X \cup \emptyset = X)$ | I$\forall$, 11 |

**Exercício:** Mostre que $\forall X(X \cap \emptyset = \emptyset)$. (Dica: use Det. $\emptyset$.)

A próxima propriedade que vamos demonstrar é a seguinte:

$$\forall X(X \cap X = X)$$

Demonstração:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $x \in A \cap A$ | H / ? RPC |
| 2 | $x \in A \wedge x \in A$ | Def. $\cap$, 1 |
| 3 | $x \in A$ | S, 2 |
| 4 | $x \in A \cap A \rightarrow x \in A$ | RPC, 1-3 |
| 5 | $x \in A$ | H / ? RPC |
| 6 | $\neg(x \in A)$ | H / ? CTR |
| 7 | $x \in A \wedge \neg(x \in A)$ | C, 5,6 |
| 8 | $x \in A$ | CTR, 6-7 |
| 9 | $x \in A \wedge x \in A$ | C, 5,8 |
| 10 | $x \in A \cap A$ | Def. $\cap$, 9 |
| 11 | $x \in A \rightarrow x \in A \cap A$ | RPC, 5-10 |
| 12 | $x \in A \cap A \leftrightarrow x \in A$ | CB, 4,11 |
| 13 | $A \cap A = A$ | Def. =, 12 |
| 14 | $\forall X(X \cap X = X)$ | I$\forall$, 13 |

A ideia da hipótese da linha 6 foi obter mais um $x \in A$ para conjugar com o que já tínhamos. O intervalo 5-8 é a demonstração do que alguns autores adotam como uma regra de inferência chamada de *Repetição*. Temos até uma tautologia na lista da seção 3.2.3, a *idempotência da conjunção*, que pode garantir o que queríamos na demonstração.

**Exercício:** Mostre que $\forall X(X \cup X = X)$

Na próxima demonstração, utilizaremos a tautologia *comutatividade da disjunção* que consta na lista da seção 3.2.3. Justificaremos com "*Comut.* $\vee$".

**Exercícios:** (1) Demonstre, via dedução natural, a comutatividade da disjunção. (Dica: suponha que não vale e encontre um absurdo.) (2) Demonstre, via dedução natural, a comutatividade da conjunção. (Dica: separe e conjugue na outra posição.)

Propriedade:

$$\forall X \forall Y(X \cup Y = Y \cup X)$$

Demonstração:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\quad x \in A \cup B$ | H / ? RPC |
| 2 | $\quad x \in A \vee x \in B$ | Def. $\cup$, 1 |
| 3 | $\quad x \in B \vee x \in A$ | Comut. $\vee$, 2 |
| 4 | $\quad x \in B \cup A$ | Def. $\cup$, 3 |
| 5 | $x \in A \cup B \to x \in B \cup A$ | RPC, 1-4 |
| 6 | $\quad x \in B \cup A$ | H / ? RPC |
| 7 | $\quad x \in B \vee x \in A$ | Def. $\cup$, 6 |
| 8 | $\quad x \in A \vee x \in B$ | Comut. $\vee$, 7 |
| 9 | $\quad x \in A \cup B$ | Def. $\cup$, 8 |
| 10 | $x \in B \cup A \to x \in A \cup B$ | RPC, 6-7 |
| 11 | $x \in A \cup B \leftrightarrow x \in B \cup A$ | CB, 5,10 |
| 12 | $A \cup B = B \cup A$ | Def. $\cup$, 11 |
| 13 | $\forall X \forall Y(X \cup Y = Y \cup X)$ | I$\forall$, 12 (Passo resumido) |

**Exercício:** Mostre que $\forall X \forall Y(X \cap Y = Y \cap X)$.

Na próxima demonstração, utilizaremos a tautologia *associatividade da conjunção* que consta na lista da seção 3.2.3. Justificaremos com "*Assoc.* $\wedge$".

**Exercícios:** (1) Demonstre, via dedução natural, a associatividade da conjunção. (Dica: separe e conjugue na ordem coveniente.) (2) Demonstre, via dedução natural, a associatividade da disjunção. (Dica: suponha que não vale e encontre um absurdo.)

Propriedade:

$$\forall X \forall Y \forall Z((X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z))$$

Demonstração:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $x \in (A \cap B) \cap C$ | H / ? RPC |
| 2 | $x \in A \cap B \wedge x \in C$ | Def. $\cap$, 1 |
| 3 | $(x \in A \wedge x \in B) \wedge x \in C$ | Def. $\cap$, 2 |
| 4 | $x \in A \wedge (x \in B \wedge x \in C)$ | Assoc. $\wedge$, 3 |
| 5 | $x \in A \wedge x \in B \cap C$ | Def. $\cap$, 4 |
| 6 | $x \in A \cap (B \cap C)$ | Def. $\cap$, 5 |
| 7 | $x \in (A \cap B) \cap C \to x \in A \cap (B \cap C)$ | RPC, 1-5 |
| 8 | $x \in A \cap (B \cap C)$ | H / ? RPC |
| 9 | $x \in A \wedge x \in B \cap C$ | Def. $\cap$, 8 |
| 10 | $x \in A \wedge (x \in B \wedge x \in C)$ | Def. $\cap$, 9 |
| 11 | $(x \in A \wedge x \in B) \wedge x \in C$ | Assoc. $\wedge$, 10 |
| 12 | $x \in A \cap B \wedge x \in C$ | Def. $\cap$, 11 |
| 13 | $x \in (A \cap B) \cap C$ | Def. $\cap$, 12 |
| 14 | $x \in A \cap (B \cap C) \to x \in A \cap (B \cap C)$ | RPC, 8-13 |
| 15 | $x \in (A \cap B) \cap C \leftrightarrow x \in A \cap (B \cap C)$ | CB, 7,14 |
| 16 | $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ | Def. $=$, 15 |
| 17 | $\forall X \forall Y \forall Z((X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z))$ | I$\forall$, 16 (Passo resumido) |

**Exercício:** Mostre que $\forall X \forall Y \forall Z((X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z))$.

A demonstração da próxima propriedade é, de certa forma, grande. Porém, embora grande, é altamente simples. Isso é muito comum com o método da dedução natural. As demonstrações são transparentes de mais para serem complicadas. A propriedade é a seguinte:

$$\forall X \forall Y (X \cup Y = X \Leftrightarrow Y \subset X)$$

Precisamos obter a implicação nos dois sentidos e usar CB. Demonstração:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $A \cup B = A$ | H / ? RPC |
| 2 | $\quad \neg(B \subset A)$ | H / ? CTR |
| 3 | $\quad x \in A \cup B \leftrightarrow x \in A$ | Def. =, 1 |
| 4 | $\quad x \in A \cup B \rightarrow x \in A$ | BC, 3 |
| 5 | $\quad \neg(x \in B \rightarrow x \in A)$ | Def. $\subset$, 2 |
| 6 | $\quad \neg(\neg(x \in B) \vee x \in A)$ | Def. $\rightarrow$, 5 |
| 7 | $\quad \neg\neg(x \in B) \wedge \neg x \in A$ | DM, 6 |
| 8 | $\quad \neg\neg(x \in B)$ | S, 7 |
| 9 | $\quad x \in B$ | DN, 8 |
| 10 | $\quad \neg(x \in A)$ | S, 7 |
| 11 | $\quad x \in A \vee x \in B$ | E, 9 |
| 12 | $\quad x \in A \cup B$ | Def. $\cup$, 11 |
| 13 | $\quad x \in A$ | MP, 4,12 |
| 14 | $\quad x \in A \wedge \neg(x \in A)$ | C, 10,13 |
| 15 | $B \subset A$ | CTR, 2-14 |
| 16 | $A \cup B = A \rightarrow B \subset A$ | RPC, 1,15 |
| 17 | $B \subset A$ | H / ? RPC |
| 18 | $\quad x \in A \cup B$ | H / ? RPC |
| 19 | $\quad x \in B \rightarrow x \in A$ | Def. $\subset$, 17 |
| 20 | $\quad x \in A \vee x \in B$ | Def. $\cup$, 18 |
| 21 | $\quad\quad \neg(x \in A)$ | H / ? CTR |
| 22 | $\quad\quad x \in B$ | SD, 20,21 |
| 23 | $\quad\quad \neg(x \in B)$ | MT, 19,21 |
| 24 | $\quad\quad x \in B \wedge \neg(x \in B)$ | C, 22,23 |
| 25 | $\quad x \in A$ | CTR, 21,24 |
| 26 | $x \in A \cup B \rightarrow x \in A$ | RPC, 18,25 |
| 27 | $\quad x \in A$ | H / ? RPC |
| 28 | $\quad x \in A \vee x \in B$ | E, 27 |
| 29 | $\quad x \in A \cup B$ | Def. $\cup$, 28 |
| 30 | $x \in A \rightarrow x \in A \cup B$ | RPC, 27-29 |
| 31 | $x \in A \cup B \leftrightarrow x \in A$ | CB, 26,30 |
| 32 | $A \cup B = A$ | Def. =, 31 |
| 33 | $B \subset A \rightarrow A \cup B = A$ | RPC, 17,32 |
| 34 | $A \cup B = A \leftrightarrow B \subset A$ | CB, 16,33 |
| 35 | $\forall X \forall Y (X \cup Y = X \Leftrightarrow Y \subset X)$ | I$\forall$, 34 (Passo...) |

