Université d'Avignon — 2020-2021
Algèbre 2 — Licence 1 Mathématiques-Informatique

CC1 : 15 mars 2021 : 10h-11h30 (1h ; 1h20 pour les tiers temps)

On attachera le plus grand soin à la présentation et aux calculs. Aucun document ni appareil numérique autorisé. Barême indicatif : 5 points par exercice environ.

Exercice 1. *Calculer l'inverse de la matrice suivante*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

<u>Correction</u> : on écrit le système

$$\begin{cases} x+y-z=y_1 \\ x-z=y_2 \\ -2x+y-2z=y_3 \end{cases}$$

En faisant $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ on trouve $-y = y_2 - y_1$. En faisant $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1$ on trouve $3y - 4z = 2y_1 + y_3$ ce qui donne

$$x = \frac{y_1}{4} + \frac{y_2}{4} - \frac{y_3}{4} \ ; \ y = y_1 - y_2 \ ; \ z = \frac{y_1}{4} - \frac{3y_2}{4} - \frac{y_3}{4}.$$

L'inverse de la matrice est donc

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 1 & -1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{-3}{4} & \frac{-1}{4} \end{pmatrix}$$

Exercice 2. *L'exercice est composé de trois questions indépendantes.*

1) Soit A une matrice réelle de taille n. Donner l'expression de sa trace en fonction de ses coefficients.

2) Soit P, Q, R, S quatre matrices réelles de taille n. Parmi les matrices $PRQS$, $SRPQ$, $SPRQ$, $SPQR$, $RSQP$, laquelle a-t-elle la même trace que $PQRS$?

3) Soit $M_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles carré de taille n et soit I_n la matrice identité de $M_n(\mathbb{R})$. Existe-t-il deux matrices $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ telles que $AB - BA = I_n$? (justifier).

<u>correction</u> : $Tr(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,i}$; en utilisant $Tr(AB) = Tr(BA)$, on a donc $Tr(PQRS) = Tr(SPQR)$. Si $AB - BA = I_n$, on prend la trace et donc $0 = n$ absurde. Donc, cette relation est impossible.

Exercice 3. *L'exercice est composé de deux questions indépendantes.*

1) Soit A, B deux matrices réelles de taille n vérifiant $AB = A + I_n$. Montrer que A est inversible puis en déduire que $AB = BA$.

2) Soit $M_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles de taille n et soit I_n la matrice identité de $M_n(\mathbb{R})$. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^3 - A^2 - I_n = 0$. Montrer que la matrice A est inversible.

<u>solution</u> : On a $A(B - I_n) = I_n$. Donc $(B - I_n)A = I_n$ Donc $BA - A = I_n$ Donc $BA = A + I_n = AB$. Puis pour la seconde question : $A(A^2 - A) = I_n$ donc A est inversible d'inverse $A^2 - A$.

Exercice 4. *Soit a, b, c, d quatre nombre réels. On considère le système linéaire*

$$\begin{cases} x + az + a^2t = 1 \\ y + bz + b^2t = 0 \\ x + cz + c^2t = 1 \\ y + dz + d^2t = 0. \end{cases}$$

1) Calculer le rang du système en fonction des paramètres a, b, c, d.

2) Résoudre ce système dans le cas où la solution est unique.

solution : On rappelle que le rang d'un système linéaire est le rang du système linéaire homogène associé. Ainsi, dans les manipulations qui suivent, on peut prendre comme second membre le vecteur $(0, 0, 0, 0)$.

En faisant $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, le système devient

$$\begin{cases} x + az + a^2t & = 1 \\ y + bz + b^2t & = 0 \\ y + dz + d^2t & = 0 \\ (c-a)z + (c^2 - a^2)t & = 0 \end{cases}$$

1er cas : $c = a$. Le système est équivalent à

$$\begin{cases} x + az + a^2t & = 1 \\ y + bz + b^2t & = 0 \\ (d-b)z + (d^2 - b^2)t & = 0 \end{cases}$$

a) $d = b$. Alors le système est de rang 2 (z, t libres).
b) $d \neq b$. Alors le système est de rang 3 car la 3ème équation peut s'écrire $z + (d + b)t = 0$ et donc t est libre.

2ème cas : $c \neq a$. Le système devient

$$\begin{cases} x + az + a^2t & = 1 \\ y + bz + b^2t & = 0 \\ y + dz + d^2t & = 0 \\ z + (c+a)t & = 0 \end{cases}$$

ou encore en faisant $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$

$$\begin{cases} x + az + a^2t & = 1 \\ y + bz + b^2t & = 0 \\ z + (c+a)t & = 0 \\ (d-b)z + (d^2 - b^2)t & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + az + a^2t & = 1 \\ y + bz + b^2t & = 0 \\ z + (c+a)t & = 0 \\ (d-b)(d+b-a-c)t & = 0 \end{cases}$$

en faisant $L_4 \leftarrow L_4 - (d - b)L_3$

a) si $d = b$ ou $d + b - a - c = 0$, alors le rang vaut 3 (la variable t est libre).
b) si $d \neq b$ et $d + b - a - c \neq 0$, alors le système est de rang 4 (Cramer, une unique solution). On trouve $t = z = y = 0$ et $x = 1$.

2) C'est fait au-dessus, c'est le dernier cas $d \neq b$ et $d + b - a - c \neq 0$; alors le système est de rang 4 et admet une seule et unique solution.

Exercice 5. *Soit a, b deux réels et A la matrice définie par*

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$A^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1}b \\ 0 & a^n \end{pmatrix}.$$

solution : immédiat par réccurrence sur n (vérifier $n = 1$, puis supposer la forme pour A^n. En multipliant par A, on trouve l'expression au rang $n + 1$).