CH 6) Espaces vectoriels

Dans ce texte, K désigne un corps commutatif, d'élément unité $1 \neq 0$. Les exemples typiques à avoir en tête sont $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, mais aussi le corps $\mathbb{F}_p$ à p éléments (où p est un nombre premier). Le sens de ce premier cours est de prendre conscience que tout ce qui concerne les espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ reste vrai sur un corps quelconque ; les idées venues de la géométrie du plan ou de l'espace deviennent alors utiles pour comprendre ces corps quelconques. Les exercices font partie du cours et devront être maîtrisés.

1. Premières notions

1.1. Notion d'espace vectoriel

Définition 1.1. *On appelle K-espace vectoriel tout triplet $(E, +, *)$ où :*

(1) $(E, +)$ *est un groupe abélien, d'élément neutre noté* 0 *;*

(2) $* : K \times E \to E$ *est une loi externe vérifiant les axiomes :*

$$\forall \alpha \in K \quad \forall (x, y) \in E^2 \quad \alpha * (x + y) = (\alpha * x) + (\alpha * y) \tag{1}$$

$$\forall (\alpha, \beta) \in K^2 \quad \forall x \in E \quad (\alpha + \beta) * x = (\alpha * x) + (\beta * x) \tag{2}$$

$$\forall (\alpha, \beta) \in K^2 \quad \forall x \in E \quad \alpha * (\beta * x) = (\alpha\beta) * x \tag{3}$$

$$\forall x \in E \quad 1 * x = x \tag{4}$$

- Les éléments de K sont appelés *scalaires*, ceux de E sont souvent appelés vecteurs, même s'ils ne s'agit pas toujours de vecteurs du plan ou de l'espace (voir exercice 1 ci-dessous).
- Ne pas confondre l'élément nul de K avec l'élément nul de E (ie. l'élément neutre du groupe $(E, +)$) ! On notera parfois 0_E l'élément nul de E, mais aussi tout simplement 0.
- On parle de K-espace vectoriel nul lorsque E est réduit à un élément unique, qui est alors nécessairement 0.
- Nous avons noté $*$ la loi externe, pour bien la distinguer de la loi multiplicative du corps. Dans la pratique, la loi externe $*$ sera notée ., le signe . étant d'ailleurs souvent omis.
- On utilise souvent la notation abrégée K-**ev** pour signifier «K-espace vectoriel».

Exercice 1. Le corps K lui-même, où la loi multiplicative interne est vue comme une «loi externe» est un K-espace vectoriel.

Exercice 2. Soit n un entier positif. L'ensemble des n-uplets d'éléments de K muni des lois $(x_1, ..., x_n) + (y_1, ..., y_n) := (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n)$ et $\alpha.(x_1, ..., x_n) = (\alpha.x_1, ..., \alpha.x_n)$ est un K-ev. On le note K^n.

Exercice 3. Soit I un ensemble, et soit K^I l'ensemble des applications de I vers K. Pour tout f, g dans K^I, et pour tout α dans K, on définit $f + g$ comme étant l'application qui à un élément x de I associe $f(x) + g(x)$, et $\alpha * f$ l'application qui envoie x sur $\alpha f(x)$. Montrer que $(I^X, +, *)$ est un K-espace vectoriel.

Exercice 4. Soit I un ensemble, E un K-espace vectoriel, et soit E^I l'ensemble des applications de I vers E. Trouver une structure naturelle de K-espace vectoriel sur E^I (lorsque I est l'ensemble des entiers entre 1 et n, on le note tout simplement E^n).

Exercice 5. Tout anneau contenant un sous-anneau isomorphe de K est un K-espace vectoriel. En particulier, l'anneau des polynômes $K[X]$.

Exercice 6. Pour tout n, les polynômes sur K de degré $\leq n$ est un K-espace vectoriel.

1.2. Espace vectoriel produit

Théorème - Définition 1.2. *Soient E_1, ... , E_n une famille finie de K-espaces vectoriels. L'ensemble produit $\prod_{i=1}^{n} E_i = E_1 \times ... \times E_n$ munis des lois suivantes :*

$$(x_i)_{1\leq i\leq n} + (y_i)_{1\leq i\leq n} = (x_i + y_i)_{1\leq i\leq n}$$
$$\alpha.(x_i)_{1\leq i\leq n} = (\alpha.x_i)_{1\leq i\leq n} \quad \forall \alpha \in K$$

*est un K-espace vectoriel, appelé **produit des E_i**.* □

1.3. Règles de calcul

Proposition 1.3. *Soit E un K-espace vectoriel. Pour tout (α, x, y) dans $K \times E \times E$ on a :*

(1) $\alpha.0 = 0$ *et* $\alpha(-x) = -\alpha.x$,

(2) $0.x = 0$ *et* $(-\alpha).x = -\alpha.x$,

(3) $\alpha.x = \alpha.y \Leftrightarrow (x = y$ *ou* $\alpha = 0)$,

(4) $\alpha.x = 0 \Leftrightarrow (\alpha = 0$ *ou* $x = 0)$

Preuve Pour tout α dans K, on définit l'application $h_\alpha : E \to E$ (*homothétie de rapport* α qui envoie x sur $\alpha.x$. De même, pour tout x dans E, on note h_x l'application de K vers E qui envoie α sur $\alpha.x$.

