Feuille 3 : Sous-espaces vectoriels de K^n ($K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$)

Exercice 1. *Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ muni des lois usuelles ? Faire un dessin.*

$$E_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2/\ 2x - 8y = 0\} \quad E_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2/\ x = 1\}$$
$$E_3 = \{(x,x)/\ x \in \mathbb{R}\} \quad E_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2/\ x^4 + (x-y)^2 = 0\}$$
$$E_5 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2/\ xy \geq 0\} \quad E_6 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2/\ x^2 - y^2 = 0\}$$

Solution : On rappelle que F est un SEV de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si F est non vide et si pour tout $x, y \in F$, pour tout $\lambda, \mu \in R$, on a $\lambda x + \mu y \in F$. Lorsque vous avez l'intuition que F n'est PAS un SEV, il faut fournir un contre-exemple !

Revenons à l'exercice. Les seuls ensembles qui ne sont pas des SEV sont E_2, E_5 et E_6 (pour E_4, vérifier que $E_4 = \{(0,0)\}$ est le sous espace nul ; c'est un piège). Pour les autres, reprendre les arguments du cours pour montrer que ce sont des SEV (utiliser la définition ci-dessus). Il est souvent commode d'exprimer le SEV comme un *vect* (sous-espace vectoriel engendré), par exemple $E_3 = vect((1,1))$. Je rappelle le résultat de cours que le sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ engendré par plusieurs vecteurs est un SEV de $\mathbb{R}^n$.

Pour les contre-exemple, vous pouvez faire un dessin. Par exemple, pour E_5, on a $(-1,0)$, $(0,1) \in F$ et $(-1,0) + (0,1) = (-1,1) \notin F$.

Exercice 2. *Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ muni des lois usuelles ?*

$$E_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3/\ x = y^2 + z^2\} \quad E_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3/\ x = y + z \ \textit{et}\ x + y = 0\}$$
$$E_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3/\ x = y + z \ \textit{ou}\ x + y = 0\} \quad E_4 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3/\ xy = z\}$$
$$E_5 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3/\ x = y = z\} \quad E_6 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3/\ x = 0\}$$

Solution : E_1, E_3 (réunion de 2 SEV), E_4 (non linéaire) ne sont pas des SEV. Les autres le sont. Reprendre les arguments du cours pour montrer que ce sont des SEV.

Exercice 3. *Dans chacun des cas suivants, E est un espace vectoriel muni des lois usuelles et A est une partie de E. Déterminer l'espace vectoriel engendré par A et en donner un supplémentaire dans E.*
1) $E = \mathbb{R}^2$ et $A = \{(1,2)\}$. Représenter graphiquement vect(A).
2) $E = \mathbb{R}^3$ et $A = \{(1,0,0),(1,1,0)\}$.

Solution : 1) A est une droite vectorielle engendrée par le vecteur $u = (1,2)$. On prend $v = (1,0)$ (il y a beaucoup de choix possible). $\{u,v\}$ est libre, donc $Vect(u,v) = \mathbb{R}^2$, donc $\mathbb{R}v$ est un supplémentaire de A.
2) Posons $u = (1,0,0)$, $v = (1,1,0)$ et $w = (0,0,1)$ (l'idée étant de prendre la dernière coordonnée non nulle pour w). On vérifie que $\{u,v,w,\}$ est libre car $w \notin Vect(u,v)$. D'où $Vect(u,v,w) = \mathbb{R}^3$. Ainsi, $\mathbb{R}w$ est un supplémentaire de $Vect(u,v)$.

