Feuille 4 : Applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$

Exercice 1. *Les applications suivantes sont-elles linéaires ?*

$$l_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x-y,x) \end{array} \qquad l_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3 \end{array}$$

$$l_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x-y,x+1) \end{array} \qquad l_4 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (x,y,x+y) \end{array}$$

<u>solution</u> : rappel : $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est linéaire si et seulement si pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$ et tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$. Nécessairement $f(0) = 0$.

On vérifie donc que sont linéaires seulement l_1 et l_4. Pour vous entrainer, vérifier à la main que pour $i = 1, 4$:

$$l_i(\lambda(x,y) + \mu(x',y')) = \lambda l_i(x,y) + \mu l_i(x',y')$$

pour tout $(x,y),(x',y') \in \mathbb{R}^2$ et tout scalaires $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Par exemple $l_3(0,0) \neq (0,0)$ et $l_2(\lambda x) \neq \lambda l_2(x)$ dès que $x \neq 0$ et $\lambda \neq 1$.

Exercice 2. *Soit (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et f l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans lui-même définie par $f(e_1) = 3e_1 + e_2 + e_3 + e_4$, $f(e_2) = e_1 + e_2 - e_3 + e_4$, $f(e_3) = e_1 - e_2 + e_3 - e_4$ et $f(e_4) = e_1 + e_2 - e_3 + e_4$.*
1) Calculer $f(x,y,z,t)$ pour $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$.
2) Déterminer $\operatorname{Ker}(f)$ et en donner une base.
3) Soit $F = \operatorname{Vect}(e_3, e_4)$. Les sous-espaces vectoriels F et $\operatorname{Ker}(f)$ sont-ils supplémentaires ?

<u>solution</u> : par linéarité, sachant que $f(e_1) = 3e_1 + e_2 + e_3 + e_4$, $f(e_2) = e_1 + e_2 - e_3 + e_4 = f(e_4)$, $f(e_3) = e_1 - e_2 + e_3 - e_4$, on a :

$$f(x,y,z,t) = xf(e_1) + yf(e_2) + zf(e_3) + tf(e_4) = \begin{pmatrix} 3x + y + z + t \\ x + y - z + t \\ x - y + z - t \\ x + y - z + t \end{pmatrix}$$

Pour le noyau, notez qu'il contient déjà $\mathbb{R}(e_2 - e_4)$ car $f(e_2 - e_4) = 0$. On résout $f(x,y,z,t) = 0$ et on trouve que le noyau de f vérifie $Ker(f) = \mathbb{R}(e_2 - e_4)$. Les deux espaces en question ne peuvent pas être supplémentaire car $\dim(Ker(f)) = 1$ et $\dim F = 2$ et $\dim \mathbb{R}^4 = 4$ (notez que ces deux espaces sont en somme directe car $e_2 \notin Vect(e_3, e_4)$).

Exercice 3. *Soit l'application linéaire*

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (0,x,z). \end{array}$$

a) Déterminer $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$. Donner une base de chacun de ces sous-espaces vectoriels.
b) La somme $\operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f$ est-elle directe ?

<u>correction</u> : soit $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On a immédiatement $Ker(f) = Vect(e_2)$ avec $u = (0,1,0)$ et $Im(f) = vect(e_2, e_3)$ La somme en question n'est pas directe car $Ker(f) \cap Im(f) = \mathbb{R}e_2$.

Exercice 4. *1) Montrer que l'application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ qui à (x,y) associe $(2x+y, x-y)$ est un isomorphisme (c-à-d linéaire bijective).*
2) Montrer que $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$ est un isomorphisme si et seulement si $ad - bc \neq 0$.

solution : Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(x,y) = 0$. En résolvant $2x+y = x-y = 0$, on trouve $x = y = 0$, donc $Ker(f) = 0$, donc f est injective et par le théorème du rang $rg(f) = 2$, donc f est surjective. Donc f est bijective. Donc f est un isomorphisme.