**Exercício:** Mostre que $\forall X \forall Y (X \cap Y = X \Leftrightarrow X \subset Y)$.

Propriedade:

$$\forall X_1 \forall Y_1 \forall X_2 \forall Y_2 ((X_1 \subset Y_1) \wedge (X_2 \subset Y_2) \Rightarrow X_1 \cap X_2 \subset Y_1 \cap Y_2)$$

Demonstração:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $A_1 \subset B_1 \land A_2 \subset B_2$ | H / ? RPC |
| 2 | $A_1 \subset B_1$ | S, 1 |
| 3 | $A_2 \subset B_2$ | S, 1 |
| 4 | $x \in A_1 \to x \in B_1$ | Def. $\subset$, 2 |
| 5 | $x \in A_2 \to x \in B_2$ | Def. $\subset$, 3 |
| 6 | $x \in A_1 \cap A_2$ | H / ? RPC |
| 7 | $x \in A_1 \land x \in A_2$ | Def. $\cap$, 6 |
| 8 | $x \in A_1$ | S, 7 |
| 9 | $x \in B_1$ | MP, 4,8 |
| 10 | $x \in A_2$ | S, 7 |
| 11 | $x \in B_2$ | MP, 5,10 |
| 12 | $x \in B_1 \land x \in B_2$ | C, 10,11 |
| 13 | $x \in B_1 \cap B_2$ | Def. $\cap$, 12 |
| 14 | $x \in A_1 \cap A_2 \to x \in B_1 \cap B_2$ | RPC, 6-13 |
| 15 | $A_1 \cap A_2 \subset B_1 \cap B_2$ | Def. $\subset$, 14 |
| 16 | $A_1 \subset B_1 \land A_2 \subset B_2 \to A_1 \cap A_2 \subset B_1 \cap B_2$ | RPC, 1,15 |
| 17 | $\forall X_1 \forall Y_1 \forall X_2 \forall Y_2((X_1 \subset Y_1) \land (X_2 \subset Y_2) \Rightarrow X_1 \cap X_2 \subset Y_1 \cap Y_2)$ | I$\forall$, 16 (Passo...) |

**Exercício:** Mostre que $\forall X_1 \forall Y_1 \forall X_2 \forall Y_2((X_1 \subset Y_1) \land (X_2 \subset Y_2) \Rightarrow X_1 \cup X_2 \subset Y_1 \cup Y_2)$.

A próxima propriedade se valerá da tautologia distributividade da disjunção que consta na lista da seção 3.2.3.

**Exercício:** Demonstre, via dedução natural, (1) a distributividade da disjunção e (2) a distributividade da conjunção.

Propriedade:

$$\forall X \forall Y \forall Z(X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z))$$

Demonstração:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $x \in A \cup (B \cap C)$ | H / ? RPC |
| 2 | $x \in A \vee x \in B \cap C$ | Def. $\cup$, 1 |
| 3 | $x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C)$ | Def. $\cap$, 2 |
| 4 | $(x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C)$ | Dist. $\vee$, 3 |
| 5 | $x \in A \cup B \wedge x \in A \cup C$ | Def. $\cup$, 5 (...) |
| 6 | $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ | Def. $\cap$, 5 |
| 7 | $x \in A \cup (B \cap C) \to x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ | RPC, 1-6 |
| 8 | $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ | H / ? RPC |
| 9 | $x \in A \cup B \wedge x \in A \cup C$ | Def. $\cap$, 8 |
| 10 | $(x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C)$ | Def. $\cup$, 9 |
| 11 | $x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C)$ | Dist. $\vee$, 10 |
| 12 | $x \in A \vee x \in B \cap C$ | Def. $\cap$, 11 |
| 13 | $x \in A \cup (B \cap C)$ | Def. $\cup$, 12 |
| 14 | $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) \to x \in A \cup (B \cap C)$ | RPC, 8-13 |
| 15 | $x \in A \cup (B \cap C) \leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ | CB, 7,14 |
| 16 | $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ | Def. $=$, 15 |
| 17 | $\forall X \forall Y \forall Z (X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z))$ | I$\forall$, 16 (...) |

**Exercício:** Mostre que $\forall X \forall Y \forall Z (X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z))$.

### 5.2.6 Operações com conjuntos II: Diferença e Complementarismo

As próximas operações, na verdade, se tratam de uma mesma, apenas com duas formas de se escrever. A *diferença* entre os conjuntos $A$ e $B$, denotada por $A - B$, é o conjunto formado pelos elementos que estão em $A$, mas não em $B$. Definição:

$$\forall X \forall Y (x \in X - Y \Leftrightarrow x \in X \wedge x \notin Y)$$

Da mesma maneira, definimos como o *complementar* de $B$ em relação a $A$, denotado por $\complement_A B$, como sendo o conjunto formado pelos elementos que estão em $A$ mas não em $B$. Definição:

$$\forall X \forall Y (x \in \complement_X Y \Leftrightarrow x \in X \wedge x \notin Y)$$

Ou seja, é válida a seguinte equivalência:

$$\forall X \forall Y (x \in X - Y \Leftrightarrow x \in \complement_X Y)$$

que, pela definição de igualdade, nos fornece:

$$\forall X \forall Y (X - Y = \complement_X Y)$$

Admitindo a existência de um conjunto $U$ que contém todos os conjuntos dos quais estamos falando sobre, e, consequentemente, todos os elementos desses conjuntos, podemos definir o complementar de $B$ em relação a $U$, ou, simplesmente, complementar de $B$ ($\complement_U B$ é o mesmo que $\complement B$, que é o mesmo que $U - B$), como sendo o conjunto dos elementos que não pertencem a $B$. Definição:

$$\forall X (x \in \complement X \Leftrightarrow x \notin X)$$

Não existe um conjuntos de todos os conjuntos (paradoxo de Russel), mas podemos definir o conjunto U que comentamos acima assim:

$$\forall x (x \in U)$$

Ou melhor, simplificando:

$$x \in U$$

Assim como com o conjunto vazio, também teremos uma regra de determinação do conjunto $U$ (*Det. U*):

$$\forall X (\forall x (x \in X) \leftrightarrow X = U)$$

ou simplesmente

$$\forall X (x \in X \leftrightarrow X = U)$$

Vamos simplificar um pouco nossa forma de demonstração. Acrescentaremos à sintaxe da dedução natural a regra MD para passos reversíveis. Podemos formalizá-la assim:

**MD** (Mão Dupla)

$$
\begin{array}{r|l l}
 & \vdots & \\
m & \quad \underline{\alpha_1} & \text{H / ? MD} \\
 & \quad \alpha_2 & \text{Regra/definição reversível} \\
 & \quad \alpha_3 & \text{Regra/definição reversível} \\
 & \quad \vdots & \vdots \\
n & \quad \alpha_n & \text{Regra/definição reversível} \\
 & \alpha_1 \leftrightarrow \alpha_n & \text{MD, m-n}
\end{array}
$$