Exercice 4. *Soit F, G deux sev de $\mathbb{R}^n$.*
1) Que signifie l'écriture $F \oplus G$? Que signifie que F et G sont deux sev supplémentaires dans $\mathbb{R}^n$?
2) Trouver un supplémentaire dans $\mathbb{R}^4$ de

$$F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4\ ;\ x - 2y = 0 \text{ et } y - 3z + t = 0\}.$$

Solution : 1) voir le cours.
2) Le système définissant F donne $x = 6z - 2t$ et $y = 3z - t$. Ainsi $\{u, v\}$ est une base de F où $u = (6, 3, 1, 0)$, $v = (-2, -1-, 0, 1)$ (en effet, par construction elle est génératrice et ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires). Regardez attentivement les 3ème et 4ème coordonnées de ces 2 vecteurs. Du coup, on a envie de poser $w = (1, 0, 0, 0)$ et $x = (0, 1, 0, 0)$. On écrit une relation de liaison $au + bv + cw + dx = 0$ pour trouver que $a = b = c = d = 0$. Ainsi, la famille de 4 vecteurs $\{u, v, w, x\}$ est libre dans $\mathbb{R}^4$. C'est une base de $\mathbb{R}^4$. D'où $Vect(w, x)$ est un supplémentaire de F.

Exercice 5. *Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \ x - y + z = 0\}$. Montrer que F est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par $\{(1, 0, -1), (0, -1, -1)\}$. Donner un sous-espace supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^3$.*

Solution : On vérifie que F est bien de dimension 2 (il s'agit d'un plan vectoriel dans $\mathbb{R}^3$). Si vous n'êtes pas sur, redémontrez le. Les deux vecteurs proposés u et v constituent une famille libre (pas colinéaires) et sont bien dans F (à vérifier, facile). Ainsi $Vect(u, v) \subset F$ et $dim(Vect(u, v)) = dim(F) = 2$, d'où $F = Vect(u, v)$.

Exercice 6. *Les familles suivantes sont-elles libres ?*

1. *(v_1, v_2, v_3) dans $\mathbb{R}^3$ avec $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (0, 2, 2)$ et $v_3 = (3, 7, 1)$.*
2. *(v_1, v_2, v_3) dans $\mathbb{R}^3$ avec $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 1, 1)$ et $v_3 = (1, 1, 1)$.*
3. *(v_1, v_2, v_3) dans $\mathbb{R}^4$ avec $v_1 = (1, 0, 0, 0)$, $v_2 = (0, 1, 1, 0)$ et $v_3 = (1, 1, 1, 1)$.*
4. *(v_1, v_2, v_3, v_4) dans $\mathbb{R}^4$ avec $v_1 = (1, 1, 0, 0)$, $v_2 = (1, 2, 0, 0)$, $v_3 = (0, 1, 1, 1)$ et $v_4 = (0, 0, 1, 1)$.*

Solution : méthode de toute l'exercice : on écrit une relation de liaison et on résout le système linéaire correspondant par la méthode du pivot de Gauss.
1) Le système est $\alpha + 3\gamma = 0$, $2\beta + 7\gamma = 0$, $\alpha + 2\beta + \gamma = 0$. L'unique solution est $\alpha = \beta = \gamma = 0$. La famille est libre.
2) $v_1 + v_2 = v_3 \Rightarrow$ famille liée.
3) Ecrire le système : on voie facilement que c'est libre.
4) En écrivant la relation de liaison ou en regardant avec les jumelles les 4 vecteurs on voie $v_4 - v_3 = v_2 - v_1$ donc la famille est liée.

Exercice 7. *Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soient a_1, a_2, a_3 trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ définis par $a_1 = (0, -2, 3)$, $a_2 = (1, 2, 1)$, $a_3 = (3, 0, -4)$.*
1) Montrer que (a_1, a_2, a_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
2) Soit u le vecteur de coordonnées $(1, 1, 1)$ dans la base (a_1, a_2, a_3). Quelles sont ses coordonnées dans la base (e_1, e_2, e_3) ?
3) Soit v le vecteur de coordonnées $(1, 1, 1)$ dans la base (e_1, e_2, e_3). Quelles sont ses coordonnées dans la base (a_1, a_2, a_3) ?

