Chapitre 4 : applications linéaires

Dans tout le chapitre le symbole $\mathbb{K}$ désigne indifféremment l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels ou l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

1 Définitions, exemples

Définition 1. *Soit $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ une application (ou fonction). On dit que f est linéaire si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

$$\forall x, y \in \mathbb{K}^n, \qquad f(x+y) = f(x) + f(y),$$

$$\forall x \in \mathbb{K}^n,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \qquad f(\lambda x) = \lambda f(x).$$

Remarque 1. *1. Les deux conditions ci-dessus sont équivalentes à :*

$$\forall x, y \in \mathbb{K}^n,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \qquad f(x+\lambda y) = f(x) + \lambda f(y).$$

2. Si f est linéaire, on a toujours $f(0) = 0$.

3. Si $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ est linéaire alors

$$\forall x_1, ..., x_p \in \mathbb{K}^n,\ \forall \lambda_1, ..., \lambda_p \in \mathbb{K}, \qquad f(\lambda_1 x_1 + ... + \lambda_p x_p) = \lambda_1 f(x_1) + ... + \lambda_p f(x_p).$$

Définition 2. *On note $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ l'ensemble des applications linéaires de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}^m$. Une application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n) := \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n)$ est appelée* **endomorphisme** *de $\mathbb{K}^n$.*

Pour définir une application linéaire, il suffit de la définir sur une base.

Proposition 1. *Soit $(e_1, ..., e_n)$ une base de $\mathbb{K}^n$ et $(v_1, ..., v_n)$ une famille de $\mathbb{K}^m$. Il existe une unique application linéaire $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ telle que*

$$f(e_i) = v_i \qquad \forall i = 1, ..., n.$$

Elle est définie par

$$f(\lambda_1 e_1 + ... + \lambda_n e_n) = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n \qquad \forall (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{K}^n.$$

Preuve. Tout vecteur x se décompose de manière unique sur cette base. Soit $x \in \mathbb{K}^n$. Il existe un unique n-uplet $x_1, ..., x_n$ de réels tel que $x = \sum_{k=1}^n x_k e_k$. Par linéarité, $f(x) = \sum_{k=1}^n x_k v_k$. □

2 Noyau, image d'une application linéaire

Définition 3. *Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$.*
(i) Le noyau de f, noté $\ker f$, est défini par

$$\ker f = \{x \in \mathbb{K}^n \ ;\ f(x) = 0\}.$$

(ii) L'image de f, notée $\mathrm{Im} f$, est définie par

$$\mathrm{Im} f = \{f(x) \ ;\ x \in \mathbb{K}^n\}.$$

Remarque 2. *Pour tout* $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ *on a* $0 \in \ker f$ *et* $0 \in \mathrm{Im} f$.

Proposition 2. *(i) Si* $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$*, alors* $\ker f$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{K}^n$ *et* $\mathrm{Im} f$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{K}^m$.
(ii) Si de plus $(e_1, ..., e_n)$ *est une base de* $\mathbb{K}^n$ *on a*

$$\mathrm{Im} f = Vect(f(e_1), ..., f(e_n)).$$

Preuve. On vérifie aisément ces propriétés à la main. □

Définition 4. *Soit* $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ *une application (pas nécessairement linéaire).*
(i) On rappelle que f *est* **injective** *si*

$$\forall x, y \in \mathbb{K}^n, \quad f(x) = f(y) \Rightarrow x = y.$$

(ii) On dit que f *est* **surjective** *si pour tout* $y \in \mathbb{K}^m$ *il existe* $x \in \mathbb{K}^n$ *tel que* $y = f(x)$.
(iii) On dit que f *est* **bijective** *si* f *est à la fois injective et surjective, c'est-à-dire si, pour tout* $y \in \mathbb{K}^m$ *il existe un unique* $x \in \mathbb{K}^n$ *tel que* $y = f(x)$.

Définition 5. *Une application linéaire* $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ *et bijective est appelée un* **isomorphisme**.

On va voir plus loin que si $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ est un isomorphisme, alors nécessairement $m = n$. Dans le cas d'une application linéaire, le caractère injectif, surjectif et bijectif se traduit par des propriétés du noyau et de l'image (du fait de la linéarité).

Proposition 3. *Soit* $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$.
— f *est injective si et seulement si* $\ker f = \{0\}$.
— f *est surjective si et seulement si* $\mathrm{Im} f = \mathbb{K}^m$.