Ou seja, essa regra permite fazer uma espécie de *redução para bi-condicional*. Mas só vale se todas as regras de transformação ou definições utilizadas a partir da hipótese forem reversíveis, ou seja, forem equivalências lógicas. Para exemplificar o uso, vamos demonstrar que vale a seguinte igualdade:

$$\forall X \forall Y (X - Y = X \cap \complement Y)$$

Demonstração:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\quad x \in A - B$ | H / ? MD |
| 2 | $\quad x \in A \land x \notin B$ | Def. $-$, 1 |
| 3 | $\quad x \in A \land x \in \complement B$ | Def. $\complement$, 2 |
| 4 | $\quad x \in A \cap \complement B$ | Def. $\cap$, 3 |
| 5 | $x \in A - B \leftrightarrow x \in A \cap \complement B$ | MD, 1-4 |
| 6 | $A - B = A \cap \complement B$ | Def. $=$, 5 |
| 7 | $\forall X \forall Y (X - Y = X \cap \complement Y)$ | I$\forall$, 6 (Passo resumido) |

Note que poderíamos, sem problemas, realizar o caminho inverso, isto é, ao invés de fazer os passos 1-4, poderíamos fazer os passos 4-1[2]. Por isso a regra se chama MD (mão dupla). Obviamente, não é possível aplicar a regra se uma hipótese foi acrescentada em um desses passos, pois não é um ato reversível. Note que algumas demonstrações a respeito da união e interseção que fizemos na seção passada teriam a quantidade de passos quase reduzidos a metade.

**Exercício:** Refaça as demonstrações das propriedades da união e da interseção da seção anterior utilizando a nova regra. (Obs.: só faça as demonstrações em que é possível aplicar MD.)

Agora, vamos demonstrar algumas propriedades válidas a respeito da complementação.
Propriedade:

$$\forall X (\complement(\complement X) = X)$$

Demonstração:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\quad x \in \complement(\complement A)$ | H / ? MD |
| 2 | $\quad \neg(x \in \complement A)$ | Def. $\complement$, 1 |
| 3 | $\quad \neg\neg(x \in A)$ | Def. $\complement$, 2 |
| 4 | $\quad x \in A$ | DN, 3 |
| 5 | $x \in \complement(\complement A) \leftrightarrow x \in A$ | MD, 1-4 |
| 6 | $\complement(\complement A) = A$ | Def. $=$, 5 |
| 7 | $\forall X (\complement(\complement X) = X)$ | I$\forall$, 6 |

[2]Na verdade, iriamos fazer exatamente os passos 4-1 se fôssemos demonstrar como estávamos a fazer até agora.

Propriedade:

$$\forall X \forall Y (X \subset Y \Leftrightarrow \complement Y \subset \complement X)$$

Demonstração:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $A \subset B$ | H / ? MD |
| 2 | $x \in A \to x \in B$ | Def. $\subset$, 1 |
| 3 | $\neg(x \in B) \to \neg(x \in A)$ | CT, 2 |
| 4 | $x \in \complement B \to x \in \complement A$ | Def. $\complement$, 3 |
| 5 | $\complement B \subset \complement A$ | Def., $\subset$, 4 |
| 6 | $A \subset B \leftrightarrow \complement B \subset \complement A$ | MD, 1-4 |
| 7 | $\forall X \forall Y (X \subset Y \Leftrightarrow \complement Y \subset \complement X)$ | I$\forall$, 6 |

Propriedade:

$$\forall X (X = \emptyset \Leftrightarrow \complement X = U)$$

Demonstração:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $A = \emptyset$ | H / ? MD |
| 2 | $x \notin A$ | Det. $\emptyset$, 1 |
| 3 | $x \in \complement A$ | Def. $\complement$, 2 |
| 4 | $\complement A = U$ | Det. $U$, 3 |
| 5 | $A = \emptyset \leftrightarrow \complement A = U$ | MD, 1-4 |
| 6 | $\forall X (X = \emptyset \Leftrightarrow \complement X = U)$ | I$\forall$, 5 |

Propriedade:

$$\forall X \forall Y (\complement(X \cup Y) = \complement X \cap \complement Y)$$

Demonstração:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $x \in \complement(A \cup B)$ | H / ? MD |
| 2 | $\neg(x \in A \cup B)$ | Def. $\complement$, 1 |
| 3 | $\neg(x \in A \vee x \in B)$ | Def. $\cup$, 2 |
| 4 | $x \in A \wedge \neg(x \in B)$ | DM, 3 |
| 5 | $x \in \complement A \wedge x \in \complement B$ | Def. $\complement$, 4 |
| 6 | $x \in \complement A \cap \complement B$ | Def. $\cap$, 5 |
| 7 | $x \in \complement(A \cup B) \leftrightarrow x \in \complement A \cap \complement B$ | MD, 1-6 |
| 8 | $\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B$ | Def. $=$, 7 |
| 9 | $\forall X \forall Y (\complement(X \cup Y) = \complement X \cap \complement Y)$ | I$\forall$, 8 |

Propriedade:

$$\forall X \forall Y (\complement(X \cap Y) = \complement X \cup \complement Y)$$

Demonstração: **exercício.**

### 5.2.7 Uma simplificação usual

Podemos considerar que trabalhar com a variável $x$ livre nas demonstrações tira um pouco do formalismo das regras, mas não sua generalidade. De fato, poderíamos trabalhar com um elemento $a$ qualquer e depois quantificar, assim como fizemos com os conjuntos. Lembre-se que todos os teoremas que vimos foram demonstrados, basicamente, deduzindo a sentença para conjuntos A, B e C quaisquer e, no fim, quantificando. Pois bem, assim como retiramos os quantificadores das variáveis dos elementos, nesta seção vamos simplificar ainda mais a forma como vínhamos demonstrando. O passo da quantificação não será feito, e a estrutura da dedução natural mudará radicalmente. A forma é mais usual e é muito mais semelhante às demonstrações que encontramos nos livros de matemática. Embora seja muito distinto da dedução natural como viemos vendo até agora, o método é completamente baseado nela.

A estrutura será apresentada com alguns exemplos. Comecemos demonstrando que $A \cup A = A$:

$$\begin{array}{rcll} x \in A \cup A & \Leftrightarrow & x \in A \vee x \in A & \text{Def. de } \cup \\ & \Leftrightarrow & x \in A & \text{Idemp. de } \vee \\ & \therefore & A \cup A = A & \text{Def. de } = \end{array}$$

Viu como a demonstração é simples e curta? Não enumeramos a linha, muito menos indiquemos de qual linha derivamos uma nova, pois como as linhas sempre seguem imediatamente das antecedentes, apenas é necessária uma justificativa. Veja uma demonstração para $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$:

$$\begin{array}{rcll} x \in A \cup (B \cap C) & \Leftrightarrow & x \in A \vee x \in B \cap C & \text{Def. de } \cup \\ & \Leftrightarrow & x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C) & \text{Def. de } \cap \\ & \Leftrightarrow & (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C) & \text{Dist. de } \vee \\ & \Leftrightarrow & x \in A \cup B \wedge x \in A \cup C & \text{Def. de } \cup \\ & \Leftrightarrow & x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) & \text{Def. de } \cap \\ & \therefore & A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) & \text{Def. de } = \end{array}$$

E podemos considerar terminada a demonstração. A demonstração que fizemos antes nos custou 17 passos (com resumos). Esta certamente, apesar de menos formalizada, é mais usual. Podemos utilizar a mesma uma implicação também. Vamos demonstrar que $(A \subset B) \wedge (B \subset C) \Rightarrow A \subset C$ mostrando que, nas condições $A \subset B$ e $B \subset C$ (vamos usar como justificações), temos que $A \subset C$.

$$\begin{array}{rcll} x \in A & \Rightarrow & x \in B & \text{pois } A \subset B \\ & \Rightarrow & x \in C & \text{pois } B \subset C + \text{ SH} \\ & \therefore & A \subset C & \text{Def. de } \subset \end{array}$$

Usamos as informações que nos foram dadas no problema e o silogismo hipotético na segunda linha.

