Algèbre 2 - TD 4

Exo. 1 Pour l_1 on a

$$l_1((x_1,y_1)+\lambda(x_2,y_2)) = l_1(x_1+\lambda x_2, y_1+\lambda y_2)$$

$$= (x_1+\lambda x_2 - (y_1+\lambda y_2), x_1+\lambda x_2)$$

$$= (x_1 - y_1 + \lambda(x_2-y_2), x_1+\lambda x_2)$$

$$= (x_1-y_1, x_1) + (\lambda(x_2-y_2), \lambda x_2)$$

$$= (x_1-y_1, x_1) + \lambda(x_2-y_2, x_2).$$

$$= l_1(x_1,y_1) + \lambda l_1(x_2,y_2).$$

Ainsi, l_1 est app. linéaire

Pour l_2 on a

$$l_2(\lambda x) = (\lambda x)^3 \quad \text{et} \quad \lambda l_2(x) = \lambda x^3.$$

Donc $l_2(\lambda x) \neq \lambda l_2(x)$, càd, l_2 n'est pas application linéaire.

Pour l_3 on a $l_3(0,0) = (0-0, 0+1) = (0,1) \neq (0,0)$, donc l_3 n'est pas app. linéaire.

Devoir: vérifier que l_4 est une app. linéaire

Exo. 2 $f(e_1)=(3,1,1,1)$, $f(e_2)=(1,1,-1,1)$, $f(e_3)=(1,-1,1,-1)$, $f(e_4)=(1,1,-1,1)$

1) $f(x,y,z,t)=f\big((x,0,0,0)+(0,y,0,0)+(0,0,z,0)+(0,0,0,t)\big)$

$=f(xe_1+ye_2+ze_3+te_4)$

$=xf(e_1)+yf(e_2)+zf(e_3)+tf(e_4)$

$=x(3,1,1,1)+y(1,1,-1,1)+z(1,-1,1,-1)+t(1,1,-1,1)$

$\Rightarrow f(x,y,z,t)=(3x+y+z+t,\ x+y-z+t,\ x-y+z-t,\ x+y-z+t).$

2) On pose $f(x,y,z,t)=(0,0,0,0)$ et on obtient

$L_3+L_4:\ 2x=0\Rightarrow x=0$

$$\begin{cases}3x+y+z+t=0 & (L_1)\\ x+y-z+t=0 & (L_2)\\ x-y+z-t=0 & (L_3)\\ x+y-z+t=0 & (L_4)\end{cases}\iff\begin{cases}x=0\\ y+z+t=0\\ y-z+t=0\\ \left.\begin{array}{l}-y+z-t=0\\ y-z+t=0\end{array}\right\}\text{mêmes}\end{cases}$$

$L_2+L_4:\ 2z=0\Rightarrow z=0$

$$\iff\begin{cases}x=0 & (L_1)\\ y+z+t=0 & (L_2)\\ y-z+t=0 & (L_3)\\ -y+z-t=0 & (L_4)\end{cases}\iff\begin{cases}x=0,\ z=0\\ \left.\begin{array}{l}y+t=0\\ y+t=0\\ -y-t=0\end{array}\right\}\text{mêmes}\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases}x=0\\ z=0\\ y=-t\end{cases}\iff \mathrm{Ker}(f)=\{(0,-t,0,t):t\in\mathbb{R}\}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathrm{Ker}(f)=\mathrm{Vect}\big((0,-1,0,1)\big).}$$

$\{(0,-1,0,1)\}$ base de $\mathrm{Ker}(f)$.

3) Non car $\dim F = 2$, $\dim \mathrm{Ker}(f) = 1$ et $\dim \mathbb{R}^4 = 4$, ③

d'où $F + \mathrm{Ker}(f) \subsetneq \mathbb{R}^4$.