Supposons $ad - bc \neq 0$, ce qui implique $a \neq 0$ ou $c \neq 0$. Supposons par exemple que $a \neq 0$. Soit $(x,y) \in Ker(f)$. Alors

$$\begin{cases} ax + by = 0 \\ cs + dy = 0 \end{cases}$$

En appliquant la méthode du pivot de Gauss ($a \neq 0$), ce système est équivalent à

$$\begin{cases} ax + by = 0 \\ (d - bc/a)y = 0, \end{cases}$$

d'où $y = 0$ car $ad - bc \neq 0$. Par conséquence, comme $a \neq 0$, on a $x = 0$. Donc, f est injective de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ et est donc un isomorphisme. Réciproquement, supposons que f soit un isomorphisme. Alors, $a \neq 0$ ou $c \neq 0$ (car si $a = c = 0$, alors le noyau de f contiendrait $Vect((1,0))$). Supposons $a \neq 0$. Comme f est un isomorpshime, f est injective et son noyau est le vecteur nul. Donc, la solution du système précédent est le vecteur nul $(0,0)$. Si $ad - bc = 0$, alors le noyau de f contiendrait $\mathbb{R}(0,1)$ (par la méthode du pivot de Gauss) ce qui est absurde. Ainsi, $ad - bc \neq 0$.

Exercice 5. *Déterminer la matrice de l' application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ telle que $f(x,y,z) = (x, y+z, 0)$ relative à la base canonique.*

solution : Soit $\mathcal{E}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On trouve

$$Mat_{\mathcal{E}}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 6. *Soient f et h les applications linéaires de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ et de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ représentées par les matrices respectives, dans les bases canoniques :*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer l'image par f d'un vecteur (x,y,z) et l'image par h d'un vecteur (a,b).
2. Ecrire les matrices dans les bases canoniques des applications suivantes : $f \circ h$; $h \circ f$.

solution : en calculant on trouve que $f(x,y,z) = (-x+y, x+y+2z)$ et $h(a,b) = (2a+3b, -a, a+2b)$ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

Notez que $f \circ h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ et que $h \circ f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. On applique la méthode vue en cours, à savoir, que pour calculer la matrice de $f \circ h$ et de $h \circ f$, on calcule respectivement AB et BA ce qui donne :

$$Mat_{\mathcal{E}_2}(f \circ h) = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \ ; \ Mat_{\mathcal{E}_3}(h \circ f) = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

où $\mathcal{E}_2$, $\mathcal{E}_3$ sont respectivement la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

Exercice 7. *Montrer que l'image d'une famille libre par une application linéaire injective est une famille libre.*

solution : C'est une propriété de cours ! Soit $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ une application injective (notez au passage que $k = \mathrm{rg}(f) \leq m$). Soit $\{u_1, ..., u_p\}$ une famille libre. Ecrivons une relation de liaison

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i f(u_i) = 0.$$

Par linéarité $f(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i) = 0$ et comme f est injective $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i = 0$, d'où comme la famille est libre, il vient $\lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0$ et donc la famille $\{f(u_1), ..., f(u_p)\}$ est libre dans $\mathbb{R}^m$.

Exercice 8. *Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soient u_1, u_2, u_3 trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ définis par leurs composantes (dans la base canonique) : $u_1 = (0, 1, 1)$, $u_2 = (2, 3, 1)$, $u_3 = (5, 0, 1)$.*
1) Montrer que $\mathcal{C} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2) Ecrire la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$, ainsi que son inverse
3) Soit u le vecteur de coordonnées $(1, 1, 1)$ dans la base (u_1, u_2, u_3). Quelles sont ses coordonnées dans la base (e_1, e_2, e_3) ?
4) Soit v le vecteur de coordonnées $(1, 1, 1)$ dans la base (e_1, e_2, e_3). Quelles sont ses coordonnées dans la base (u_1, u_2, u_3) ?

solution : 1) S'agissant d'une famille de 3 vecteurs dans $\mathbb{R}^3$, il suffit de montrer que la famille est libre (vous le vérifiez à la main). C'est donc une base de $\mathbb{R}^3$.

