Algèbre générale 1 — Corrigé succinct CC2 — 2018–19 — L355

Ex1

3) $(-1)\times 44 + 5\times 9 = 1$

$x \equiv 2\times 5\times 9 + 5\times(-44)\ [44\times 9]$

$\equiv -130\ [44\times 9]$

Ex2

1) • $I_2 = A(1,0) \in \mathbb{H}$

• $\forall x,y,x',y' \in \mathbb{C}$, $A(x,y)-A(x',y') = A(x-x',y-y')$

et $A(x,y)\,A(x',y') = A(xx'-y\bar{y}',\ xy'+y\bar{x}')$

2) $A(0,0)=0$ n'est clairement pas inversible et si $(x,y)\in\mathbb{C}^2\setminus\{(0,0)\}$ alors $A\left(\frac{\bar{x}}{|x|^2+|y|^2}, \frac{-y}{|x|^2+|y|^2}\right)$ est un inverse de $A(x,y)$ dans $\mathbb{H}$

3) $A(1,1)\,A(1,i) = A(1+i,1+i) \neq A(1-i,1+i) = A(1,i)\,A(1,1)$ donc la multiplication dans $\mathbb{H}$ est non-commutative ainsi $\mathbb{H}$ n'est pas un corps.

Ex3

2) Si $x\in A$ est inversible, $\exists x'\in A$ tq $xx'=1$ donc $n(x)n(x')=n(1)=1$ or $n(x'),n(x)\in\mathbb{Z}$ donc $n(x)=\pm 1$. Réciproquement si $n(x)=\pm 1$ avec $x=a+\sqrt{5}b$ alors $1=\pm n(x) = (a+\sqrt{5}\,b)\,[\pm(a-\sqrt{5}\,b)]$ donc $\pm(a-\sqrt{5}b)$ est un inverse de x dans A. $x_0 = 2+\sqrt{5}$

3) $k\equiv 0,1,2,3\ [4] \Rightarrow k^2 \equiv 0,1\ [4]$ ainsi on obtient au cas par cas que $a^2-5b^2 \equiv 0,1,3\ [4]$ d'où $n(x)\not\equiv 2\ [4]$ en particulier $n(x)\neq \pm 2$

5) Si $x=yz$ dans A et $n(x)=\pm 4$ alors $\overset{\in\mathbb{Z}}{n(y)}\,\overset{\in\mathbb{Z}}{n(z)} = \pm 4$ d'où $n(y)=\pm 4$ et $n(z)=\pm 1$ ou l'inverse (car $n(y)\neq\pm 2$) ainsi y ou z est inversible

6) Si $a,b\in\mathbb{Z}$ sont tq $2(a+\sqrt{5}b) = 1\pm\sqrt{5}$ alors $2a=1$ ce qui est impossible

7) 2 est irréductible et divise $(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5}) = -4 = 2\times(-2)$ dans A or il ne divise ni $(1+\sqrt{5})$, ni $(1-\sqrt{5})$ donc il n'est pas premier