Solution : 1) On écrit une relation de liaison. Cela donne $\beta + 3\gamma = -2\alpha + 2\beta = \beta - 4\gamma = 0$ d'où $\alpha = \beta = \gamma = 0$ et la famille est libre. C'est donc une base (3 vecteurs formant une famille libre dans $\mathbb{R}^3$).
2) Simple calcul : $u = a_1 + a_2 + a_3 = (4, 0, 0)$

3) Attention : cette fois on est dans la base canonique ! ! On écrit $xa_1 + ya_2 + za_3 = v = (1, 1, 1)$. On trouve $y + 3z = -2x + 2y = 3x + y - 4z = 1$. D'où $(7/32)a_1 + (23/32)a_2 + (3/32)a_3 = (1, 1, 1)$ (résoudre le système linéaire).

Exercice 8. *Soit dans $\mathbb{R}^3$ la famille $\{u_1, u_2, u_3\}$ définie par $u_1 = (1, a, 3)$, $u_2 = (1, 1, a)$, $u_3 = (a, 1, 3)$. Etudier suivant les valeurs de a l'indépendance linéaire de la famille et préciser à chaque fois qu'elle est liée une relation de liaison.*

Solution : Par la méthode du pivot, on trouve (écrire $\alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 = 0$).

$$\begin{cases} \alpha + \beta + a\gamma = 0 \\ (1-a)\beta + (1-a^2)\gamma = 0 \\ (a-3)\beta + 3(1-a)\gamma = 0 \end{cases}$$

1) 1er cas : $a = 1$. D'où $\alpha + \beta + \gamma = 0$ et $\beta = 0$. Relation de liaison $u_1 - u_3 = 0$.
2) 2ème cas : $a \neq 1$. D'où en sautant des étapes (méthode du pivot) :

$$\begin{cases} \alpha + \beta + a\gamma = 0 \\ \beta + (1+a)\gamma = 0 \\ -(a+3)(a-2)\gamma = 0 \end{cases}$$

(i) si $a = -3$, alors le système est liée. On trouve $\alpha = \gamma$, $\beta = 2\gamma$. D'où (prendre le plus simple $\gamma = 1$), on a $u_1 + 2u_2 + u_3 = 0$.
(ii) si $a = 2$, alors le système est lié. D'où $\alpha = \gamma$, $\beta = -3\gamma$. Ainsi (prendre $\gamma = 1$), on trouve que $u_1 - 3u_2 + u_3 = 0$.
(iii) si $a \notin \{1, 2, -3\}$, la famille est libre (le système admet uniquement la solution nulle).

Exercice 9. *Soit dans* $\mathbb{R}^3$, $u = (3, 7, 0)$, $v = (5, 0, -7)$, $w = (2, 3, -1)$, $t = (1, -1, -2)$. *Montrer que* $\{w, t\}$ *et* $\{u, v\}$ *sont deux familles libres et qu'elles engendrent le même sev de* $\mathbb{R}^3$.

solution : ces deux familles sont libres (regarder la colinéarité). Ces deux familles engendrent chacune un SEV de dimension 2. Calculons l'équation de $Vect(u, v)$. Appliquez la méthode vue en cours (voir les transparent de toute urgence si vous ne voyez pas). On trouve que $Vect(u, v) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ 7x - 3y + 5z = 0\}$. Du coup, on a immédiatement que $w, t \in F$. Ainsi $Vect(w, t) \subset F$. Comme ils ont même dimension, on a immédiatement $Vect(w, t) = F$.

Exercice 10. *Montrer qu'il existe deux réels* x, y *tels que* $(-2, x, y, 3)$ *appartienne au sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^4$ *engendré par les deux vecteurs* $u = (1, -1, 1, 2)$ *et* $v = (-1, 2, 3, 1)$.

solution : $(-2, x, y, 3) \in Vect(u, v)$ si et seulement si il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha - \beta = -2$, $-\alpha + 2\beta = x$, $\alpha + 3\beta = y$, $2\alpha + \beta = 3$. On trouve par la 1ère et 4ème équation $\alpha = 1/3$ et $\beta = 7/3$. En reportant dans les 2 autres équations, on trouve que $x = 13/3$, $y = 22/3$.

