Licence de mathématiques-S5 — Algèbre générale 1
Avignon Université — Année 2021-22

TD4
Réduction d'endomorphismes de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

Dans ce texte, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$; E est en général un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

Exercice 1 : Soit A et B les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) Trouver, *sans calcul,* deux valeurs propres de A, un vecteur propre et deux sous-espaces stables par l'endomorphisme de $\mathbb{K}^4$ associé à A.

(2) Que représente la matrice B ?

Exercice 2 : Soit A la matrice à coefficients dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 3 \\ 3 & -6 & 5 \end{pmatrix}$$

(1) Calculer le polynôme caractéristique de A.

(2) Montrer que A est diagonalisable et trouver une matrice de passage qui diagonalise A.

Exercice 3 : Soit deux endomorphismes $u, v \in L(E)$ qui commutent, c'est-à-dire tels que $u \circ v = v \circ u$.

a) On pose $Sp(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ et pour $i \in [\![1, p]\!]$, on note $E(u; \lambda_i)$ le sous-espace propre associé à la valeurs propre λ_i de u. Montrer que $E(u; \lambda_i)$ est stable par v.

b) Soit n la dimension de E. On suppose que $p = n$, c'est-à-dire que u possède n valeurs propres distinctes. Montrer que u et v sont tous deux diagonalisables, et qu'il existe une une base de E dans laquelle les matrices de u et de v sont toutes deux diagonales.

Exercice 4 : Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme de degré $n \geq 1$ tel que $P(0) \neq 0$. Montrer que tout endomorphisme u de E qui vérifie $P(u) = 0$ est bijectif, et que $u^{-1} = Q(u)$, où Q est un polynôme de degré $n - 1$ à déterminer.

Exercice 5 : Le but de l'exercice est de prouver que tout endomorphisme de E dont le polynôme caractéristique P_u est scindé dans $\mathbb{K}[X]$ est trigonalisable. La preuve se fait par récurrence sur la dimension de E.

1. Justifier que le résultat est vrai pour $\dim E = 1$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que le résultat soit vrai pour tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n + 1$ et u un endomorphisme de E tel que P_u soit scindé.

a) Montrer que u a au moins une valeur propre, qu'on note λ_1. Soit e_1 un vecteur propre associé à λ_1, et $\mathcal{B}$ une base de E dont le premier vecteur est e_1. On pose $A = Mat(u; \mathcal{B})$. On a donc

$$A = \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & b \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$$

avec $b = (a_{1,2} a_{1,3} \dots a_{1,n+1}) \in M_{1,n}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{i,j}) \in M_n(\mathbb{K}),\ \ b_{i,j} = a_{i+1,j+1}$.

b) Exprimer P_u en fonction de P_B, polynôme caractéristique de la matrice B. En déduire qu'il existe une matrice $Q \in M_n(\mathbb{K})$ inversible et une matrice $T \in M_n(\mathbb{K})$ triangulaire supérieure telles que $Q^{-1} B Q = T$.

c) On pose $P = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & Q \end{array}\right) \in M_{n+1}(\mathbb{K})$. Montrer que P est inversible, et que $P^{-1}AP$ est une matrice triangulaire supérieure. Conclure.

Exercice 6 : Soit A la matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) Calculer le polynôme minimal de A.

(2) En déduire des expressions de A^{-1}, A^3, A^4, A^5 comme des combinaisons linéaires de I_3, A et A^2.

Exercice 7 : Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ est trigonalisable mais pas diagonalisable. La réduire et déterminer son polynôme minimal.

Exercice 8 : Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(1) Calculer le polynôme caractéristique de f. Montrer que f est trigonalisable. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

(2) Quel est le polynôme minimal de f ?

(3) Trouver une matrice inversible P et une matrice triangulaire supérieure T (aussi simple que possible) telles que $A = PTP^{-1}$.

(4) On rappelle que la formule du binôme

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$$

est valide pour deux matrices carrées et de même taille A et B qui commutent, c'est-à-dire qui vérifient $AB = BA$. Utiliser cette formule pour calculer T^n.

(5) Calculer A^n.

Exercice 9 : Réduire sous forme de Jordan l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice relativement à la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 10 : Dans chacun des cas suivants, trouver les formes de Jordan possibles pour $u \in L(E)$

(1) $\dim E = 4$; le polynôme minimal de u est $(X^2-1)(X-3)^2$.

(2) $\dim E = 4$; le polynôme minimal de u est X^2.

(3) $\dim E = 4$; le polynôme minimal de u est X^2 et $\dim(\ker u) = 2$.

(4) $\dim E = 4$; le polynôme minimal de u est X^2 et $\dim(\ker u) = 3$.

(5) $\dim E = 4$; le polynôme minimal de u est X^3.

(6) $\dim E = 5$; le polynôme minimal de u est $X^2(X-1)^2$.

(7) $\dim E = 5$; le polynôme minimal de u est $X^2(X-1)^2$ et $\dim(\ker(u - id_E)) = 1$.

(8) $\dim E = 5$; le polynôme minimal de u est $X(X-1)^3$.