systèmes linéaires (correction [1])

On rappelle que lire une solution ou un corrigé sans avoir cherché un exercice n'est pas utile en général.

Exercice 1 (Question de cours). *Qu'est-ce qu'un système linéaire homogène, non-homogène ? Etant donnè un système linéaire (S) de m èquations à n inconnues (non nècessairement homogène), rappeler la dèfinition du rang du système. Quelles valeurs le rang de (S) peut-il prendre ? Quand est-ce qu'un système linéaire est incompatible ?*

solution : homogène = sans second membre ; non-homogène = avec second membre ; le rang est l'entier r où $n-r$ est le nombre d'inconnues choisies arbitrairement ; il prend ses valeurs entre 0 et n où n est le nombre d'inconnues. Le système est incompatible lorsqu'il contient une ligne $0=\beta$ avec $\beta \neq 0$ (sous formé échelonnée).

Exercice 2. *résoudre les systèmes linéaires suivants en précisant à chaque fois la dimension de l'espace des solutions et le rang du système :*

$$(a)\left\{\begin{array}{ll} 8x-2y+z=3 & (L_1)\\ 12x+y-2z=1 & (L_2)\\ 96x-16y+5z=29, & (L_3)\end{array}\right.$$

On effectue les transformations suivantes : $L_2 \leftarrow 2L_2-3L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3-8L_2$ et on obtient :

$$\left\{\begin{array}{rll} 8x-2y+z & =3 & (L_1)\\ 8y-7z & =-7 & (L_2)\\ -24y+21z & =21, & (L_3)\end{array}\right.$$

on remarque que L_3 est la meme équation que L_2, donc il s'ensuit que (a) est équivalent à

$$\left\{\begin{array}{rl} 8x-2y+z & =3\\ y & =\frac{7}{8}(z-1)\\ z & =z,\end{array}\right.$$

d'où le système admet une infinité de solutions :

$$\mathcal{S}=\{(\frac{1}{32}(3z+5),\frac{7}{8}(z-1),z)\ ;\ z\in\mathbb{R}\}.$$

- Dimension de l'espace des solutions = 1
- Rang : $r=3-1=2$.

$$(b)\left\{\begin{array}{ll} 2x-2y+z-t+u=1 & (L_1)\\ x+2y-z+t-2u=1 & (L_2)\\ 4x-10y+5z-5t+7u=1 & (L_3)\\ 2x-14y+7z-7t+11u=-1 & (L_4),\end{array}\right.$$

On effectue les transformations suivantes :$L_1 \leftrightarrow L_2$ et $L_2 \leftarrow L_2-2L_1$, $L_3 \leftarrow L_3-4L_1$ et $L_4 \leftarrow L_4-2L_1$ et on obtient :

$$\left\{\begin{array}{rl} x+2y-z+t-2u & =1\\ -6y+3z-3t+5u & =-1\\ -18y+9z-9t+15u & =-3\\ -18y+9z-9t+15u & =-3,\end{array}\right.$$

1. Correction par Anas Bouali et Terence Bayen

ce qui est équivalent à :

$$\begin{cases} x+2y-z+t-2u &= 1 & (L_1) \\ -6y+3z-3t+5u &= -1 & (L_2) \\ -18y+9z-9t+15u &= -3 & (L_3) \end{cases}$$

On effectue les transformations suivantes : $L_2 \leftarrow -L_2$ *et* $L_3 \leftarrow L_3 + L_3 + 3L_2$ *et on obtient que* (b) *est équivalent à :*

$$\begin{cases} x+2y-z+t-2u &= 1 \\ 6y-3z+3t-5u &= 1 \\ 0 &= 0, \end{cases}$$

d'où le système admet une infinité de solutions :

$$\mathcal{S} = \{(\frac{1}{3}(u+2), \frac{1}{6}(3z-3t+5u+1), z, t, u)\ ;\ (z,t,u) \in \mathbb{R}^3\}.$$