Exo. 3 (a) On pose $f(x,y,z) = (0,0,0)$ et on trouve

$(0,x,z) = (0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \mathrm{Ker}(f) = \{(x,y,z) : x = 0 \text{ et } z = 0\}$

$\Rightarrow \mathrm{Ker}(f) = \{(0,y,0) : y \in \mathbb{R}\}$

$\Rightarrow \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}((0,1,0))$.

base $\{(0,1,0)\}$

En plus,

$$f(x,y,z) = (0,x,z) = (0,x,0) + (0,0,z) = x e_2 + z e_3$$

$\Rightarrow \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(e_2, e_3)$.

base $\{(0,1,0), (0,0,1)\}$.

(b) Puisque $e_2 \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)$, la somme

$\mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f)$

n'est pas directe.

Exo. 4 1) Devoir (montrer que $\mathrm{Ker}(f) = \{\vec{0}\}$.)

↦ Devoir : lire corrigé

2) f isomorphisme $\Leftrightarrow \mathrm{Ker}(f) = \{\vec{0}\}$. On pose

$f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow (ax+by, cx+dy) = (0,0) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} ax+by = 0 \Rightarrow acx + cby = 0 \Rightarrow a(-dy) + cby = 0 \\ cx + dy = 0 \Rightarrow cx = -dy \qquad \Rightarrow (cb - ad)y = 0. \end{cases}$

Pour qu'on trouve $y = 0$ il faut $cb - ad \neq 0$. On voit ainsi que

a et c ne peuvent pas être 0 en même temps (sinon $ad-bc=0$). Si par exemple $a\neq 0$, alors

$$ax+by=0 \overset{y=0}{\Rightarrow} ax=0 \overset{a\neq 0}{\longrightarrow} x=0$$

(pareil se $c\neq 0$). Ainsi, $\mathrm{Ker}(f)=\{\vec{0}\}$ si $ad-bc\neq 0$, càd,

$$ad-bc\neq 0 \Rightarrow f \text{ isomorphisme.}$$

Réciproquement, supposons que f est isomorphisme. On veut montrer que $ad-bc\neq 0$. Supposons par l'absurde que $ad-bc=0$, on veut trouver une contradiction. avec le fait que f est un isomorphisme.

Si $a\neq 0$, alors $b\neq 0$ et le système donne $\begin{cases} ax+by=0 \Rightarrow x=\frac{-b}{a}y, & y=1 \\ cx+dy=0 & x=\frac{-b}{a}\end{cases}$

$$\Rightarrow f\left(\frac{-b}{a},1\right)=\left(a\frac{-b}{a}+b,\ c\frac{-b}{a}+d\right)$$

$$=\left(-b+b,\ \frac{-cb}{a}+d\right)$$

$$=\left(0,\ \frac{-ad}{a}+d\right)=(0,0),$$

d'où $\mathrm{Ker}(f)\neq\{\vec{0}\}$, càd, f n'est pas isomorphisme. Contradiction.

Si $a=0$, alors $bc=0$, donc $b=0$ ou $c=0$. Si $b=0$, alors

$f(x,y)=(0,cx+dy) \Rightarrow (1,0)\notin \mathrm{Im}(f) \Rightarrow f$ pas surj.

$\Rightarrow f$ pas isomorphisme.

Si $b\neq 0$, alors $c=0$ et $a=0$, d'où

$f(x,y)=(by,dy) \Rightarrow f(1,0)=(0,0) \Rightarrow \mathrm{Ker}(f)\neq\{\vec{0}\}$

$\Rightarrow f$ pas isomorphisme.