Nem tudo são flores. Esse método (chamaremos de dedução natural simplificada) permite verificar uma equivalência ou uma implicação, bem como uma igualdade. Mas sempre utilizando regras reversíveis. Não podemos fazer hipóteses com esse método, nem tão pouco podemos realizar demonstrações indiretas (por absurdo). Pelo menos não de uma só vez, digo, em uma única estrutura dessas. Poderíamos dialogar (usar uma linguagem natural) entre uma parte e outra da demonstração, fazer uma pequena dedução ao supor uma hipótese, ou seja, realizar as demonstrações em "pedaços". Uma demonstração completamente formal, sintática, e com inúmeras possibilidades de demonstração (além de expansão e adaptação) somente é fornecida pela dedução natural como vimos em seções anteriores no CQC (chamaremos de dedução natural clássica). Não poderíamos realizar, por exemplo, a demonstração de 35 passos somente com esta estrutura.

No entanto, podemos utilizar a dedução natural clássica para fazer o trabalho pesado, e utilizar a dedução natural simplificada para fazer algo apresentável da demonstração. Por exemplo, no caso da demonstração "grande" que fizemos (a de 35 passos), poderíamos refazê-la utilizando um teorema da lógica. A demonstração desse teorema, se bem feita, requer mais de 20 passos, e não pode, obviamente, ser realizada com a dedução natural simplificada. Mas podemos usar o *resultado* (só o resultado) para demonstrar, em poucos passos, o que antes demonstramos em 35 (mas sem usar o resultado do teorema). O teorema é o seguinte:

$$X \vee Y \to X \Leftrightarrow Y \to X$$

Ou, numa versão mais forte do teorema:

$$X \vee Y \leftrightarrow X \Leftrightarrow Y \to X$$

**Exercício**: demonstre a versão mais forte deste teorema usando a dedução natural clássica para o CPC.

Chamemos este teorema de **TEOREMA**. Uma demonstração para $A \cup B = A \Leftrightarrow B \subset A$ na dedução natural simplificada fica assim:

$$\begin{array}{rcll} A \cup B = A & \Leftrightarrow & x \in A \cup B \leftrightarrow x \in A & \text{Def. de } = \\ & \Leftrightarrow & x \in A \vee x \in B \leftrightarrow x \in A & \text{Def. de } \cup \\ & \Leftrightarrow & x \in B \to x \in A & \textbf{TEOREMA} \\ A \cup B = A & \Leftrightarrow & B \subset A & \text{Def. de } \subset \end{array}$$

## EXERCÍCIOS

1. Demonstre as propriedades que foram deixadas como exercício no texto.

2. Demonstre que $((A \subset B) \wedge (B \subset A)) \Leftrightarrow (A = B)$

3. Mostre que $A \subset \emptyset \Rightarrow A = \emptyset$

4. Demonstre que:

   (a) $((A \subsetneq B) \land (B \subset C)) \rightarrow A \subsetneq C$

   (b) $((A \subset B) \land (B \subsetneq C)) \rightarrow A \subsetneq C$

5. Demonstre que:

   (a) $A \subset C$ e $B \subset C$ implica $A \cup B \subset C$.

   (b) $A \subset B$ e $A \subset C$ implica $A \subset B \cap C$

6. Mostre que $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow C \subset A$.

7. Demonstre que $A \cup B = A \cap B \Leftrightarrow A = B$

8. Demonstre que se $A \subset C$ e $B \subset D$, então $A \cup B \subset C \cup D$.

9. Sejam $A$ e $B$ conjuntos. Demonstre que $A - B = A - (A \cap B)$.

10. Sejam $A$ e $B$ conjuntos. Demonstre que $B \subset \complement A$ se e somente se $A \cap B = \emptyset$

11. Sejam $A$ e $B$ conjuntos. Demonstre que $(A - B) \cup B = A$ se e somente se $B \subset A$.

12. Sejam $A$, $B$, e $C$ três conjuntos quaisquer. Demonstre que:

    (a) $(A - C) \cup (B - C) = (A \cup B) - C$,

    (b) $(A - C) \cap (B - C) = (A \cap B) - C$

13. Dois conjuntos $X$ e $Y$ são ditos *disjuntos* quando $X \cap Y = \emptyset$. Mostre que $A$ e $B - A$ são disjuntos, e que $A \cup B = A \cup (B - A)$. (Isso mostra como representar a união $A \cup B$ como uma *união disjunta*.)

14. Mostre que:

    (a) $\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B$

    (b) $\complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B$
    Esses resultados geralmente são chamados de *Teoremas de De Morgan para complementar*.

15. Demonstre a seguinte consequência lógica:
    $\{A \subset C, B \subset C, A \cup B = C, A \cap B = \emptyset\} \vdash A = C - B$

16. Os seguintes exercícios foram retirados de [LIMA (2)]. Tente transcrevê-los para uma sentença lógica da T.C. (seja uma implicação ou uma consequência lógica) e os demonstre usando Dedução Natural:

(a) Dados os conjuntos $A$ e $B$, seja $X$ um conjunto com as seguintes propriedades:
1ª $X \supset A$ e $X \supset B$,
2ª Se $Y \supset A$ e $Y \supset B$, então $Y \supset X$.
Prove que $X = A \cup B$.

(b) Enuncie e Demonstre um resultado análogo ao anterior, caracterizando $A \cap B$.

(c) Sejam $A, B \subset U$. Prove que $A \cap B = \emptyset$ se, e somente se, $A \subset \complement B$. Prove também que $A \cup B = U$ se, e comente se, $\complement A \subset B$.

(d) Dados $A, B \subset U$, prove que $A \subset B$ se, e somente se, $A \cap \complement B = \emptyset$.

(e) Se $A, X \subset U$ são tais que $A \cap X = \emptyset$ e $A \cup X = U$, prove que $X = \complement A$.

(f) Prove que $A = B$ se, e somente se, $(A \cap \complement B) \cup (\complement A \cap B) = \emptyset$.

(g) Prove que $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$.

A partir da próxima seção, sobrevoaremos algumas outras disciplinas matemáticas buscando implementar a dedução natural clássica, ou mesmo a simplificada, em seus procedimentos de demonstração.

## 5.3 Geometria Euclidiana

A dedução natural clássica é altamente aplicável às geometrias, que são sistemas axiomáticos formais. Nelas, lidamos constantemente com hipótese almejando CTR, quantificações diversas e processos de inferência puramente lógicos. Faremos uma revisão básica a respeito de alguns conhecimentos essenciais para realizar as demonstrações desta seção. Não nos prolongaremos. Apenas daremos uma noção de como a dedução natural, ou pelo menos a ideia dela, norteia as demonstrações dessa disciplina. Não faremos desenhos, nosso intuito é derivar as conclusões somente com a "álgebra geométrica".

No sistema formal da geometria euclidiana, vale dizer, na sua linguagem (a parte que utilizaremos), as letras gregas minúsculas são exclusivas dos planos, de modo que não precisamos de um predicado para dizer que $\alpha$ é um plano, pois na própria letra já está implícito este predicado. As letras maiúsculas e minúsculas do nosso alfabeto serão exclusivas, respectivamente, dos pontos e dos planos.

### 5.3.1 Algumas regras e definições

Precisaremos de saber como ficarão formalizadas algumas ações que teremos que executar no processo de dedução. O espaço comporta infinitos pontos, infinitas retas e infinitos planos. Numa demonstração, precisamos apenas de um ou outro. Portanto, precisamos considerar apenas um ou outro. Para isso, criaremos as regras TP, Tr, e Tp, que representam, respectivamente, "tome um ponto", "tome uma reta" e "Tome um plano" para poder considerar estes entes geométricos. A sintaxe será:

'símbolo do ente' :('características que determinam o ente')

Ou seja, teremos algumas formas de especificar um ponto, uma reta ou um plano.