- Dimension de l'espace des solutions $= 3$
- Rang : $r = 5-3 = 2.$

$$(c) \begin{cases} 2x_1+3x_2+5x_3 &= 3 & (L_1) \\ x_1-3x_2-6x_3 &= 2 & (L_2) \\ 3x_1-x_3 &= 4 & (L_3), \end{cases}$$

Si on additionne les deux premières équations on obtient : $3x_1 - x_3 = 5$ *(absurde avec* L_3*) ce qui implique que* (c) *n'admet pas de solution. Notez que l'on est allé un peu plus vite qu'en faisant la méthode du pivot de Gauss, mais on trouverait également une contradiction par la méthode du pivot de Gauss.*

$$(d) \begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3 &= -1 & (L_1) \\ x_1-5x_2+x_3 &= 6 & (L_2) \\ 3x_1+3x_2+7x_3 &= 0 & (L_3) \\ x_1+2x_2-4x_3 &= -1 & (L_4). \end{cases}$$

On intervertit L_1 *et* L_2 *puis on fait* $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$*,* $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$*,* $L_4 \leftarrow L_4 - L_1$ *ce qui donne*

$$\begin{cases} x_1-5x_2+x_3 = 6 \\ 13x_2-3x_3 = -13 \\ 18x_2+4x_3 = -18 \\ 7x_2-5x_3 = -7 \end{cases}$$

On voie qu'il est astucieux de faire l'opération $13L_3 - 18L_2$ *qui donne tout de suite* $x_3 = 0$*, puis* $x_2 = -1$ *par la dernière équation. Ce système admet donc une unique solution :*

$$\mathcal{S} = \{(1,-1,0)\}.$$

- Dimension de l'espace des solutions $= 0$
- Rang : $r = 3-0 = 3.$

$$(e) \begin{cases} 2x-y+3z &= 1 & (L_1) \\ -4x+2y+z &= 3 & (L_2) \\ -2x+y+4z &= 4 & (L_3) \\ 10x-5y-6z &= -10 & (L_4) \end{cases}$$

En faisant la méthode du pivot on obtient

$$\begin{cases} 2x-y+3z = 1 \\ 7z = 5 \\ 7z = 5 \\ -21z = -15 \end{cases}$$

Ce système admet donc une infnité des solutions :

$$\mathcal{S} = \{(\frac{1}{14}(7y-8), y, \frac{5}{7})\ ;\ y \in \mathbb{R}\}.$$

- Dimension de l'espace des solutions $= 1$
- Rang : $r = 3 - 1 = 2$.

$$(f)\begin{cases} x - y + z + t = 0 \\ 3x - 3y + 3z + 2t = 0 \\ x - y + z = 0 \\ 5x - 5y + 5z + 7t = 0 \end{cases}$$

En faisant la méthode du pivot de Gauss, on obtient $t = 0$ *trois fois. Ce système admet donc une infnité des solutions :*

$$\mathcal{S} = \{(y - z, y, z, 0),\ ;\ (y, z) \in \mathbb{R}^2\}.$$

- Dimension de l'espace des solutions $= 2$
- Rang : $r = 4 - 2 = 2$.

Exercice 3. *Vrai ou faux ?*
1. Si un système linéaire a plus d'inconnues que d'équations, alors il a une infinité de solutions.
2. Si un système linéaire a plus d'équations que d'inconnues, alors il a au plus une solution.
3. Si le rang d'un système linéaire est égal au nombre d'équations et strictement inférieur au nombre d'inconnues, alors le système a une infinité de solutions.
4. Si un système a une solution unique, alors il a autant d'équations que d'inconnues.
5. Si un système a une solution unique, alors son rang est égal au nombre d'inconnues
6. Si un système a un second membre nul et si son rang est égal au nombre d'équations, alors sa solution est unique.