Dans tous les cas on a un absurde, donc $ad-bc\neq 0 \Leftrightarrow f$ isom. #

Exo. 5 $f(e_1) = (1, 0+0, 0) = e_1$

$f(e_2) = (0, 1+0, 0) = e_2$

$f(e_3) = (0, 0+1, 0) = e_2$

Soit $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique. Alors

$$Mat_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exo. 6 $Mat_{B_3,B_2}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$Mat_{B_2,B_3}(h) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(1) $f(x,y,z) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+y \\ x+y+2z \end{pmatrix}$

$\Rightarrow f(x,y,z) = (-x+y, x+y+2z).$

$$h(a,b) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+3b \\ -a \\ a+2b \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow h(a,b) = (2a+3b, -a, a+2b).$

(2) On a $f \circ h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ et $h \circ f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, où

$$Mat_{B_2,B_2}(f \circ h) = Mat_{B_3,B_2}(f) \cdot Mat_{B_2,B_3}(h)$$

$\Rightarrow Mat_{B_2}(f \circ h) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-1 & -3 \\ 2-1+2 & 3+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$

et

$$\mathrm{Mat}_{B_3,B_3}(h\circ f) = \mathrm{Mat}_{B_2,B_3}(h)\cdot \mathrm{Mat}_{B_3,B_2}(f)$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-3 & 2+3 & 6 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1+2 & 1+2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Mat}_{B_3}(h\circ f) = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 6 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Exo. 7. Devoir

Exo. 8.

$u_1 = (0,1,1)$, $u_2 = (2,3,1)$, $u_3 = (5,0,1)$; $\mathcal{C} = (u_1,u_2,u_3)$.

(1) Devoir

(2) Par définition

$$P_{B,\mathcal{C}} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},B}(I_3)$$

Ainsi, on calcule

$I_3(u_1) = (0,1,1) = e_2 + e_3 \longrightarrow$ coordonnées $(0,1,1)$

$I_3(u_2) = (2,3,1) = 2e_1 + 3e_2 + e_3 \rightarrow$ coordonnées $(2,3,1)$

$I_3(u_3) = (5,0,1) = 5e_1 + e_3 \longrightarrow$ coordonnées $(5,0,1)$

$$\Rightarrow P_{B,\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Devoir : calculer $P_{B,\mathcal{C}}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{5}{4} \\ \frac{1}{12} & \frac{5}{12} & \frac{-5}{12} \\ \frac{1}{6} & \frac{-1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$

<u>Obs.</u> : $P_{B,C}^{-1}$ correspond à $P_{C,B}$ la matrice de passage de la base C à B.

(3) Les coordonnées de u dans la base B sont

$$P_{C,B}\,u = P_{B,C}^{-1}\,u = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{5}{4} \\ \frac{1}{12} & \frac{5}{12} & -\frac{5}{12} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{5}{4} \\ \frac{1}{12} + \frac{5}{12} - \frac{5}{12} \\ \frac{1}{6} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{1}{12} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

(4) Les coordonnées de v dans la base C sont

$$P_{B,C}\,v = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+5 \\ 1+3 \\ 1+1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

<u>Exo. 9</u> Devoir

<u>Exo. 10</u> 1) Une autre méthode :

$f(x,y,z) = (-2x+5y-z, -2x+2y+2z, -2x+5y-z)$

$\Rightarrow f(x,y,z) = (-2x,-2x,-2x) + (5y,2y,5y) + (-z,2z,-z)$

$\Rightarrow f(x,y,z) = x(-2,-2,-2) + y(5,2,5) + z(-1,2,-1)$

Puisque l'image de (x,y,z) par f est une combinaison linéaire, f est une application linéaire.

On calcule

1) $f(e_1) = (-2,-2,-2)$

$f(e_2) = (5,2,5)$, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$,

$f(e_3) = (-1,2,-1)$

et, donc,

$$Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -2 & 5 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