Exercice 11. *Montrer que l'ensemble* $F := \{(a, 0, 0, b) \ ; \ a, b \in \mathbb{R}\}$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^4$ *; donner deux vecteurs de* $\mathbb{R}^4$ *permettant de recouvrir* F *à l'aide de combinaisons linéaires. Trouver un système d'équations cartésiennes de* F.

solution : on a $F = Vect((1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1))$! C'est bien un sev de $\mathbb{R}^4$! Il est naturel d'introduire le sev de $\mathbb{R}^4$, $G := \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ ; \ y = z = 0\}$. On a immédiatement que $F = G$ (une inclusion + argument de dimension ou bien double inclusion).

Exercice 12. *1) Soit* $a = (2, -1, 1)$ *et* $b = (1, 0, 1)$. *Trouver une équation cartésienne de* $Vect(a, b)$.
2) Même question dans $\mathbb{R}^4$ *avec* $a = (1, 2, 3, 4)$ *et* $b = (2, 1, 2, 1)$.

solution : 1) on écrit $(x, y, z) = \lambda(2, -1, 1) + \mu(1, 0, 1)$. On résout par rapport à (λ, μ). Le système qui en résulte a une solution ssi $x + y - z = 0$ (pivot non nul). D'où l'équation cartésienne de F :

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x + y - z = 0\}.$$

Consultez le cours en pdf, vous trouverez pas mal d'exemples ce de type d'exercices.
2) Le système $(x, y, z, t) = \lambda(1, 2, 3, 4) + \mu(2, 1, 2, 1)$ donne (après calcul) :

$$\begin{cases} \lambda + 2\mu = x \\ \mu = (2/3)x - (1/3)y \\ 0 = (8/3)x - (4/3)y + z - 3x \\ 0 = (14/3)x - (7/3)y + t - 4x \end{cases}$$

D'où les 2 équations $-(1/3)x - (4/3)y + z = 0$, $(2/3)x - (7/3)y + t = 0$ définissant F de façon cartésienne.

Exercice 13. *Soit* $E := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x + y + z = 0\}$*,* $a = (1, -2, 3)$*,* $b = (2, 1, -1)$*, et* $F = Vect(a, b)$*.*
1) Montrer que E *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$*. Déterminer* $E \cap F$*.*
2) Calculer $E \cap F$ *et en déduire que* E *et* F *ne sont pas en sommes directes.*
3) Trouver la dimension de E *et de* F*, calculer* $\dim(E) + \dim(F)$*, et retrouver le résultat de la question 2.*

solution : 1-2) On vérifie que $dim(E) = dim(F) = 2$. Pour $E \cap F$, il y a 3 cas, soit cet espace est de dimension 2, 1, ou 0. On a $dim(E \cap F) \neq 2$ car $a \notin F$. Regardons pour quels $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a $\alpha(1, -2, 3) + \beta(2, 1, -1) \in F$. On trouve $\alpha + \beta = 0$. Ainsi $a - b = (-1, -3, 4) \in F$. Donc $E \cap F = Vect(a - b)$ est de dimension 1. En particulier E et F ne sont pas en somme directe (car intersection $\neq \{0\}$.
3) On a $dim(E) + dim(F) = 4$. On a $dim(F + G) = 3$ car $\{(1, 0, -1), (1, -1, 0), (2, 1, -1)\}$ est libre (notez ici qu'on a $E = Vect((1, 0, -1), (1, -1, 0))$, vérification aisée). Ainsi, par Grassmann, $dim(F \cap G) = 4 - 3 = 1$.