2) La matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$, par définition, est construite de la manière suivante : la $j-$ème colonne de P est la décomposition de u_j dans $\mathcal{B}$ (retenez que l'on décompose la "nouvelle" base dans "l'ancienne"). D'où

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Son inverse P^{-1} est la matrice de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{B}$. En inversant P (résoudre le système linéaire $PX = Y$ d'inconnue X en fonction de Y), on trouve

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{5}{4} \\ \frac{1}{12} & \frac{5}{12} & -\frac{5}{12} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

On retient que l'on a $u_i = Pe_i$ et $e_i = P^{-1}u_i$ pour $1 \leq i \leq 3$. Soit maintenant u de coordonnées $(1, 1, 1)$ dans la base $\mathcal{C}$. On a :

$$u = u_1 + u_2 + u_3 = P(e_1 + e_2 + e_3).$$

Ainsi les coordonnées de u dans la base canonique sont $(7, 4, 3)$.

Soit maintenant v de coordonnées $(1, 1, 1)$ dans la base canonique $\mathcal{B}$. On a

$$v = e_1 + e_2 + e_3 = P^{-1}(u_1 + u_2 + u_3)$$

et donc v a pour coordonnées $(\frac{5}{4}, \frac{1}{12}, \frac{1}{6})$ dans $\mathcal{C}$.

Exercice 9. *1) Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ une application linéaire donnée dans les bases canoniques par*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Montrer que les vecteurs $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (0, 1, 1)$, et $u_3 = (-1, 2, 3)$ forment une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$. Ecrire la matrice de passage P de la base canonique vers cette nouvelle base.
2) Montrer que $v = (1, 1)$ et $w = (2, 1)$ forment une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^2$ puis écrire la matrice de passage de Q de la base canonique de $\mathbb{R}^2$ vers cette nouvelle base.
3) Calculer la matrice B de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ (utiliser la formule de changement de base).

correction : 1) Soit $\mathcal{E}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$. On montre (je vous laisse faire le calcul) que $\mathcal{B}$ est une famille libre de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$. C'est donc une base de $\mathbb{R}^3$. Les 3 colonnes de la matrice P sont la décomposition de chaque u_i sur $\mathcal{E}$:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

2) Le fait que $\{v, w\}$ soit une base de $\mathbb{R}^2$ est immédiat (famille libre de 2 vecteurs de $\mathbb{R}^2$). Il vient

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Q^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

On applique ensuite la formule du cours (voir transparent 32) ce qui donne

$$B = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = Q^{-1}AP = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 32 \\ -4 & -6 & -22 \end{pmatrix}$$

Exercice 10. *Soit l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie dans la base canonique $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^3$ par :*

$$f(x, y, z) = (-2x + 5y - z, -2x + 2y + 2z, -2x + 5y - z).$$

1) Vérifier que f est linéaire et déterminer la matrice A de f dans la base canonique.
2) Montrer que $dim(Kerf) = 1$ et donner une base de $Ker(f)$ que l'on notera $\{v_1\}$.
3) Déterminer $dim(Imf)$ et donner une base de $Im(f)$. Donner également une équation cartésienne de $Im(f)$ (méthode du pivot).
4) Soit $v_2 = (1, 1, 1)$ et $v_3 = (1, 0, 1)$. Calculer $f(v_1)$ et $f(v_2)$ et en déduire que $\{v_1, v_2, v_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Donner la matrice de f dans cette nouvelle base.

correction : 1) Vérifiez comme dans l'exercice 1 que f est linéaire. Par définition de f,

$$A = Mat_{\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} -2 & 5 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

où $\mathcal{E}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

2) On résout $AX = 0$ où $X = (x, y, z)^T$ ce qui donne $(x, y, z) = z(2, 1, 1)$. Ainsi $Ker(f) = \mathbb{R}v_1$ où $v_1 = (2, 1, 1)$.