2) On pose

$$f(x,y,z) = (0,0,0) \Rightarrow (-2x+5y-z, -2x+2y+2z, -2x+5y-z) = (0,0,0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2x+5y-z=0 \\ -2x+2y+2z=0 \\ -2x+5y-z=0 \end{cases}$$

même chose

$$\Rightarrow \begin{cases} -2x+5y-z=0 \Rightarrow z=-2x+5y \\ -2x+2y+2z=0 \Rightarrow -2x+2y+2(-2x+5y)=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow -6x+12y=0$$

$$\Rightarrow 6x=12y \Rightarrow \boxed{x=2y}$$

$$\Rightarrow z=-2(2y)+5y \Rightarrow \boxed{z=y}$$

$$\Rightarrow Ker(f) = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x=2y,\ z=y\}$$

$$\Rightarrow Ker(f) = \{(2y,y,y)\in\mathbb{R}^3 : y\in\mathbb{R}\}$$

$$\Rightarrow Ker(f) = \{y(2,1,1) : y\in\mathbb{R}\}$$

$$\Rightarrow Ker(f) = Vect((2,1,1)), \quad \dim Ker(f) = 1.$$

base

3) Puisque

$$f(x,y,z) = x(-2,-2,-2) + y(5,2,5) + z(-1,2,-1),$$

on trouve

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\big((-2,-2,-2),(5,2,5),(-1,2,-1)\big). \qquad (1)$$

On sait que $\dim \mathrm{Ker}(f) = 1$. D'après le Théorème du Rang, on a

$$\dim \mathrm{Im}(f) = 2.$$

Ainsi, les vecteurs du Vect (1) sont liés, et on n'en a besoin que de 2 vecteurs pour engendrer $\mathrm{Im}(f)$. Alors,

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\big((-2,-2,-2),(5,2,5)\big)$$

La famille $\big((-2,-2,-2),(5,2,5)\big)$, étant libre, est une base de $\mathrm{Im}(f)$.

Maintenant, on veut trouver une éq. cartésienne pour décrire $\mathrm{Im}(f)$. On écrit

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\big((-2,-2,-2),(5,2,5)\big) =$$

$$\Rightarrow \mathrm{Im}(f) = \{\alpha(-2,-2,-2) + \beta(5,2,5) : \alpha,\beta \in \mathbb{R}\}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Im}(f) = \{(-2\alpha,-2\alpha,-2\alpha) + (5\beta,2\beta,5\beta) : \alpha,\beta \in \mathbb{R}\}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Im}(f) = \{(\underbrace{-2\alpha+5\beta}_{x}, \underbrace{-2\alpha+2\beta}_{y}, \underbrace{-2\alpha+5\beta}_{z}) : \alpha,\beta \in \mathbb{R}\}$$

On pose

$$\begin{cases} x = -2\alpha + 5\beta & (L_1) \\ y = -2\alpha + 2\beta & (L_2) \\ z = -2\alpha + 5\beta & (L_3) \end{cases} \xrightarrow[L_2 - L_3]{L_1 - L_2} \begin{cases} x - y = 3\beta \\ y - z = -3\beta \end{cases}$$

$$\Rightarrow x - y = -(y - z) \Rightarrow \Rightarrow x - y = -y + z$$

$$\Rightarrow x = z \Rightarrow x - z = 0.$$

Ainsi,

$$\operatorname{Im}(f) = \{(x,y,z) : x - z = 0\}.$$

4) On considère

$$V_1 = (2,1,1),\ V_2 = (1,1,1),\ V_3 = (1,0,1).$$

On vérifie que $\mathcal{B} = (V_1, V_2, V_3)$ est une famille libre. On pose

$$\alpha V_1 + \beta V_2 + \gamma V_3 = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \alpha(2,1,1) + \beta(1,1,1) + \gamma(1,0,1) = (0,0,0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha + \beta + \gamma = 0 \longrightarrow 2\alpha + (-\alpha) + \gamma = 0 \Rightarrow \alpha + \gamma = 0 \Rightarrow \gamma = -\alpha \\ \alpha + \beta \qquad = 0 \Rightarrow \beta = -\alpha \\ \alpha + \beta + \gamma = 0 \longrightarrow \alpha + (-\alpha) + (-\alpha) = 0 \Rightarrow -\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \beta = 0$$
$$\gamma = 0$$