Começando pela regra TP. Como existem infinitos pontos no espaço, teremos apenas que dizer onde encontrar este ponto, de modo que poderá ser a interseção de duas retas (se forem concorrentes), ou a interseção de três planos (se estiverem de acordo com o teorema dos três planos secantes), ou pode ser simplesmente um ponto em (ou fora de) uma reta (ou um plano). Por exemplo, podemos especificar um ponto assim:

$$P : (P \in r) \quad \text{(sendo r uma reta já especificada)}$$

$$Q : (Q = \alpha \cap \beta \cap \gamma) \quad \text{(sendo estes, planos já especificados)}$$

etc.

Agora Tr. Poderemos obter uma reta que passa por dois pontos, ou que é a interseção de dois planos, ou que passa por uma ponto e é paralela a uma outra reta, etc. Qualquer que seja o caso, devemos conjugar as informações na determinação da reta. No último caso citado, podemos, ainda, acrescentar que a reta é única, indicando o postulado das paralelas (PP)[3]. Por exemplo:

$$\left| \begin{array}{ll} \vdots & \\ s : (P \in s \ \wedge \ s /\!/ r) & \quad \text{Tr (s é única: PP)} \\ \vdots & \end{array} \right.$$

Já para Tp, temos que um plano fica determinado por três pontos, ou por uma reta e um ponto, ou por duas retas paralelas, etc.

As informações que especificam o ponto/reta/plano podem ser utilizadas para justificar alguma regra de inferência (basta indicar a linha na justificação da dedução) ou pode ser adicionada a uma linha qualquer da dedução (basta indicar que foi uma informação retirada da linha $n$ assim: Inf. $n$), ou ainda, se forem mais de uma informação em conjunção, podemos usar a separação (S).

Muito da teoria dos conjuntos influem em resultados da geometria euclidiana. Veja que falamos de interseção, bem como de pertinência. Não é para menos que conhecimentos elementares de teoria dos conjuntos são requisito para um bom curso de geometria euclidiana. Alguns resultados dos conjuntos serão utilizados por nós. Por exemplo, se tomarmos a reta que é interseção de dois planos, poderemos adicionar (via Inf.) que esta reta está contida tanto em um, quanto no outro. Esta possibilidade reside na validade da

[3]Poderíamos formalizar isso no CQC com mais precisão. Podemos acrescentar nele o símbolo '='. Fazendo isso, o CQC que vimos se torna CQC$^=$ e passa a ser chamado de *CQC Com Identidade*. No CQC$^=$, expressando informalmente, poderíamos formular a unicidade de um sujeito $x$ com "tal e tal" característica dizendo simplesmente que, se outro objeto $y$ tem a característica "tal e tal", então $x = y$. No caso da unicidade da reta que passa por um ponto e é paralela a uma reta dada, poderíamos formalizar assim: $(P \in s \ \wedge \ s /\!/ r) \wedge (P \in t \ \wedge \ t /\!/ r \rightarrow t = s)$.

seguinte fórmula:

$$A = B \cap C \Rightarrow A \subset B \wedge A \subset C$$

No caso comentado, $A$ é a reta interseção dos planos $B$ e $C$. Ou seja, da informação de que $r = \alpha \cap \beta$, podemos derivar $r \subset \alpha$ e $r \subset \beta$ (justifique com Inf. e a linha).

O mais crucial a notar na matemática em geral, e na geometria euclidiana em particular, é que praticamente todo teorema é aplicado a um conjunto de informações. Algo como um modus ponens. Perceba, por exemplo, que o famoso Teorema do Valor Médio é obtido a partir de um RPC. Supõe-se que uma função satisfaz algumas sentenças e, então, deriva-se o resultado, de modo que do conjunto de informações $\Gamma$ se segue um resultado $\alpha$, de sorte que podemos sempre afirmar $\Gamma \vdash \alpha$, ou seja, que se for possível reunir um conjunto $\Gamma$ de informações, podemos concluir $\alpha$. A forma como iremos utilizar as definições e teoremas, a qual se utiliza amplamente em livros didáticos, é que de um conjunto de informações se segue um resultado. Algo como $\Gamma \vdash \alpha$, porém com uma sintaxe diferente. Ao invés de $\vdash$ utilizaremos $\Rightarrow$ (ou $\Leftrightarrow$ se for o caso), e $\Gamma$ será uma frase entre parênteses, com as informações separadas por vírgulas. Claro, estas vírgulas são conjunções, e entenderemos como conjunções. Por exemplo, a definição de retas paralelas fica assim anotada:

$$(r \subset \alpha, s \subset \beta, r \cap s = \emptyset) \Leftrightarrow r /\!/ s$$

### 5.3.2 Triângulos

Não definiremos triângulo. Mas vale comentar uma regra de inferência que utilizamos na geometria similar à regra de separação. Algo análogo à separação aplicada às informações que se conjugam na característica do ente em questão. O fato é que, de $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$, podemos derivar a afirmação de que todos os lados e ângulos homólogos são congruentes, como se a congruência desses triângulos carregassem toda essa informação. A regra ficará assim (claro, podemos derivar só o que precisarmos):

Congruência de Triângulos (CdT)

$$\begin{array}{c} \triangle ABC \equiv \triangle A'B'C' \\ \hline \overline{AB} \equiv A\bar{'}B' \\ \overline{AC} \equiv \overline{A'C'} \\ \overline{BC} \equiv B\bar{'}C' \\ A\widehat{B}C \equiv A'\widehat{B}'C' \\ B\widehat{A}C \equiv B\widehat{A}'C \\ A\widehat{C}B \equiv A'\widehat{C}'B' \end{array}$$

Se não houver ambiguidade, podemos escrever $\widehat{B} \equiv \widehat{B}'$ ao invés de $A\widehat{B}C \equiv A'\widehat{B'}C'$. Falaremos sobre três casos de congruência de triângulos, o caso em que dois triângulos têm, ordenadamente, um lado e um ângulo e outro lado (LAL), um ângulo e um lado e outro ângulo (ALA), e o caso em que eles têm os três lados congruentes (LLL). São três regras que, como sempre, são aplicadas caso se verifiquem um conjunto de informações que estabeleceremos assim:

$$\begin{array}{lcl}
\text{LAL} & : & (\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}, \widehat{A} \equiv \widehat{A}', \overline{AC} \equiv \overline{A'C'}) \Rightarrow \triangle ABC \equiv \triangle A'B'C' \\
\text{ALA} & : & (\widehat{B} \equiv \widehat{B}', \overline{BC} \equiv \overline{BC}, \widehat{C} \equiv \widehat{C'}) \Rightarrow \triangle ABC \equiv \triangle A'B'C' \\
\text{LLL} & : & (\overline{AB} \equiv A\bar{'}B', \overline{AC} \equiv \overline{A'C'}, \overline{BC} \equiv B\bar{'}C') \Rightarrow \triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'
\end{array}$$

Usaremos uma notação diferente da usual para triângulos notáveis. O triângulo isósceles (aquele que têm dois lados congruentes) será definido assim:

$$iso_{BC}(\triangle ABC) \Leftrightarrow \overline{AB} \equiv \overline{AC}$$

Esta notação indica que ABC é um triângulo isósceles de base $\overline{BC}$. O triângulo equilátero (três lados congruentes) será definido assim assim:

$$eq(\triangle ABC) \Leftrightarrow \overline{AB} \equiv \overline{AC} \wedge \overline{AB} \equiv \overline{BC} \wedge \overline{AC} \equiv \overline{BC}$$

No lugar de $\overline{AB} \equiv \overline{AC} \wedge \overline{AB} \equiv \overline{BC} \wedge \overline{AC} \equiv \overline{BC}$, podemos escrever simplesmente $\overline{AB} \equiv \overline{AC} \equiv \overline{BC}$. A notação da definição é mais usual, pois geralmente os teoremas utilizam uma relação que se dá entre dois entes para obter algum resultado. Por isso seu professor diz "dois a dois congruentes", "paralelas duas a duas", etc..

O ponto médio de um segmento $\overline{AB}$ será assim definido:

$$pm_{\overline{AB}}(M) \Leftrightarrow \overline{AM} \equiv \overline{MB}$$

Todo segmento (existente) tem um ponto médio. Vamos adicionar uma a regra Tm ("tome o ponto médio"), basta, por exemplo, considerar o ponto $\overline{M}_{AB}$, e justificar a linha onde supõe a existência do segmento $\overline{AB}$.