1.Faux : le système suivant à 3 inconnues et 2 équations n'a pas de solution :

$$\begin{cases} x + y + z = 1, \\ x + y + z = 2. \end{cases}$$

2. Faux : le système suivant à 3 équations et deux inconnues admet une infinité de solutions :

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + 2y = 0 \\ 3x + 3y = 0 \end{cases}$$

3. Vrai. Appelons m le nombre d'équations et n le nombre d'inconnues. En appliquant la méthode du pivot de Gauss, le système initial est équivalent à un système du type

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + & a_{1,2}x_2 + & \ldots & +a_{1,n}x_n = & b_1 \\ & a_{2,2}x_2 + & \ldots & +a_{2,n}x_n = & b_2 \\ \vdots & & & & \\ & & a_{m,m}x_m + \ldots & +a_{m,n}x_n = & b_m \end{cases}$$

où $a_{i,i} \neq 0$ pour tout $1 \leq i \leq m$. Ainsi, peuvent être considérées comme variables auxiliaires les variables $x_{m+1}, \ldots, x_n$ (possible car $m < n$). D'où le résultat.

4. Faux. Voir exercice précédent, exemple d) ou bien le système linéaire suivant à une inconnue et deux équations

$$\begin{cases} x = 0 \\ 5x = 0 \end{cases}$$

5. Vrai : Le rang du système est $r = n - 0$ où n est le nombre d'inconnues et 0 correspond au nombre d'inconnues auxiliaires (il n'y en a pas).
6. Faux : soit le système $x + y = 0$ à 1 équations et deux inconnues. Son rang vaut 1. Il admet une infinité de solutions.

Exercice 4. *Déterminer $\lambda \in \mathbb{R}$ pour que le système suivant admette des solutions différentes de* $(0, 0, 0)$*, puis résoudre ce système suivant les valeurs de λ :*

$$(S)\begin{cases} 3x - 7y + \lambda z &= 0 \quad (L_1) \\ x - 4y - 2z &= 0 \quad (L_2) \\ 2x - (\lambda + 3)y - 2z &= 0 \quad (L_3) \end{cases}$$

On effectue les transformations suivantes : $L_1 \leftrightarrow L_2$, $L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$, et on obtient :

$$\begin{cases} x - 4y - 2z &= 0 \\ 5y + (6 + \lambda)z &= 0 \\ (5 - \lambda)y + 2z &= 0, \end{cases}$$

En faisant $5L_3 - (5 - \lambda)L_2$ à partir du système précédent, nous obtenons

$$(\lambda^2 + \lambda - 20)y = 0.$$

- Si $(\lambda^2 + \lambda - 20) \neq 0$, donc $y = 0$ et par conséquent $z = x = 0$.
- Si $(\lambda^2 + \lambda - 20) = 0$, c'est à dire $\lambda \in \{-5, 4\}$:
(i) Si $\lambda = 4$, donc (S) admet une infinité de solutions :

$$\mathcal{S} = \{(3y, y, -\frac{1}{2}y), \ ; \ y \in \mathbb{R}\},$$

(ii) Si $\lambda = -5$, donc (S) admet une infinité de solutions :

$$\mathcal{S} = \{(6y, y, -5y), \ ; \ y \in \mathbb{R}\}.$$

En conclusion, les deux valeurs de λ sont 4 et -5.

Exercice 5. *Résoudre en fonction de a*

$$\begin{cases} x + ay + a^2z = 0 & (L_1) \\ a^2x + y + az = 0 & (L_2) \\ ax + a^2y + z = 0 & (L_3) \end{cases}$$