Ainsi, $\mathcal{B}$ est libre et, donc, est base de $\mathbb{R}^3$. On calcule

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f).$$

On fait

$$f(V_1) = f(2,1,1) = (-2\cdot 2 + 5\cdot 1 - 1, -2\cdot 2 + 2\cdot 1 + 2\cdot 1, -2\cdot 2 + 5\cdot 1 - 1)$$

$$\Rightarrow f(V_1) = (-4+5-1, -4+2+2, -4+5-1)$$

$$\Rightarrow f(V_1) = (0,0,0) = 0\cdot V_1 + 0\cdot V_2 + 0\cdot V_3$$

$$f(V_2) = f(1,1,1) = (-2\cdot 1 + 5\cdot 1 - 1, -2\cdot 1 + 2\cdot 1 + 2\cdot 1, -2\cdot 1 + 5\cdot 1 - 1)$$

$$\Rightarrow f(V_2) = (-2+5-1, -2+2+2, -2+5-1)$$

$$\Rightarrow f(V_2) = (2,2,2) = 0\cdot V_1 + 2\cdot V_2 + 0\cdot V_3$$

$$f(V_3) = f(1,0,1) = (-2\cdot 1 + 5\cdot 0 - 1, -2\cdot 1 + 2\cdot 0 + 2\cdot 1, -2\cdot 1 + 5\cdot 0 - 1)$$

$$\Rightarrow f(V_3) = (-3, 0, -3) = -3V_3$$

$$\Rightarrow f(V_3) = 0\cdot V_1 + 0\cdot V_2 + (-3)V_3$$

Ainsi,

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Exo. 11 $A = \begin{pmatrix} 9 & -6 & 10 \\ -5 & 2 & -5 \\ -12 & 6 & -13 \end{pmatrix} = Mat_{\mathcal{B}}(f)$, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$

On considère $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$, où

$u_1 = (2,-1,-2)$, $u_2 = (1,0,-1)$, $u_3 = (-2,1,3)$.

1) (u_1, u_2) est libre et $(-2,1,3) \notin Vect(u_1, u_2)$ car pour faire la deuxième coordonnée il faut multiplier u_1 par -1, d'où

$$(-2,1,3) = -(2,-1,-2) + \alpha(1,0,-1)$$

$$\iff (-2,1,3) = (-2+\alpha, 1, 2-\alpha)$$

$$\iff \begin{cases} -2+\alpha = -2 \Rightarrow \alpha = 0 \\ 2-\alpha = 3 \Rightarrow \alpha = -1 \end{cases} \quad \text{absurde !}$$

Donc $\mathcal{B}'$ est une base (trois vecteurs libres dans $\mathbb{R}^3$).

2) Les "vieille base" et "nouvelle base" sont toutes les deux $\mathcal{B}'$.

On calcule

$$f(u_1) = A\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -6 & 10 \\ -5 & 2 & -5 \\ -12 & 6 & -13 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(u_1) = 2 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + 0 \cdot u_3$$

$$f(u_2) = \begin{pmatrix} 9 & -6 & 10 \\ -5 & 2 & -5 \\ -12 & 6 & -13 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -u_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(u_2) = 0 \cdot u_1 + (-1) u_2 + 0 \cdot u_3$$

$$f(u_3) = \begin{pmatrix} 9 & -6 & 10 \\ -5 & 2 & -5 \\ -12 & 6 & -13 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -9 \end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = -3u_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(u_3) = 0\cdot u_1 + 0\cdot u_2 + (-3)u_3$$

Ainsi,

$$Mat_{B'}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Exo. 12 $\quad A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} = Mat_{B_c}(f), \ B_c = (e_1, e_2, e_3).$

1) On calcule

$$f(e_1 + 2e_2) = A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}}_{\text{troisième colonne de A}} = Ae_3$$

$$\Rightarrow A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = Ae_3 \Rightarrow A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - Ae_3 = 0$$

$$\Rightarrow A\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - e_3\right) = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - e_3 \in Ker(f).$$

Ainsi, $u = (1,2,0) - e_3 \in Ker(f)$.