A bissetriz é um segmento de reta (ou a própria reta) que divide um ângulo em duas partes congruentes. Definiremos assim:

$$bis_{B\widehat{A}C}(\overline{AO}) \Leftrightarrow O\widehat{A}B \equiv O\widehat{A}C$$

A mediana é um segmento de triângulos que tem uma extremidade em um vértice e a outra no ponto médio do lado oposto a esse vértice. Cada triângulo tem três medianas (assim como três bissetrizes internas), portanto, a notação deve possibilitar distinguir entre quais das três estamos falando. Faremos referência ao lado onde que contém o ponto médio (será dita "mediana relativa" a esse lado). Definiremos assim:

$$med_{BC}(\overline{AM}) \Leftrightarrow pm_{\overline{BC}}(M)$$

**Obs.:** Em geometria euclidiana, é claro que $\overline{AB} = \overline{BA}$ e $\overline{AB} \equiv \overline{BA}$. Concluímos, daí, que $\overline{AB} \equiv \overline{AB}$. Podemos chamar isso de *identidade*.

### 5.3.3 Algumas demonstrações no plano

Vamos mostrar que a mediana relativa à base de um triângulo isósceles é, também, bissetriz. Ou seja, devemos provar que a seguinte fórmula é válida:

$$iso_{BC}(\triangle ABC) \wedge med_{BC}(AM) \Rightarrow bis_{B\widehat{A}C}(\overline{AM})$$

A demonstração fica assim:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $iso_{BC}(\triangle ABC) \wedge med_{BC}(AM)$ | H / ? RPC |
| 2 | $iso_{BC}(\triangle ABC)$ | S, 1 |
| 3 | $med_{BC}(AM)$ | S, 1 |
| 4 | $\overline{AB} \equiv \overline{AC}$ | Def. *iso*, 2 |
| 5 | $\overline{MB} \equiv \overline{MC}$ | Def. *pm*, 3 |
| 6 | $\overline{AM} \equiv \overline{AM}$ | identidade |
| 7 | $(\overline{AB} \equiv \overline{AC}, \overline{MB} \equiv \overline{MC}, \overline{AM} \equiv \overline{AM})$ | C, 4,5,6 |
| 8 | $\triangle AMB \equiv \triangle AMC$ | LLL, 7 |
| 9 | $M\widehat{A}B \equiv M\widehat{A}C$ | Cdt, 8 |
| 10 | $bis_{B\widehat{A}C}(\overline{AM})$ | Def. *bis*, 9 |
| 11 | $iso_{BC}(\triangle ABC) \wedge med_{BC}(AM) \Rightarrow bis_{B\widehat{A}C}(\overline{AM})$ | RPC, 1-10 |

**EXERCÌCIOS:**

1. Aplicando dedução natural à geometria euclidiana, prove que:

   (a) Os ângulos da base de um triângulo isósceles são congruentes.

   (b) A bissetriz relativa à base de um triângulo isósceles é, também, mediana.

   (c) As medianas relativas aos lados congruentes de um triângulo isósceles são congruentes.

   (d) As bissetrizes relativas aos lados congruentes de um triângulo isósceles são congruentes.

   (e) Se a bissetriz relativa a um lado de um triângulo é, também, mediana relativa a esse lado, então esse triângulo é isósceles.

### 5.3.4 Algumas demonstrações no espaço

A dedução natural é mais amplamente aplicável ao espaço pela maior quantidade de novos teoremas e pela extensão de teoremas já existentes no plano para o espaço. Como é comum acontecer na geometria, existem demonstrações que enunciam coisas simples, como a transição do paralelismo de retas e planos no espaço, mas que, no entanto, exigem longas demonstrações[4]. Conseguimos fazer uma demonstração "bem feita" da transição do paralelismo de retas no espaço (não-coplanares), em 50 passos.[5]. Vamos trazer, aqui, esta demonstração, mas antes, façamos algumas observações: [...]

**Teorema da transitividade do paralelismo de retas:** $(a /\!/ b,\ b /\!/ c) \Rightarrow a /\!/ c$
**Demonstração:** O caso em que as retas são coplanares é garantido pela geometria plana. Supomos, então, que as retas $a$, $b$, e $c$ são não-coplanares.

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\underline{a /\!/ b \wedge b /\!/ c}$ | H / ? RPC |
| 2 | $a /\!/ b$ | S, 1 |
| 3 | $b /\!/ c$ | S, 1 |
| 4 | $\alpha\ :(a /\!/ b)$ | Tp |
| 5 | $\beta\ :(b /\!/ c)$ | Tp |
| 6 | $\alpha \not\supset c$ | Info. 4,5 |
| 7 | $\beta \supset c$ | Info. 5 |
| 8 | $\alpha \not\supset c \wedge \beta \supset c$ | C, 6,7 |
| 9 | $\alpha \neq \beta$ | Def. $\neq$, 8 |
| 10 | $b \subset \alpha$ | Info., 4 |
| 11 | $b \subset \beta$ | Info., 5 |
| 12 | $b \subset \alpha \wedge b \subset \beta \wedge \alpha \neq \beta$ | C, 9,10,11 |
| 13 | $b = \alpha \cap \beta$ | Def. $\cap_{planos}$, 12 |
| 14 | $P \in c$ | TP |
| 15 | $\gamma\ :(a, P)$ | Tp |
| 16 | $\alpha \not\supset P$ | Info., 6,14 |
| 17 | $\gamma \supset P$ | Info., 15 |
| 18 | $\alpha \not\supset P \wedge \gamma \supset P$ | C, 16,17 |
| 19 | $\alpha \neq \gamma$ | Def. $\neq$, 19 |
| 20 | $\alpha \not\supset P \wedge \gamma \supset P \wedge \alpha \neq \gamma$ | C, 16,17,19 |
| 21 | $a = \alpha \cap \gamma$ | Def. $\cap_{planos}$, 20 |
| 22 | $P \in \beta$ | Info., 7,14 |
| 23 | $P \in \gamma$ | Info., 15 |
| 24 | $r\ :(P \in r,\ r = \beta \cap \gamma)$ | Tr |
| 25 | $r = \beta \cap \gamma$ | Info., 24 |

[4]Eu diria, longas demonstrações "cruas", no sentido de que se utiliza de definições e fatos básicos, apenas. Porém, geralmente é possível realizar estas demonstrações mais rapidamente se utilizarmos outros resultados já obtidos (outro teorema) para garantir algum passo da demonstração. Por exemplo, o *Teorema dos Três Planos Secantes* poderia garantir o paralelismo de retas do espaço rapidamente, mas aí já temos dependência de um resultado que poderíamos obter, também, por dedução natural

[5]Seu professor, provavelmente, gastaria mais de um quadro com uma dessas (sem contar com as representações geométricas).

Agora, faremos uma hipótese (? CTR) e, a partir dela, utilizaremos, basicamente, o fato de que $A \cap A = A$. O leitor é convidado a demonstrar esse fato (utilize a idempotência da conjunção). O chamaremos de *idempotência da interseção* (Idemp. $\cap$). Faremos, ainda, uma simplificação. Assim como estamos permitindo trabalhar com mais de uma conjunção sem utilizar parênteses, também permitiremos trabalhar com várias interseções sem utilizar parênteses. Podemos fazer isso porque conjunções e interseções (assim como uniões e disjunções) se comutam e se associam. Continuando a demonstração:

| | | |
|---|---|---|
| 26 | $a \cap r \neq \emptyset$ | H / ? CTR |
| 27 | $(\alpha \cap \gamma) \cap (\beta \cap \gamma) \neq \emptyset$ | =, 21,25 |
| 28 | $\alpha \cap \gamma \cap \beta \cap \gamma \neq \emptyset$ | Notação, 26 |
| 29 | $\alpha \cap \gamma \cap \alpha \cap \beta = \emptyset$ | Indemp. $\cap$, comutat. e assoc. de $\cap$, 27 |
| 30 | $(\alpha \cap \gamma) \cap (\alpha \cap \beta) = \emptyset$ | Notação, 28 |
| 31 | $a \cap b \neq \emptyset$ | =, 13,21 |
| 32 | $\neg(a /\!/ b)$ | Def. //, 31 |
| 33 | $a /\!/ b \wedge \neg(a /\!/ b)$ | C, 2,32 |
| 34 | $a \cap r = \emptyset$ | CTR, 26-33 |
| 35 | $r \subset \gamma$ | Info., 25 |
| 36 | $a \subset \gamma \wedge r \subset \gamma \wedge a \cap r = \emptyset$ | C, 13,34,35 |
| 37 | $a /\!/ r$ | Def. //, 36 |
| 38 | $b \cap r \neq \emptyset$ | H / ? CTR |
| 39 | $(\alpha \cap \beta) \cap (\beta \cap \gamma) \neq \emptyset$ | =, 13,25 |
| 40 | $\alpha \cap \beta \cap \beta \cap \gamma \neq \emptyset$ | Notação, 39 |
| 41 | $\alpha \cap \gamma \cap \alpha \cap \beta \neq \emptyset$ | Indemp. $\cap$, comutat. e assoc. de $\cap$, 40 |
| 42 | $(\alpha \cap \gamma) \cap (\alpha \cap \beta) \neq \emptyset$ | Notação, 41 |
| 43 | $a \cap b \neq \emptyset$ | =, 13,21 |
| 44 | $\neg(a /\!/ b)$ | Def. //, 43 |
| 45 | $a /\!/ b \wedge \neg(a /\!/ b)$ | C, 2,44 |
| 46 | $b \cap r = \emptyset$ | CTR, 38,45 |
| 47 | $b \subset \beta \wedge r \subset \beta \wedge b \cap r = \emptyset$ | C, 11,35,46 |
| 48 | $b /\!/ r$ | Def. //, 47 |
| 49 | $b /\!/ r \wedge b /\!/ c \wedge P \in r \wedge P \in c$ | C, 3,14,48,50 |
| 50 | $P \in r$ | Info., 24 |
| 51 | $r = c$ | PP,50 |
| 52 | $a /\!/ c$ | =, 37,51 |
| 53 | $(a /\!/ b,\ b /\!/ c) \Rightarrow a /\!/ c$ | RPC, 1-52 |

Note que não precisamos de representação geométrica para conseguir realizar uma prova como estas. Apesar de, muitas vezes, facilitar. Em demonstrações indiretas, o desenho fica difícil de fazer porque, claro, geralmente supomos coisas que não são válidas para derivar uma contradição. Nesses casos, o desenho pode atrapalhar a compreensão do problema.

**EXERCÌCIOS:**

1. Aplicando dedução natural à geometria euclidiana, prove que:
   (a) Exercícios a coletar
   (b) Exercícios a coletar
   (c) Exercícios a coletar
   (d) Exercícios a coletar

A seguir, faremos mais uma aplicação dos nossos métodos (essa pragmática) à Álgebra Linear, mas que pode ser estendido para as demais álgebras, como o leitor perceberá.

## 5.4 Álgebra Linear

Definiremos um espaço vetorial, enunciaremos as propriedades básicas, e demonstraremos, de forma prática, alguns resultados. Veja que alguns conceitos de lógica entram nas demonstração, e, claro, outros de conjuntos (já que um espaço vetorial é um conjunto).

### 5.4.1 Espaços Vetoriais

**DEFINIÇÃO** Dizemos que um conjunto não vazio $V$ *é um espaço vetorial sobre (um corpo)* $\mathbb{K}$ (ou que $V$ é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial) se, em seus vetores (elementos do conjunto $V$), estiverem definidas duas operações:

(A): A cada dois vetores $u$ e $v$ de $V$, corresponde um vetor $u + v \in V$ denominado *soma de $u$ e $v$*, de modo que:

(A1): $u + v = v + u, \forall u \forall v(u \in V \wedge v \in V)$ (comutatividade de +)

(A2): $(u + v) + w = u + (v + w), \forall u \forall v \forall w(u \in V \wedge v \in V \wedge w \in V)$ (associatividade de +)

(A3): exista um *vetor nulo* em V, denotado por 0, e tal que: $0 + v = v, \forall v(v \in V)$

(A4): a cada vetor $u$ em $V$, exista um vetor $(-v) \in V$, denominado *vetor oposto de $v$*, tal que: $v + (-v) = 0$

(M): A cada *escalar* (elemento do corpo) $\alpha \in \mathbb{K}$ e vetor $v \in V$, corresponde um vetor $\alpha.v \in V$, denominado produto do escalar $\alpha$ pelo vetor $v$, de modo que:

(M1): $(\alpha\beta).v = \alpha(\beta v), \forall \alpha \forall \beta \forall v(\alpha \in \mathbb{K} \wedge \beta \in \mathbb{K} \wedge v \in V)$

(M2): $1.v = v, \forall v(v \in V)$, dendo 1 o elemento identidade de $\mathbb{K}$.

Além de que as propriedades (A) e (M) devem se distribuir da seguinte maneira:

(D1): $\alpha.(u+v) = \alpha.u + \alpha.v, \forall \alpha(\alpha \in \mathbb{K})$

(D2): $(\alpha+\beta).v = \alpha.v + \beta.v, \forall \alpha \forall \beta \forall v(\alpha \in \mathbb{K} \wedge \beta \in \mathbb{K} \wedge v \in V)$

### 5.4.2 Algumas demonstrações

Propriedade: O vetor nulo é único.[6]

Demonstração:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\quad 0' + v = v, \forall v \in V$ | H / ? RPC ?0 = 0′ |
| 2 | $\quad 0 = 0' + 0$ | =H |
| 3 | $\quad 0 = 0 + 0'$ | =A1, 2 |
| 4 | $\quad 0 = 0'$ | =A3, 3 |
| 5 | $0' + v = v, \forall v \in V \Rightarrow 0' = 0$ | RPC, 1-4 |

Ou seja, supor que um vetor $0'$ tem a propriedade do elemento neutro, implicou que ele *é* o elemento neutro, o que comprova a unicidade. Podemos, ainda, demonstrar assim:

Supondo que exista um vetor $0'$, tal que $0' + v = v, \forall v \in V$, temos:

$$\begin{array}{rcll} 0 & = & 0'+0 & \text{A3} \\ & = & 0+0' & \text{A1} \\ & = & 0' & \text{A3} \\ \therefore\ 0 = 0' & & & \end{array}$$

Propriedade: O inverso aditivo de cada vetor é único.

Demonstração: **Exercício.**

Propriedade: $\forall u \forall v \forall w((w+u = w+v \Rightarrow u = v) \wedge (u \in V \wedge v \in V \wedge w \in V))$ (Lei do Corte). Geralmente é enunciada assim: $w + u = w + v \Rightarrow u = v, \forall u, v, w \in V$, que é uma simplificação da lógica matemática.

Demonstração:

[6] A conclusão fica formalizada assim: $\exists w \forall v((w + v = v \Rightarrow w = 0) \wedge w \in V \wedge v \in V)$, e a demonstração puramente formal seria utilizando E∀, I∀, E∃ e I∃.