3) On a donc $rg(f) = \dim(Im(f)) = 2$ par le théorème du rang. Soit $(x, y, z) \in Im(f)$. Alors il existe $(x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\begin{pmatrix} -2 & 5 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Ce système est équivalent à

$$\begin{cases} -2x' + 5y' - z' = x \\ 2x' + 2y' + 2z' = y \\ -2x' + 5y' - z' = z \end{cases}$$

et en faisant la méthode du pivot de Gauss, ce système admet une solution si et seulement si $x - z = 0$ ce qui fournit l'équation cartésienne de $Im(f)$. Nous déduisons également que

$$(x, y, z) \in Im(f) \iff x - z = 0 \iff (x, y, z) = x(1, 0, 1) + y(0, 1, 0).$$

Ainsi $Im(f) = Vect(v_3, v_2 - v_3)$ (les deux vecteurs v_3 et $v_2 - v_3$ sont non colinéaires et engendrent $Im(f)$). Notez que $Im(f) = Vect(v_2, v_3)$.

4) Pour conclure, soit $\mathcal{E}' = \{v_1, v_2, v_3\}$. On vérifie que c'est une base de $\mathbb{R}^3$ (famille libre suffit). On vérifie également que $f(v_2) = 2v_2$ et $f(v_3) = -3v_3$. Sachant que $f(v_1) = 0$ (NB : attention à bien décomposer $f(v_i)$ dans $\mathcal{E}'$!), il vient

$$A = Mat_{\mathcal{E}'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 11. *Dans $\mathbb{R}^3$, on considère l'endomorphisme f représenté dans la base canonique $\{e_1, e_2, e_3\}$ par la matrice*

$$A = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

1) Calculer $f(e_1 + 2e_2)$ et trouver un élément non nul de $Ker(f)$.
2) Déterminer $\dim(Kerf)$, $rg(f)$, une base $\mathcal{B}'$ de $Ker(f)$, et une base $\mathcal{B}''$ de $Im(f)$.
3) Montrer que $\mathcal{B} = \mathcal{B}' \cup \mathcal{B}''$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et écrire la matrice D de f dans $\mathcal{B}$
4) Donner la matrice de passage P de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathcal{B}$, puis donner une relation entre les trois matrices A, D, et P.

correction : 1) soit $u = (1, 2, 0)$. On a $Au = \frac{1}{6}(u + 5e_3)$. On voie en regardant la 3ème colonne de A que $Ae_3 = \frac{1}{6}(u + 5e_3)$. Donc $A(u - e_3) = 0$ donc $u - e_3 \in Ker(f)$.
2) On va montrer que $rg(f) = 2$. On effectue la même méthode que dans l'exercice précédent pour calculer l'image de f. On trouve que l'équation cartésienne de $Im(f)$ est

$$Im(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x + 2y = 0\}.$$

D'où une base de $Im(f)$ est $\mathcal{B}'' = \{v, e_3\}$ avec $v = (-2, 1, 0)$ et $e_3 = (0, 0, 1)$. Ainsi $rg(f) = 2$ et par le théorème du rang $\dim(Ker(f)) = 1$. Une base de $Ker(f)$ est donc $\mathcal{B}' = \{u - e_3\}$.
3) Soit la famille $\mathcal{B} = \{u - e_3, v, e_3\}$ constituée de 3 vecteurs. On vérifie que cette famille est libre (écrire $\alpha(u - e_3) + \beta v + \gamma e_3 = 0$ et montrer que l'unique solution de ce système est $\alpha = \beta = \gamma = 0$). Il s'agit donc d'une base de $\mathbb{R}^3$. Il vient $f(v) = v$. Puis $f(e_3) = \frac{1}{6}(1, 2, 5)$. Ensuite, on résout le système

$$\alpha(u - e_3) + \beta v + \gamma e_3 = f(e_3),$$

pour exprimer $f(e_3)$ dans la base $\mathcal{B}'$ ce qui donne (après résolution du système) $f(e_3) = \frac{1}{6}(u - e_3) + e_3$. D'où :

$$f(u - e_3) = 0,\ f(v) = v,\ f(e_3) = \frac{1}{6}(u - e_3) + e_3$$

et donc

$$D = Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4) La matrice P est la matrice de passage entre la base canonique $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ et la base $\mathcal{B} = \{u - e_3, v, e_3\}$ et elle exprime les "nouveaux" vecteurs en fonction des "anciens" :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On a automatiquement

$$D = Mat_{\mathcal{B}}(f) = P^{-1}AP$$

Notez que cet exercice est fondamental pour bien s'assurer de cette formule. Ainsi, vous pouvez la vérifier de la façon suivante. Vous calculez P^{-1}, ce qui donne

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 1 \end{pmatrix}$$

et vous vérifiez à la main que $D = P^{-1}AP$! On a donc trigonalisé la matrice A (ce qui est toujours possible).