On effectue les transformations suivantes : $L_2 \leftarrow L_2 - a^2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - aL_1$ et on obtient

$$\begin{cases} x + ay + a^2z &= 0 \quad (L_1) \\ (1 - a^3)y + (a^3 - a)z &= 0 \quad (L_2) \\ (1 - a^3)z &= 0, \quad (L_3) \end{cases}$$

si $(1 - a^3) \neq 0$ alors $z = 0$ ce qui implique $\mathcal{S} = \{(0, 0, 0)\}$,
si $(1 - a^3) = 0$ alors $a = 1$ (on est dans $\mathbb{R}$) donc on remplace a par 1 et on obtient

$$\begin{cases} x + y + z &= 0 \\ 0 &= 0 \\ 0 &= 0, \end{cases}$$

Il s'ensuit que :

$$\mathcal{S} = \{(-y-z, y, z), \ ; \ y, z \in \mathbb{R}\}.$$

Exercice 6. *Soient a, b, c et m des nombres réels. On considère le système linéaire*

$$(S) \left\{ \begin{array}{rll} x - y + 2z & = a & (L_1) \\ mx + (1-m)y + 2(m-1)z & = b & (L_2) \\ 2x + my - (3m+1)z & = c & (L_3). \end{array} \right.$$

Déterminer suivant les valeurs de a, b, c, m l'ensemble des solutions de (S).

On effectue les transformations suivantes : $L_2 \leftarrow L_2 - mL_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$ et on obtient :

$$(S) \left\{ \begin{array}{rl} x - y + 2z & = a \\ y - 2z & = b - ma \\ (m+2)y - (3m+5)z & = c - 2a, \end{array} \right.$$

puis on élimine y dans L_3 avec : $L_3 \leftarrow L_3 - (m+2)L_2$:

$$(S) \left\{ \begin{array}{rl} x - y + 2z & = a \\ y - 2z & = b - ma \\ -(m+1)z & = (c-2a) - (m+2)(b-ma), \end{array} \right.$$

- si $m = -1$ et $c - 3a - b \neq 0$ alors $\mathcal{S} = \emptyset$.
- si $m = -1$ et $c - 3a - b = 0$ alors $\mathcal{S} = \{(b + 2a, 2z + b + a, z) \ ; \ z \in \mathbb{R}\}$,
- si $m \neq -1$ alors le système admet une solution unique (trois pivots non nuls) :

$$\mathcal{S} = \left\{ ((1-m)a + b, \frac{a(-3m^2 - 5m + 4) + b(3m+5) - 2c}{m+1}, \frac{a(m^2 + 2m - 2) - b(m+2) + c}{m+1}) \right\}.$$

Exercice 7. *Résoudre le système linéaire*

$$\left\{ \begin{array}{rll} x + my + 2z & = m & (L_1) \\ -2x + y + (m-2)z & = 1 & (L_2) \\ mx + y + 2z & = 2m - 1 & (L_3) \end{array} \right.$$

On applique la méthode du pivot de Gauss, on effectue les tranformations suivantes : $L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_2 - mL_1$

$$\left\{ \begin{array}{rll} x + my + 2z & = m & (L_1) \\ (2m+1)y + (m+2)z & = 2m + 1 & (L_2) \\ (1-m)(1+m)y + 2(1-m)z & = -(m-1)^2 & (L_3) \end{array} \right.$$

On remarque que $(1-m)$ est en facteur partout en L_3. On a donc envie de diviser cette ligne par $(1-m)$. Pour avoir le droit d'effectuer cette opération, il faut que $(1-m) \neq 0$, on commence alors une discussion selon les valeur de m.
(i) Si $m = 1$ donc le système est équivalent à

$$\left\{ \begin{array}{rl} x + y + 2z & = 1 \\ 3y + 3z & = 3 \\ 0 & = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{ll} x & = 1 - y - 2z = -z \\ y & = 1 - z, \end{array} \right.$$

d'oú : $\mathcal{S}=\{(-z,1-z,z)\ ;\ z\in\mathbb{R}\}$.
On suppose maintenant $m\neq 1$; on peut diviser L_3 par $(1-m)$ et on obtient que le système est équivalent à

$$\begin{cases} x+my+2z &= m \qquad (L_1)\\ (2m+1)y+(m+2)z &= 2m+1 \quad (L_2)\\ (1+m)y+2z &= m-1 \quad (L_3)\end{cases}$$