Exercice 14. *Soit* G *le sev de* $\mathbb{R}^4$ *engendré par* $u = (1, -1, 2, -2)$*,* $v = (4, 0, 1, -5)$ *et* $w = (3, 1, -1, -3)$ *et soit* H *l'espace défini par* $H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ ; \ x + y = 0 \text{ et } x - y + z + 2t = 0\}$*.*
1) Déterminer la dimension de G*, montrer que* H *est un sev de* $\mathbb{R}^4$ *et trouver sa dimension.*
2) Déterminer les dimensions de $G \cap H$ *et de* $G + H$*.*
3) Trouver un sev F *de* $\mathbb{R}^4$ *tel que* $(G + H) \oplus F = \mathbb{R}^4$*.*

solution : 1) on a $dim(G) = 2$. En effet, on écrit une relation de liaison et on trouve que $u - v + w = 0$ (à vous d'écrire le système linéaire résultant de la relation de liaison). Or u et v ne sont pas colinéaires. D'où le résultat. Passons à H. En résolvant le système à 2 équations on trouve que H est engendré par $u_1 = (-1/2, 1/2, 1, 0)$ et $u_2 = (-1, 1, 0, 1)$. Ainsi H est de dimension 2.
2) $G \cap H$ est de dimension 0, 1, ou 2. On constate que $u \in H$. Ainsi, $G \cap H$ est de dimension 1 ou 2. On constate que $v \notin H$. On a donc que $G \cap H = \mathbb{R}u$ et est de dimension 1. Par Grassmann, $dim(G + H) = 2 + 2 - 1 = 3$.
3) Il faut un peu d'imagination pour trouver un vecteur qui marche (le sev F que l'on cherche est de dimension 1 car $G + H$ est de dimension 3, donc il suffit de trouver un seul vecteur). Analysons $G + H$. On a par définition de $G + H$:

$$G + H = Vect(u, v, u_1, u_2) = Vect(v, u_1, u_2).$$

Pour la 2ème égalité, on a vu en effet que u se décompose sur $\{u_1, u_2\}$ car $u \in H$.

Je vais maintenant prendre un vecteur avec pas mal de zéros (pour exploiter que $\{v, u_1, u_2\}$ est libre. Mais bon, là-dessus il faut un peu d'intuition et choisir un bon vecteur... Soit $u_3 = (0, 0, 0, 1)$. On montre que la famille $\{v, u_1, u_2, u_3\}$ est libre. Ecrire le système issu de la relation de liaison : on trouve

$$\begin{cases} 4\alpha - \frac{1}{2}\beta - \gamma = 0 \\ \frac{1}{2}\beta + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \\ -5\alpha + \gamma + \delta = 0 \end{cases}$$

En résolvant, tous les coefficients sont nuls. C'est donc une base de $\mathbb{R}^4$ et on peut prendre pour F, $F = \mathbb{R}x$.

Exercice 15. *1) Peut-on exprimer les vecteurs* $u = (1, 1, 1)$ *et* $u' = (2, 2, -4)$ *comme combinaison linéaire de* $v = (1, 0, 2)$*,* $w = (2, 1, 0)$ *et* $t = (-1, 1, -6)$ *?*
2) La famille (v, w, t) *est-elle une base de* $\mathbb{R}^3$ *?*
3) Exprimer w *comme combinaison linéaire de* v *et* t*.*
4) Compléter la famille (v, t) *de façon à obtenir une base de* $\mathbb{R}^3$*.*
5) Déterminer les coordonnées de u *et* u' *dans cette nouvelle base.*

solution : 1) On écrit $(1, 1, 1) = xv + yw + zt$. On trouve que le système en (x, y, z) n'a pas de solution (faites le calcul !). Par contre, pour $(2, 2, -4)$, on trouve $x = (-2 + 3z)$, $y = 2 - z$. Ainsi $(2, 2, -4) \in Vect(v, w, t)$.

