Université d'Avignon | 2021-2022
Algèbre 2 | Licence 1 Mathématiques-Informatique

CC2 : 25 avril 2022 : 8h30-10h (1h ; 1h20 pour les tiers temps)

On attachera le plus grand soin à la présentation et aux calculs. Aucun document ni appareil numérique autorisé.

Exercice 1 (5.5 points)**.** *Il s'agit de deux questions indépendantes.*

1) [2.5 points]. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ *une famille libre de* $\mathbb{R}^n$. *Justifier si les familles suivantes sont libres ou liées :*

$$\{e_1, 2e_2, e_3\} \ ; \ \{e_1, e_3\} \ ; \ \{e_1, 2e_1 + e_4, e_4\} \ ; \ \{3e_1 + e_3, e_3, e_2 + e_3\} \ ; \ \{2e_1 + e_2, e_1 - 3e_2, e_4, e_2 - e_1\}.$$

2) [3 points]. *Soit* $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x + y + 2z = 0\}$ *et* $G = \mathrm{Vect}(u)$ *où* $u = (3, -1, -1)$. *Donner une base de* F, *calculer* $F \cap G$ *puis* $F + G$.

Exercice 2 (4.5 points)**.** *1)* [2 points]. *Soit* $a, b \in \mathbb{R}$. *Calculer le déterminant de la matrice* A *définie par*

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & a & b \\ 0 & b & a \end{pmatrix}.$$

2) [2.5 points]. *Calculer le rang de* A *en fonction de* a *et* b *(indication : on pourra d'abord étudier le cas* $a = 0$ *puis ensuite le cas* $a \neq 0$*).*

Exercice 3 (7 points)**.** *Soit* $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3)$ *l'application linéaire définie par*

$$f(x, y, z, t) = (2x + y - t, x + 8y - 9z - 2t, x - 2y + 3z).$$

1) [3 points]. *Calculer une base du noyau de* f *et préciser sa dimension.*

2) [2 points]. *Donner la dimension de* $\mathrm{Im}(f)$ *et calculer une base de* $\mathrm{Im}(f)$.

3) [2 points]. *Donner une équation cartésienne de* $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 4 (6 points)**.** *Soit* $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ *l'endomorphisme défini par* $f(x, y, z) = (x - y, y - x, x - z)$.

1) [1 point]. *Ecrire la matrice* A *de* f *dans la base canonique* $\mathcal{E}$ *de* $\mathbb{R}^3$.

2) [1 point]. *Soit les trois vecteurs de* $\mathbb{R}^3$ *:* $u = (1, 0, 1)$, $v = (0, 1, 1)$, $w = (1, 1, 0)$ *et soit* $\mathcal{F} = \{u, v, w\}$. *Montrer que* $\mathcal{F}$ *est une base de* $\mathbb{R}^3$.

3) [1 point]. *Donner la matrice de passage* P *de* $\mathcal{E}$ *vers* $\mathcal{F}$.

4) [3 points]. *Calculer* P^{-1} *et donner la matrice de* f *dans la base* $\mathcal{F}$.