On échange L_2 et L_3 ($L_2\leftrightarrow L_3$) pour avoir dans la deuxième ligne au moins un coefficient indépendant de m, puis on continue la méthode du pivot en eliminant les z de la dernière ligne à l'aide de L_2 : $L_3\leftarrow 2L_3-(m+2)L_2$

$$\begin{cases} x+my+2z &= m\\ 2z+(1+m)y &= m-1\\ (4m+2-(m+2)(m+1))y &= 4m+2-(m+2)(m-1)=-m^2+3m+4,\end{cases}$$

ce qui est équivalent à

$$\begin{cases} x+my+2z &= m\\ 2z+(1+m)y &= m-1\\ m(1-m)y &= -(m+1)(m-4)\end{cases}$$

(ii) Si $m=0$ alors le système est équivalent à

$$\begin{cases} x+2z &= 0\\ 2z+y &= -1\\ 0 &= 4\end{cases}$$

ce qui est absurde.
(iii) Si $m\neq 0$ et $m\neq 1$ on peut diviser par $m(1-m)$ et retrouve que

$$\begin{cases} x= \frac{2(m^2-2m-2)}{m(m-1)}\\ z= \frac{4m+2}{m(m-1)}\\ y= \frac{(m+1)(m-4)}{m(m-1)}\end{cases}$$

donc : $\mathcal{S}=\{(\frac{2(m^2-2m-2)}{m(m-1)},\frac{(m+1)(m-4)}{m(m-1)},\frac{4m+2}{m(m-1)})\}$.

Exercice 8. *Soient λ et μ des paramètres réels. On considère le système*

$$(S)\quad\begin{cases} x-2y-3z-t &= -\lambda\\ x-y-2z &= 1-\lambda\\ 2x-4y-5z &= -2\lambda\\ x-(\lambda+2)y-(\lambda+2)z &= -3\lambda-\mu\\ x-3z-3t &= \lambda^2.\end{cases}$$

1) Discuter suivant les valeurs de λ et μ l'existence ou non de solutions de (S).
2) résoudre (S) lorsque $\lambda=-2$ puis lorsque $\lambda=-\mu=1$ (note : pour éviter les erreurs de calculs, vérifiez que les solutions que vous trouvez en sont bien).

solution : on applique la méthode du pivot de Gauss ce qui donne successivement

$$\begin{cases} x-2y-3z-t &= -\lambda\\ y+z+t &= 1\\ z+2ty &= 0\\ -\lambda y+(1-\lambda)z+t &= -2\lambda-\mu\\ 2y-2t &= \lambda^2+\lambda\end{cases}$$

et

$$\left\{\begin{array}{rl} x-2y-3z-t & =-\lambda \\ y+z+t & =1 \\ -2z-4t & =\lambda^2+\lambda-2 \\ z+(\lambda+1)t & =-\lambda-\mu \\ z+2t & =0. \end{array}\right.$$

Nous en déduisons les cas suivants : a) si $\lambda \neq 1$ ou $\lambda \neq -2$, alors le système n'a pas de solution (regarder la ligne 3 et la ligne 5).
b) si $\lambda = 1$.
- (i) Si $\mu \neq -1$ alors le système n'a pas de solution. - (ii) Si $\mu = -1$ alors le système admet une infinité de solutions

$$\{(1-3t, 1+t, -2t, t)\ ;\ t \in \mathbb{R}\}.$$

c) si $\lambda = -2$, alors le système est équivalent à

$$\left\{\begin{array}{rl} x-2y-3z-t & =-\lambda \\ y+z+t & =1 \\ z+2t & =0 \\ z-t & =2-\mu. \end{array}\right.$$

qui admet une unique solution

$$\left(6-\mu, \frac{1}{3}+\frac{\mu}{3}, \frac{4}{3}-\frac{2\mu}{3}, -\frac{2}{3}+\frac{\mu}{3}\right).$$