2) Pour qu'un élément (x,y,z) appartienne à l'image de f, on doit trouver (x',y',z') tel que $f(x',y',z') = (x,y,z)$. Cela correspond à

$$\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{6}(5x' - 2y' + z') = x \\ \frac{1}{6}(-2x' + 2y' + 2z') = y \\ \frac{1}{6}(x' + 2y' + 5z') = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x' - 2y' + z' = 6x \\ -2x' + 2y' + 2z' = 6y \\ x' + 2y' + 5z' = 6z \end{cases} . \ (S)$$

C'est un système où les variables sont x', y', z' et x, y, z sont des paramètres. On doit trouver une (ou plusieurs) conditions sur x, y, z pour que le système soit compatible. On a

$$(S) \iff \begin{cases} x' + 2y' + 5z' = 6z \\ -2x + 2y' + 2z' = 6y \\ 5x - 2y + z' = 6x \end{cases} \xLeftrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - 5L_1]{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1} \begin{cases} x' + 2y' + 5z' = 6z \\ 6y' + 12z' = 6y + 12z \\ -12y' - 24z' = 6x - 30z \end{cases}$$

Si l'on calcule $2L_2 + L_3$ on trouve

$$2(6y' + 12z') + (-12y' - 24z') = 2(6y + 12z) + 6x - 30z$$

$$\Rightarrow 0 = 12y + 24z + 6x - 30z$$

$$\Rightarrow \boxed{6x + 12y - 6z = 0} \xRightarrow{\div 6} \boxed{x + 2y - z = 0}$$

Cette condition correspond à l'équation qui définit $\mathrm{Im}(f)$:

$$\mathrm{Im}(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y - z = 0\}.$$

On écrit

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(f) &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x + 2y\} \\ &= \{(x, y, x + 2y) : x, y \in \mathbb{R}\} \quad \Rightarrow \dim \mathrm{Im}(f) = 2 \\ &= \{(x, 0, x) + (0, y, 2y) : x, y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(1, 0, 1) + y(0, 1, 2) : x, y \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(\underbrace{(1, 0, 1), (0, 1, 2)}_{\text{famille libre}})$$

Ainsi, $\dim \mathrm{Im}(f) = 2$ et $\mathcal{B}'' = (v, w)$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$, où $v = (1, 0, 1)$ et $w = (0, 1, 2)$. D'après le Théorème du Noyaux, $\dim \mathrm{Ker}(f) = 1$. Puisque $u \in \mathrm{Ker}(f)$, on a $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(u)$ et ~~...~~

$B' = \{u\}$ est une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

3) Soit $B = B' \cup B'' = (u, v, w)$. Vu que $\mathrm{Vect}(v, w) = \mathrm{Im}(f)$ et $u \notin \mathrm{Im}(f)$, car u ne satisfait pas $x + 2y - z = 0$, on trouve que B est une famille libre. Donc B est base de $\mathbb{R}^3$.

On veut déterminer $\mathrm{mat}_B(f)$. On calcule

$$f(u) = 0 = 0 \cdot u + 0 \cdot v + 0 \cdot w$$ (note que $f(u) = 0$ car $u \in \mathrm{Ker}(f)$).

$$f(v) = Av = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = v = 0 \cdot u + \cancel{0 \cdot v} \; 1 \cdot v + 0 \cdot w$$

$$f(w) = Aw = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = w = 0 \cdot u + 0 \cdot v + 1 \cdot w.$$

Par conséquent,

$$\mathrm{Mat}_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = D.$$

4) On note B_c la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
La matrice P de passage de B_c à B est

$$P = P_{B_c, B} = \mathrm{mat}_{B, B_c}(Id).$$

On calcule

$$\begin{aligned} Id(u) &= u = (1, 2, -1) \\ Id(v) &= v = (1, 0, 1) \\ Id(w) &= w = (0, 1, 2) \end{aligned} \Rightarrow P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

La relation entre A, D et P est

$$D = P^{-1} A P.$$