Nom Prénom

Université d'Avignon - Faculté des sciences Année 2019-2020
L3-S5 Algèbre générale 1

Contrôle continu n° 2

Durée 1h20

QCM. **(2p)** Cocher les bonnes réponses ($+0,5$ si juste, 0 si rien, $-0,5$ si faux). Soit A et A' deux anneaux commutatifs non nuls, et $f : A \to A'$ un morphisme d'anneaux.

1. Soit J un idéal de A'. Alors $f^{-1}(J)$ est
   - ☐ un sous-anneau de A
   - ☐ un sous-groupe de $(A, +)$
   - ☐ un idéal de A
   - ☐ sans structure particulière.

2. L(es) endomorphisme(s) de l'anneau $\mathbb{R}$ est (sont) :
   - ☐ l'application nulle sur $\mathbb{R}$
   - ☐ l'application identité de $\mathbb{R}$
   - ☐ les homothéties de $\mathbb{R}$
   - ☐ l'application constante 1 sur $\mathbb{R}$.

3. Soit I un idéal de A. Alors $f(I)$ est
   - ☐ un sous-anneau de A'
   - ☐ un sous-groupe de $(A', +)$
   - ☐ un idéal de A'
   - ☐ sans structure particulière.

Exercice 1.

1. Déterminer le pgcd de 189 et 255 dans l'anneau $\mathbb{Z}$. **(1,5p)**
2. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation diophantienne : $189x + 255y = 3$. **(2p)**

Exercice 2.

Soit $\mathbb{Z}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients entiers. On admettra que $(\mathbb{Z}[X], +, \times)$ est un anneau. On désigne par A le sous-ensemble de $\mathbb{Z}[X]$ formé des polynômes $P \in \mathbb{Z}[X]$ tels que $P'(0) \in 2\mathbb{Z}$. Enfin, soit

$$\mathcal{I} = \{P \in A; P(0) = 0\}.$$

1. Pour tout entier naturel k, décrire l'idéal de $\mathbb{Z}[X]$ engendré par X^k. **(0,5p)**
2. Montrer que A est un sous-anneau de $\mathbb{Z}[X]$. **(2p)**
3. Montrer que $\mathcal{I}$ est un idéal de A mais qui n'est pas principal. **(1p+2p)**

Tournez S.V.P. ===>

Exercice 3.

Soient I et J deux idéaux de l'anneau commutatif A. On définit le radical de I par :

$$\sqrt{I} = \{x \in A; \exists n \in \mathbb{N}^*, x^n \in I\}.$$

1. Montrer que $\sqrt{I}$ est un idéal contenant I. **(2p)**
2. Si $A = \mathbb{Z}$, $I = 2\mathbb{Z}, 8\mathbb{Z}, 18\mathbb{Z}$, que vaut $\sqrt{I}$? Plus généralement, si $p_1, \ldots, p_n$ sont des nombres premiers non associés et $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sont dans $\mathbb{N}^*$, chercher $\sqrt{(p_1^{\alpha_1} \ldots p_n^{\alpha_n})\mathbb{Z}}$. **(1,5p+1,5p)**
3. Montrer que $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$. **(1p)**
4. Soit IJ l'ensemble des sommes finies de produits d'un élément de I par un élément de J. Montrer que IJ est un idéal. **(1p)**
5. Montrer que $\sqrt{IJ} = \sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$. **(2p)**