Proposition 4. *Soit* $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ *injective. Si* $\{v_1, ..., v_p\}$ *est une famille libre de* $\mathbb{K}^n$*, alors la famille* $(f(v_1), ..., f(v_p))$ *est libre.*

Preuve. Comme f est injective

$$0 = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j f(v_j) = f(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p) \;\Rightarrow\; \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p = 0 \Rightarrow \lambda_j = 0,\; \forall j = 1, ..., p,$$

la deuxième implication provenant de la liberté de $\{v_1, ..., v_p\}$. D'où le résultat. □

Théorème 5. *Soit* $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$*. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. f *est un isomorphisme de* $\mathbb{K}^n$ *sur* $\mathbb{K}^m$,
2. $n = m$ *et* f *est injective,*
3. $n = m$ *et* f *est surjective.*

Preuve. 1. ⇒ 2. : f est un isomorphisme. Soit $\{e_1, ..., e_n\}$ une base de $\mathbb{K}^n$. Alors $\{f(e_1), ..., f(e_n)\}$ est libre. Donc $n \leq m$. De plus, $Im(f) = Vect(f(e_1), ..., f(e_n)) = \mathbb{K}^m$ donc $\{f(e_1), ..., f(e_n)\}$ est génératrice, donc $n \geq m$. D'où le résultat.
2. ⇒ 1. Soit $\{e_1, ..., e_n\}$ une base de $\mathbb{K}^n$. Alors $\{f(e_1), ..., f(e_n)\}$ est libre dans $\mathbb{K}^n$, donc c'est une base de $\mathbb{K}^n$. Donc f est surjective. Donc f est un isomorphisme.
1. ⇒ 3. idem que ci-dessus.
3. ⇒ 1. Soit $\{e_1, ..., e_n\}$ une base de $\mathbb{K}^n$. Alors $\{f(e_1), ..., f(e_n)\}$ est génératrice dans $\mathbb{K}^n$ car f est surjective. Ainsi, $\{f(e_1), ..., f(e_n)\}$ est une base de $\mathbb{K}^n$. Donc f est injective et f est un isomorphisme. □

Proposition 6. *Si f est un isomorphisme de $\mathbb{K}^n$, sa bijection réciproque, notée f^{-1}, est également un isomorphisme de $\mathbb{K}^n$.*

Preuve. Vérifier la linéarité de f^{-1} en exercice ! □

Définition 6. *Soit u une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$. On appelle* **rang** *de u le nombre*

$$rgu := \dim \mathrm{Im} u.$$

Théorème 7 (Théorème du rang)**.** *Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$. On a*

$$\dim \ker u + rgu = n.$$

Preuve. Soit $\{e_1, ..., e_p\}$ une base de $Ker(u)$. Ainsi $\dim \ker u = p$. On complète cette famille en une base de $\mathbb{K}^n$ notée $\{e_1, ..., e_p, e_{p+1}, ..., e_n\}$. Il vient $Im(u) = Vect(u(e_{p+1}), ..., u(e_n))$ car $u(e_i) \in Ker(u)$ pour $1 \leq i \leq p$. Montrons que $\{u(e_{p+1}), ..., u(e_n)\}$ est libre. Pour cela, on écrit $\sum_{j=p+1}^{n} \lambda_j u(e_j) = 0$ ou encore par linéarité $u(\sum_{j=1}^{p+1} \lambda_j e_j) = 0$. Ainsi, $\sum_{j=1}^{p+1} \lambda_j e_j \in Ker(u)$. Mais, par définition $\sum_{j=1}^{p+1} \lambda_j e_j$ est dans un supplémentaire dans $\mathbb{K}^n$ de $Ker(u)$. Donc, on doit avoir $\lambda_j = 0$ pour tout $j = 1, ..., p+1$. On déduit que le rang de u vaut exactement $n - p$. □

3 Opérations sur les applications linéaires

Définition 7. *Soient $f, g \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$, $\lambda \in \mathbb{K}$. On définit les applications $f + g$ et λf par*

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \qquad \forall x \in \mathbb{K}^n,$$

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x) \qquad \forall x \in \mathbb{K}^n.$$

On vérifie facilement que :

Proposition 8. *Si $f, g \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$, alors $f + g \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$.*
Si $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$, $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\lambda f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$.

