Université d'Avignon 2019-2020
Algèbre 2 Licence 1 Mathématiques-Informatique

CC1 : 16 mars 2020 : 10h-11h30 (1h ; 1h20 pour les tiers temps)

On attachera le plus grand soin à la présentation et aux calculs. Aucun document ni appareil numérique autorisé. Barême indicatif : 5 points par exercice environ.

Exercice 1. *Montrer que la matrice suivante est inversible et calculer son inverse*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. *Donner la définition d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. On considère maintenant les trois sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$:*

$$\begin{aligned} F_1 &= \{(\lambda, 3\lambda, 2\lambda) \ ; \ \lambda \in \mathbb{R}\} \\ F_2 &= \mathrm{Vect}((0,1,2),(1,-1,-1)) \\ F_3 &= \{(\lambda+1, \lambda-1, 3\lambda-1) \ ; \ \lambda \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Parmi ces espaces, lesquels sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ (justifier votre réponse en fournissant une preuve ou bien bien un contre-exemple) ?

Exercice 3. *On considère le système linéaire*

$$\begin{cases} ax + y + z &= 1 \\ x + ay + z &= b \\ x + y + az &= b \end{cases}$$

Résoudre ce système en fonction des paramètres réels $a, b \in \mathbb{R}$. Lorsque celui-ci est compatible, donner l'ensemble des solutions ainsi que le rang du système.

Exercice 4. *Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice carré de taille n vérifiant $A^2 = I_n$ (où I_n désigne la matrice identité). Montrer par réccurence l'égalité*

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad (I_n + A)^p = 2^{p-1}(I_n + A).$$

On suppose que $A \neq -I_n$. Montrer que la matrice $A - I_n$ n'est pas inversible.