Exercice 9. *Discuter et résoudre le système (distinguer 3 cas $m = 1$, $m = -3$, $m \notin \{1, -3\}$) :*

$$\left\{\begin{array}{ll} mx+y+z+t & =a \\ x+my+z+t & =b \\ x+y+mz+t & =c \\ x+y+z+mt & =d\,. \end{array}\right.$$

- Si $m = -3$ et $a+b+c+d \neq 0$, il n'y a pas de solution et si $a = -b-c-d$ alors il existe une unique solution

$$\mathcal{S} = \{(\frac{1}{4}(b+c+2d+4t), \frac{1}{4}(-b+d+4t), \frac{1}{4}(-c+d+4t), t)\ ;\ t \in \mathbb{R}\},$$

- Si $m = 1$ et $a = b = c = d$ alors il existe une unique solution

$$\mathcal{S} = \{(x, y, d-t-x-y, t)\ ;\ (x, y, t) \in \mathbb{R}^3\},$$

et si la condition $a = b = c = d$ n'est pas vérifiée, il n'y a pas de solution.
- si $m \neq 1$ et $m \neq -3$ et $b+c \neq 2d$ et $a = -b-c+3d$ alors, il existe une unique solution

$$\mathcal{S} = \{(\frac{-b(m+3)-c(m+3)+d(3m+5)}{(m-1)(m+3)}, \frac{b(m+3)-4d}{(m-1)(m+3)}, \frac{c(m+3)-4d}{(m-1)(m+3)}, \frac{d}{m+3})\},$$

- si $m \neq 1$ et $m \neq -3$ et $b+c \neq 2d$ et $a \neq -b-c+3d$ alors, il existe une unique solution

$$\mathcal{S} = \{(\frac{a(m+2)-3d}{(m+3)(m-1)}, -\frac{a-b(m+2)+c+d}{(m+3)(m-1)}, -\frac{a+b+(2-m)c+d}{(m+3)(m-1)}, -\frac{a+b+c-(m+2)d}{(m+3)(m-1)})\}.$$

Exercice 10. *Résoudre le système*

$$\begin{cases} x^3y^2z^6 = 1 \\ x^4y^5z^{12} = 2 \\ x^2y^2z^5 = 3 \end{cases}$$

Notons que le système est non linéaire, on applique le ln pour les équations $1, 2$ et 3 (astuce !) et on obtient :

$$\begin{cases} 3\ln(x) + 2\ln(y) + 6\ln(z) = 0 \\ 4\ln(x) + 5\ln(y) + 12\ln(z) = \ln(2) \\ 2\ln(x) + 2\ln(y) + 5\ln(z) = \ln(3), \end{cases}$$

posons : $X = \ln(x)$, $Y = \ln(y)$ et $Z = \ln(z)$. Donc on aura

$$\begin{cases} 3X + 2Y + 6Z = 0 \\ 4X + 5Y + 12Z = \ln(2) \\ 2X + 2Y + 5Z = \ln(3). \end{cases}$$

ce qui donne $X = 6\ln 3 - 2\ln 2$, $Y = 12\ln 3 - 3\ln 2$, $Z = -7\ln 3 + 2\ln 2$. On obtient (x, y, z) en passant par exp.

Exercice 11. *Cet exercice est pour aller plus loin (il est plus difficile que les autres). Soit $n \geq 3$. On s'intèresse à la questions suivante : existe-t-il un polygone à n cà´tès dont les milieux des cà´tès sont fixès ?*
1) On considère n points dans le plan complexe d'affixes a_1,...,a_n. On appelle z_1,...,z_n les affixes des n sommets du polygone. Mettre en èquation le problème. En dèduire un système linéaire à Résoudre.
2) Sur ce système, effectuer l'opèration $L_1 - L_2 + L_3 - L_4 + \cdots$. En dèduire une condition sur les affixes $a_1, ..., a_n$ pour que le problème ait une solution.

Demander à votre chargé de TD une indication pour la solution.