Définition 8. *Soient $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ et $g \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^m, \mathbb{K}^p)$. On définit l'application $g \circ f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^p$, composée de f et g, par*

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \qquad \forall x \in \mathbb{K}^n.$$

Proposition 9. *Si $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ et $g \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^m, \mathbb{K}^p)$, alors $g \circ f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^p)$.*

Notations : lorsque $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$, on note $f^2 = f \circ f$, $f^n = f \circ \cdots \circ f$.

4 Matrice d'une application linéaire

Définition 9. *Soient $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$, $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de $\mathbb{K}^n$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, ..., e'_m)$ une base de $\mathbb{K}^m$. Pour tout $j = 1, ..., n$, le vecteur $f(e_j)$ se décompose de manière unique sous la forme :*

$$f(e_j) = a_{1j} e'_1 + ... + a_{mj} e'_m.$$

On appelle matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ la matrice

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) := \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K}).$$

Proposition 10. *Soient $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$, $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de $\mathbb{K}^n$, $\mathcal{B}' = (e'_1, ..., e'_m)$ une base de $\mathbb{K}^m$ et $A = \mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$. Soient $x \in \mathbb{K}^n$, X le vecteur colonne des coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$ et Y le vecteur colonne des coordonnées de $f(x)$ dans la base $\mathcal{B}'$. On a la relation*

$$Y = AX. \tag{1}$$

Preuve. On a

$$x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \quad \text{et} \quad f(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j f(e_j)$$

d'où

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} e'_i = \sum_{i=1}^{m} (\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j) e'_i = \sum_{i=1}^{m} (AX)_i e'_i = \sum_{i=1}^{m} Y_i e'_i$$

d'où (1). □

Remarque 3. *En particulier, si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont respectivement les bases canoniques de $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}^m$, en notant les vecteurs x et $f(x)$ en colonnes, on a $f(x) = Ax$.*

Remarque 4.
1. *Si $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ et $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{K}^n$, on note $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f) := \mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$.*
2. *Pour toute base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{K}^n$ on a $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_{\mathbb{K}^n}) = I_n$.*

Proposition 11. *Soient $f, g \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de $\mathbb{K}^n$, $\mathcal{B}' = (e'_1, ..., e'_m)$ une base de $\mathbb{K}^m$. On a*

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f + g) = \mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) + \mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(g),$$
$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\lambda f) = \lambda \mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f).$$

Preuve. On procède par identification. Faisons le pour la somme par exemple. Soit $A = \mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$, $B = \mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(g)$, et $C = \mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f + g)$. En suivant le calcul ci-dessus on a pour $x \in \mathbb{K}^n$:

$$(f + g)(x) = \sum_{i=1}^{m} (CX)_i e'_i = f(x) + g(x) = \sum_{i=1}^{m} (AX)_i e'_i + \sum_{i=1}^{m} (BX)_i e'_i.$$

D'où $CX = AX + BX$ pour tout vecteur $x \in \mathbb{K}^n$, ce qui implique $C = A + B$. □

Proposition 12. *Soient $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$, $g \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^m, \mathbb{K}^p)$, $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de $\mathbb{K}^n$, $\mathcal{B}' = (e'_1, ..., e'_m)$ une base de $\mathbb{K}^m$, $\mathcal{B}'' = (e''_1, ..., e''_m)$ une base de $\mathbb{K}^p$. On a*

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}(g \circ f) = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}(g) \mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f).$$

On pose $C = \mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}(g \circ f)$, $B = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}(g)$, et $A = \mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$. Grâce à la remarque 3, on a d'une part en utilisant que $x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$,

$$(g \circ f)(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j g(f(e_j)) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} c_{kj} e''_k = \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{n} c_{kj} x_j \right) e''_k = \sum_{k=1}^{p} (CX)_k e''_k$$

et d'autre part comme $f(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j f(e_j)$ et $f(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} e'_i$, on a aussi

$$g(f(x)) = g\left(\sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} e'_i \right) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_j g(e'_i) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_j \sum_{k=1}^{p} b_{ki} e''_k = \sum_{k=1}^{p} \left[\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} b_{ki} a_{ij} \right) x_j \right] e''_k,$$

ce qui donne $g(f(x)) = \sum_{k=1}^{p} (BAX)_k e''_k$. Par identification, on trouve que $CX = BAX$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et donc $C = BA$.