Exercice 12. *(plus difficile) Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ une application linéaire non nulle telle que $f^2 = 0$ (c.a.d. pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, on a $f(f(x)) = 0$). Montrer que $Im(f) \subset Ker(f)$ puis que* $\mathrm{rg}(f) = 1$ *et* $\dim(Kerf) = 2$. *En déduire qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice de f dans cette base soit de la forme*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

<u>correction</u> : soit $y \in Im(f)$. Alors il existe $x \in \mathbb{R}^3$ tel que $y = f(x)$. D'où $f(y) = f(f(x)) = 0$, ainsi $y \in Ker(f)$, d'où $Im(f) \subset Ker(f)$. Ensuite, par le théorème du rang, on a $\dim(Ker(f)) + rg(f) = 3$ et comme f est non nulle on a $1 \leq rg(f) \leq 3$. Supposons par l'absurde que $rg(f) \geq 2$. Alors $\dim(Ker(f)) \geq 2$ car $Im(f) \subset Ker(f)$. Ainsi $\dim(Ker(f)) + rg(f) \geq 4$ ce qui est absurde. Comme f est non nulle, la seule possibilité est que $rg(f) = 1$ d'où $\dim(Ker(f)) = 2$. Soit $\{u, v\}$ une base de $Ker(f)$. Soit $w \in \mathbb{R}^3$ tel que $f(w) \neq 0$ (f est non nulle). Alors $w \notin Ker(f)$. Donc, $\{u, v, w\}$ est libre et est donc une base de $\mathbb{R}^3$. Regardons la matrice A de f dans cette base. On a $f(u) = f(v) = 0$ car $u, v \in Ker(f)$. De plus, $f(w) \in Ker(f)$. Donc, il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $f(w) = au + bv$ (car $\{u, v\}$ est une base de $Ker(f)$). En conclusion, la matrice de f dans la base $\{u, v, w, \}$ est bien de la forme voulue.

Exercice 13. *(Plus difficile). Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une application linéaire telle que :*

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \exists \alpha_x \in \mathbb{R},\ f(x) = \alpha_x x.$$

1) Soit x, y deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$ tels que $\{x, y\}$ est libre. Montrer que $\alpha_{x+y}(x+y) = \alpha_x x + \alpha_y y$. En déduire que $\alpha_{x+y} = \alpha_x = \alpha_y$ puis que $f(x) = \alpha_x x$ et $f(y) = \alpha_x y$.

2) Soit x, y deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$ tels que $\{x, y\}$ est liée. Démontrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y = \lambda x$. En déduire que $f(y) = \alpha_x y$.
3) Grâce aux questions 1) et 2), démontrer que :

$$\exists \alpha \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R}^n,\ f(y) = \alpha y.$$

correction : Dans toute la suite, x est un vecteur fixé non nul de $\mathbb{R}^p$. Soit $y \in \mathbb{R}^p$. Supposons que $\{x, y\}$ est libre. On a $f(x+y) = \alpha_{x+y}(x+y) = f(x) + f(y) = \alpha_x x + \alpha_y y$, d'où $(\alpha_{x+y} - \alpha_x)x + (\alpha_{x+y} - \alpha_y)y = 0$ et comme $\{x, y\}$ est libre on a $\alpha_x = \alpha_y = \alpha_{x+y}$. On a donc montré que si $\{x, y\}$ est libre, alors $f(y) = \alpha_x y$.

Supposons maintenant que $\{x, y\}$ est liée. Alors, x et y sont colinéaires. Par conséquent, il existe un réel t tel que $y = tx$. D'où $f(y) = tf(x) = t\alpha_x x = \alpha_x(tx) = \alpha_x y$.

Conclusion : pour tout $y \in \mathbb{R}^p$, $f(y) = \alpha_x y$. D'où le résultat.