2) On écrit une relation de liaison $\alpha v + \beta w + \gamma t = 0$. On trouve $\alpha = 3\gamma$, $\beta = -\gamma$. D'où une relation de liaison $3v - w + t = 0$. Ce n'est pas une base de $\mathbb{R}^3$.
3) On a $w = 3v + t$.
4) On peut prendre $t' = (1, 0, 0)$ et on vérifie facilement que $\{v, t, t'\}$ est libre et est donc une base de $\mathbb{R}^3$.
5) pour u, il se décompose sur $\{v, t, t'\}$ et on trouve (après résolution du système linéaire $\alpha v + \beta t + \gamma t' = u$) $u = (7/2)v + t + t'$. Pour u', on sait déjà que u' se décompose sur $\{v, t\}$. on trouve facilement $u' = -2v + 2t$.

Exercice 16. *Soit* $\mathcal{F} = \{x_1, ..., x_p\}$ *une famille de* p *vecteurs de* $\mathbb{R}^n$*. Soit* A *la matrice de taille* (n, p) *dont les colonnes sont les vecteurs* $x_1, ..., x_p$*. Démontrer que les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *La famille* $\mathcal{F}$ *est liée.*
2. *Il existe* $i \in \{1, ..., p\}$ *et des réels* $(\beta_j)_{j\neq i}$ *tels que*
$$x_i = \sum_{j\neq i} \beta_j x_j$$
3. *L'équation* $Ay = 0$ *(d'inconnue* $y \in \mathbb{R}^p$*) admet au moins une solution non triviale* $y^0 \neq 0$
4. *L'équation* $Ay = 0$ *admet une infinité de solutions.*
5. *L'algorithme du pivot de Gauss effectué sur la matrice* A *aboutit à une matrice contenant un nombre de pivots strictement inférieur à* p*.*

Solution : Avant de commencer l'exercice, on note que 1. est équivalent à
$$\exists(\tilde{\beta}_1, ..., \tilde{\beta}_p) \in \mathbb{R}^p \backslash \{0\}, \ \sum_{j=1}^{p} \tilde{\beta}_j x_j = 0 \tag{0.1}$$
et que 4., i.e., $Ay = 0$, s'écrit
$$\sum_{j=1}^{p} y_j \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix} = 0 \text{ c.a.d. } \sum_{j=1}^{p} y_j x_j = 0. \tag{0.2}$$
1. $\Rightarrow$ 2. évident : commme $\beta \neq 0$, il existe $i \in \{1, ..., p\}$ tel que $\tilde{\beta}_i \neq 0$. On obtient la relation en divisant (0.1) par β_i.
2. $\Rightarrow$ 1. évident : 2. est une relation de liaison pour la famille considérée. On déduit (0.1) en posant $\tilde{\beta}_i = 1$ et $\tilde{\beta}_j = -\beta_i$, pour $j \neq i$.
1. $\Rightarrow$ 3. Par (0.1), on obtient (0.2) (poser $y_j^0 := \beta_j$ pour $1 \leq j \leq p$).
3. $\Rightarrow$ 1. On a $Ay^0 = 0$ avec $y^0 \neq 0$ comme vecteur. Par (0.2), on obtient (0.1) (poser cette fois $\beta_j := y_j^0$ pour $1 \leq j \leq p$).
3. $\Rightarrow$ 4. Si $y^0 \neq 0$ vérifie $Ay^0 = 0$, il en est de même pour ty^0 où $t \in \mathbb{R}$ est quelconque.