Proposition 13. *Soient $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ et $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de $\mathbb{K}^n$ (pouvant être identiques). L'application linéaire f est un isomorphisme si et seulement si $\mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ est inversible. Dans ce cas on a*

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f^{-1}) = \mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)^{-1}. \tag{2}$$

Preuve. Soit $A = \mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$. Supposons que f soit un isomorphisme. Posons alors $\tilde{A} = \mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)^{-1}$. Soit X un vecteur colonne de $\mathbb{K}^n$ tel que $AX = 0$. Alors, $f(x) = 0$, donc $x = 0$. Donc A est inversible. Ainsi, $AX = Y$ équivaut à $X = A^{-1}Y$. Mais on a aussi $X = \tilde{A}Y$ puisque $x = f^{-1}(y)$. Par identification, on a donc $\tilde{A} = A^{-1}$ ce que l'on voulait. Réciproquement, supposons A est inversible. Alors, par un raisonnement similaire, f est injective donc f est un isomorphisme. On obtient donc la même relation $\tilde{A} = A^{-1}$ qui traduit (2). ☐

5 Changement de bases

Définition 10. *Soient $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, ..., e'_n)$ deux bases de $\mathbb{K}^n$. On appelle matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ la matrice*

$$P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_{\mathbb{K}^n}).$$

Autrement dit, la $j-$ème colonne de $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ est le vecteur colonne des coordonnées de e'_j dans la base $\mathcal{B}$.

On parle parfois pour $\mathcal{B}$ de l'ancienne base, pour $\mathcal{B}'$ de la nouvelle base. Ainsi $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ exprime la nouvelle base en fonction de l'ancienne base.

Proposition 14. *Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de $\mathbb{K}^n$. La matrice $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ est inversible et on a*

$$P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}^{-1} = P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}.$$

Preuve. L'application identité étant inversible, on applique la proposition 13 ☐

Proposition 15. *Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de $\mathbb{K}^n$. Soient $x \in \mathbb{K}^n$, X le vecteur colonne des coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$ et X' le vecteur colonne des coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}'$. On*

$$X = P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}X'.$$

Preuve. Soit $(p_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ les coefficients de $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$. Dans l'ancienne et la nouvelle base on a :

$$x = \sum_{j=1}^n x_j e_j = \sum_{j=1}^n x'_j e'_j = \sum_{j=1}^n x'_j \sum_{i=1}^n p_{i,j} e_i = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n p_{i,j} x'_j \right) e_i$$

d'où le résultat par identification. ☐

Théorème 16. *Soient $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de $\mathbb{K}^n$, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux bases de $\mathbb{K}^m$. On a*

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(f) = P_{\mathcal{C}\mathcal{C}'}^{-1} \mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}.$$

On fait la preuve du théorème dans le cadre de la remarque ci-dessous uniquement.

Remarque 5. *Si $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de $\mathbb{K}^n$, on a en notant $A = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f)$ et $A' = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}'}(f)$:*

$$A' = P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}^{-1} A P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}.$$

Soit $P := P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$. D'une part on a en partant de l'ancienne base $x = \sum_j x_j e_j$ et $f(x) = \sum_j x_j f(e_j)$ ce qui donne

$$f(x) = \sum_j x_j \sum_i a_{i,j} e_i.$$

Comme $X = PX'$, on obtient $x_j = \sum_k p_{jk} x'_k$, ce qui donne

$$f(x) = \sum_j \sum_k p_{jk} x'_k \sum_i a_{i,j} e_i = \sum_i \left[\sum_k \left(\sum_j a_{i,j} p_{j,k} x'_k \right) \right] e_i.$$

Partons maintenant de la nouvelle base $x = \sum_k x'_k e'_k$ et $f(x) = \sum_k x'_k f(e'_k)$ ce qui donne

$$f(x) = \sum_k x'_k \sum_l a'_{l,k} e'_l = \sum_k x'_k \sum_l a'_{l,k} \sum_i p_{i,l} e_i = \sum_i \left[\sum_k \left(\sum_l p_{i,l} a'_{l,k} \right) x'_k \right] e_i$$

en utilisant $e'_l = \sum_i p_{i,l} e_i$. Par identification, il vient donc que :

$$\forall x \in \mathbb{K}^n, \ \forall 1 \leq i \leq n, \ (APX')_i = (PA'X)_i,$$

ce qui implique $APX' = PA'X'$ pour tout vecteur x. On conclue que $AP = PA'$ i.e. $A' = P^{-1}AP$.