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $w+u=w+v$ | H / ? RPC |
| 2 | $u=0+u$ | A3 |
| 3 | $u=(-w+w)+u$ | =A4, 2 |
| 4 | $u=-w+(w+u)$ | =A1, 3 |
| 5 | $u=-w+(w+v)$ | =H, 4 |
| 6 | $u=(-w+w)+v$ | =A1, 5 |
| 7 | $u=0+v$ | =A3, 6 |
| 8 | $u=v$ | =A4, 7 |
| 9 | $w+u=w+v \Rightarrow u=v$ | RPC, 1-8 |

Podemos, também, demonstrar assim:
Supondo $w+u=w+v$, temos:

$$\begin{array}{lcll} u & = & 0+u & \text{vetor nulo} \\ & = & (-w+w)+u & \text{simétrico} \\ & = & -w+(w+u) & \text{associatividade} \\ & = & -w+(w+v) & \text{pois} w+u=w+v \\ & = & (-w+w)+v & \text{associatividade} \\ & = & 0+v & \text{simétrico} \\ & = & v & \text{vetor nulo} \\ \therefore & u=v & & \end{array}$$

Propriedade: $u+v=u \Rightarrow v=0$.
Demonstração:

$$\begin{array}{rcll} u+v=u & \Rightarrow & u+v=u+0 & =\text{A3} \\ & \Rightarrow & v=0 & \text{Lei do Corte} \\ & \therefore & u+v=u \Rightarrow v=0 & \end{array}$$

Propriedade: $u+w=0 \Rightarrow u=-w$.
Demonstração: **Exercício.**

Propriedade: $0.\alpha=0, \forall\alpha(\alpha \in \mathbb{K})$.
Demonstração:

$$\begin{array}{rcll} 0.\alpha+0.\alpha & = & (0+0).\alpha & \text{D2} \\ & = & 0.\alpha & \text{A3} \\ & = & 0.\alpha+0 & \text{A3} \\ & \therefore & 0.\alpha=0 & \text{Lei do Corte} \end{array}$$

Propriedade: $0.v=0, \forall v(v \in V)$.
Demonstração: **Exercício.**

Propriedade: $(-1).v = -v$.
Demonstração:

$$\begin{array}{rcll} v+(-1).v & = & 1.v+(-1).v & \text{M2} \\ & = & (1+(-1)).v & \text{D2} \\ & = & 0.v & \text{Inverso aditivo do corpo} \\ & = & 0 & \text{Teorema} \\ & = & v+(-v) & \text{A4} \\ & \therefore & (-1).v=-v & \text{Lei do Corte} \end{array}$$

Propriedade: $\alpha v = 0 \Rightarrow (\alpha = 0) \vee (v = 0)$.
Demonstração:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\alpha.v = 0$ | H / ? RPC |
| 2 | $\alpha \neq 0$ | H / ? RPC |
| 3 | $\alpha.\alpha^{-1} = 1$ | Inverso multiplicativo do corpo, 2 |
| 4 | $\alpha^{-1}.(\alpha.v) = \alpha^{-1}.0$ | Princípio de Identidade, 1 |
| 5 | $\alpha^{-1}.(\alpha.v) = 0$ | Teorema, 4 |
| 6 | $(\alpha^{-1}.\alpha).v = 0$ | M1, 5 |
| 7 | $1.v = 0$ | =3, 6 |
| 8 | $v = 0$ | M2, 7 |
| 9 | $\alpha \neq 0 \rightarrow v = 0$ | RPC, 2-8 |
| 10 | $\alpha = 0 \vee v = 0$ | Def. $\rightarrow$, 9 (passo resumido) |
| 11 | $\alpha v = 0 \Rightarrow (\alpha = 0) \vee (v = 0)$ | RPC, 1-10 |

Propriedade: $\alpha v \neq 0 \Rightarrow (\alpha \neq 0) \vee (v \neq 0)$.
Demonstração:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\alpha.v \neq 0$ | H / ? RPC |
| 2 | $\neg(\alpha \neq 0 \vee v \neq 0)$ | H / ? CTR |
| 3 | $\neg(\alpha \neq 0) \wedge \neg(v \neq 0)$ | DM, 2 |
| 4 | $\neg(\alpha \neq 0)$ | S, 3 |
| 5 | $\alpha = 0$ | DN, 4 |
| 6 | $0.v = 0$ | Teorema |
| 7 | $\alpha.v = 0$ | =, 5 |
| 8 | $(\alpha.v = 0) \wedge (\alpha.v \neq 0)$ | C, 1,7 |
| 9 | $(\alpha \neq 0) \vee (v \neq 0)$ | CTR, 1,8 |
| 10 | $\alpha v \neq 0 \Rightarrow (\alpha \neq 0) \vee (v \neq 0)$ | RPC, 1-9 |

Propriedade: $(\alpha \neq 0) \wedge (v \neq 0) \Rightarrow \alpha.v \neq 0$
Demonstração: **Exercício.**

## 5.5 Importância do estudo

Não que passemos a sempre levar a cabo o que uma demonstração formal requer. Longe disso. No geral, podemos simplificar a demonstração informalmente. No entanto, é importante que o estudante entenda que é possível formalizar qualquer demonstração, por exemplo, da geometria, e que sua argumentação deve pressupor essa formalização, ou em forma de texto, ou em forma de implicações simplificadas. O fato é que é possível, por exemplo, realizar **toda** a geometria euclidiana em uma única dedução (claro, em alguns milhares/milhões de linhas). Nas primeiras linhas se apresentariam os axiomas/postulados tanto da geometria quanto da teoria dos conjuntos, e em seguida seriam introduzidas as definições (que, como vimos, podem ser descritas de maneira puramente lógico-formal) e, então, a partir das regras de inferências que estudamos no CPC e no CQC, seriam derivadas todas as verdades geométricas. Resumindo o parágrafo, **o CQC é suficiente para desenvolver, por exemplo, as geometrias**.

Outro ponto de importância relevante a ressaltar, esse mais prático, é que os teoremas e/ou definições requerem **sempre** um conjunto de sentenças a serem satisfeitas. É por isso que seu professor, quando numa demonstração, te pergunta "mas o que garante essa passagem?", e você tem de informar um conjunto de informações que enquadram o(s) objeto(s) em determinados moldes descritos pelos teoremas/definições. Na verdade, como os teoremas se apresentam como (bi) implicações, o que fazemos intuitivamente é enquadrar o objeto no antecedente e usar Modus Ponens.

No geral, devemos nos preocupar sempre em manter a clareza em nossas demonstrações, para que o leitor (seja o professor ou um colega) possa facilmente reconhecer que determinadas inferências foram válidas e, assim, possa "confiar" no seu resultado e dar o merecido crédito à sua demonstração. Não há (pelo menos não deve haver) mistérios em demonstrações matemáticas. Não há misticismo nem obscuridade. Tudo tem uma justificação precisa. A rainha das ciências é exata por natureza. A dedução natural, pois, evidencia que é possível, de fato, realizar a matemática com a clareza que lhes é naturalmente possível.

# Capítulo 6

# REFERÊNCIAS

[ALCOFORADO] ALCOFORADO, Paulo; DUARTE, Alessandro; WYLLIE, Guilherme. **Os Primeiros Escritos Lógicos de Gottlob Frege**. São Paulo: Instituto Brasileiro de Filosofia e Ciência "Raimundo Lúlio" (Ramon Llull), 2012.

[CALLIOLI] CALLIOLI, Carlos A.; DOMINGUES, Hygino H.; COSTA, Roberto C. F. **Álgebra Linear e Aplicações**. 6 ed. São Paulo: Atual, 1990.

[COELHO] COELHO, Flávio U.; LOURENÇO, Mary L. **Um Curso de Álgebra Linear**. 2 ed. São Paulo: Editora Universidade de São Paulo, 2013.

[DOLCE] DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José N. **Fundamentos de Matemática Elementar, 9: Geometria Plana**. São Paulo: Atual, 2013.

[DOLCE] DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José N. **Fundamentos de Matemática Elementar, 10: Geometria Espacial, Posição e Métrica**. São Paulo: Atual, 2013.

[LIMA (1)] LIMA, Elon L. **Álgebra Linear**. 8 ed. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2012.

[LIMA (2)] LIMA, Elon L. **Curso de Análise Vol. 1**. 14 ed. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2013.

[MORTARI] MORTARI, Cezar A. **Introdução à Lógica**. São Paulo: Editora UNESP, 2001.

[TARSKI] TARSKI, Alfred. **A Concepção Semântica da Verdade**. Tradução de Celso Braida [et. al.]. MORTARI, Cezar A.; DUTRA, Luiz H. de A. (orgs.). São Paulo: Editora UNESP, 2007.

[WITTGENSTEIN] WITTGENSTEIN, Ludwig. **Tractatus Logico-Philosophicus**. Tradução, apresentaçãoe estudo introdutório de Luiz Henrique L. dos Santos; introdução de Bertrand Russel. 3 ed. São Paulo: Editora Universidade de São Paulo, 2010.