4. $\Rightarrow$ 3. Si l'équation $Ay = 0$ admet une infinité de solutions, elle admet bien au moins une solution y^0 avec $y^0 \neq 0$!
Par rapport à 5. Regardons l'équation homogène $Ay = 0$. Soit k le nombre de pivots. On a $k \leq p$ (souvenez vous que k représente le nombre d'inconnues principales de l'équation $Ay = 0$, équation à p inconnues). Si $k = p$, alors on obtient une équation à p inconnues et p pivots non nuls dont l'unique solution est la solution nulle. Maintenant, supposons 4., alors on doit nécessairement avoir $k < p$ car l'équation admet une infinité de solutions. Réciproquement, $k < p$ implique que l'équation $Ay = 0$ a bien une infinité de solutions.

Exercice 17. *Vrai ou faux ? (Si c'est vrai, on demande une preuve, sinon un contre-exemple).*

1. *Lorsque $\mathcal{F}$ est une famille libre, tout élément de $\mathcal{F}$ peut être écrit comme une combinaison linéaires des autres vecteurs de $\mathcal{F}$.*
2. *Les vecteurs colonnes d'une matrice A de taille $(4, 5)$ sont forcément liées.*
3. *Si 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$ sont dans un un même plan affine, alors ces trois vecteurs sont nécessairement liés.*
4. *Si $\{u, v\}$ est libre et si $\{u, v, w\}$ est liée, alors on a nécessairement que $w \in Vect(u, v)$.*
5. *Si une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ compte strictement moins de n vecteurs alors elle est libre.*

Solution : 1. Faux : prendre $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ dans $\mathbb{R}^2$ et la famille $\{e_1, e_2\}$.
2. Les 5 vecteurs colonnes u_i, $i = 1, ..., 5$ issus de la matrice A constituent une famille de 5 vecteurs de $\mathbb{R}^4$. Cette famille est donc liée par le lemme de Steinitz.
3. Cette question est **hors programme**. Un hyperplan affine H est par définition l'ensemble des points

$$H_d = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ ax + by + cz = d\}$$

où $(a, b, c,) \neq 0$ et $d \in \mathbb{R}$. Considérons donc 3 vecteurs $u_i = (x_i, y_i, z_i) \in \mathbb{R}^3$ avec $i = 1, 2, 3$ tels que $ax_i + by_i + cz_i = d$. La famille de 3 vecteurs $\{u_1 - u_2, u_1 - u_3, u_2 - u_3\}$ appartient au même plan vectoriel H_0, espace de dimension 2, et est donc liée (3 vecteurs dans un espace de dimension 2).

Une autre façon de voir les choses est de dire que $\varphi(u_i) = d$ où $\varphi((x, y, z)) = ax + by + cz$. Ainsi $u_1 - u_2$, $u_1 - u_3$, et $u_2 - u_3$ sont dans le noyau de φ. Si cette famille est libre, alors c'est une base de $\mathbb{R}^3$, et donc le noyau de φ est $\mathbb{R}^3$, donc $\varphi \equiv 0$ ce qui n'est pas possible.

4. C'est une propriété annoncée en cours (revoir). On la redémontre dans ce cas particulier ! Si $w \notin Vect(u, v)$, alors $\{u, v, w\}$ est libre. En effet, soit $au + bv + cw = 0$, avec $a, b, c \in \mathbb{R}$. Si $c = 0$, alors $a = b = 0$ car $\{u, v, w\}$ est libre. Si $c \neq 0$, alors $w \in Vect(u, v)$, ce qui est une contradiction. Nous déduisons que $\{u, v, w\}$ est libre. Or la famille $\{u, v, w, \}$ est liée. On a une contradiction. Donc $w \in Vect(u, v)$.

5. non $u = (1, 0, 0)$; $v = (1, 0, 0)$. $u - v = (0, 0, 0)$. Que dire de la famille $\{u, v\}$ dans $\mathbb{R}^3$? A vous de jouer.

Exercice 18. *(pour revoir le cours). Soit F et G deux sev de $\mathbb{R}^n$ tels que $F \subset G$ et $dim(F) = dim(G)$. Montrer que $F = G$.*

Solution : voir le transparent du cours 3 (propriété vue et démontrée en cours).