Les axiomes d'espace vectoriel montrent directement que h_α et h_x sont des morphismes de groupes : le premier de $(E, +)$ dans lui-même, le second de $(K, +)$ dans $(E, +)$.

1: Découle du fait que $h_\alpha : (E, +) \to (E, +)$ est un morphisme de groupes.

2: Découle du fait que $h_x : (K, +) \to (E, +)$ est un morphisme de groupes.

3: Si $\alpha = 0$, alors $\alpha.x = 0 = \alpha.y$. Si $x = y$, alors $\alpha.x = \alpha.y$. Inversement, supposons $\alpha.x = \alpha.y$ et $\alpha \neq 0$. Alors, $h_{\alpha^{-1}}$ est manifestement une application inverse de l'application h_α d'après l'axiome 2.4 des espaces vectoriels, ce qui montre que h_α est une bijection, en particulier injective. Donc $x = y$.

4: C'est un cas particulier de 3 (pour $y = 0$). □

1.4. Sous-espaces vectoriels

Définition 1.4. *On appelle **sous-espace vectoriel** (abbrév. sev) d'un K-espace vectoriel $(E, +, .)$ tout K-espace vectoriel $(E', +, .)$ où E' est une partie de E stable pour les lois $+$ et ., muni des lois induites. Par abus de langage, on parle alors du sev E' de E.*

Nota Bene : Être stable par . signifie que pour tout x dans E', et tout scalaire α, on a $\alpha.x \in E'$.

Proposition 1.5. *Soit $(E, +, .)$ un K-ev. Une partie E' de E est un sev de E si et seulement si elle est non-vide et stable par les lois $+$, .*

□

1.4.1. Familles presques nulles

Définition 1.6. *Le **support** d'une famille $(x_i)_{(i\in I)}$ d'éléments de E est la partie de l'ensemble I formé des indices i pour lesquels x_i est non-nul. Une famille à support fini est dite **presque nulle.***

Pour une telle famille, on pose $\sum_{i\in I} x_i$, ou plus simplement $\sum_I x_i$ la somme de tous les x_i où i décrit le support. Ceci a un sens puisque le support est fini et que le groupe $(E, +)$ est commutatif. Notons que cette somme est un élément de E.

Convention : Si I, ou si le support de $(x_i)_{(i\in I)}$ est vide, on convient d'écrire $\sum_I x_i = 0$.

Par définition, une famille $(x_i)_{(i\in I)}$ d'éléments de E correspond à une application de l'ensemble des indices I et à valeur dans E : l'ensemble des familles de E se note donc E^I. Nous noterons $E^{(I)}$ l'ensemble des familles presques nulles.

On peut ajouter des familles d'éléments de E indexées par le même ensemble I :

$$(x_i)_{(i\in I)} + (y_i)_{(i\in I)} = (x_i + y_i)_{(i\in I)}$$

On remarque que si les deux familles sont presque nulles, il en est de même pour leur somme.

On peut aussi multiplier une famille par un scalaire α :

$$\alpha.(x_i)_{(i\in I)} = (\alpha.x_i)_{(i\in I)}$$

Là encore, le résultat est presque nul si $(x_i)_{(i\in I)}$ est presque nulle.

Proposition 1.7. *$(E^I,+,.)$ est un K-espace vectoriel, et $(E^{(I)},+,.)$ est un K-sous espace vectoriel de $(E^I,+,.)$.* $\square$

Remarque 1.8. *Évidemment, quand I est un ensemble fini, E^I et $E^{(I)}$ sont égaux. En fait, si n est le cardinal de I, c'est un cas particulier de la notion d'espace produit où tous les E_i sont égaux : dans ce cas, $E^I = E^{(I)} = E \times ... \times E$.*

1.4.2. Combinaisons linéaires On définit de manière similaire la notion de famille presque nulle de scalaires $(\alpha_i)_{(i\in I)}$.

Définition 1.9. *Soit $(x_i)_{(i\in I)}$ une famille d'éléments d'un K-espace vectoriel E - pas nécessairement presque nulle. On appelle* ***combinaison linéaire*** *de la famille tout x dans E auquel on peut associer une famille presque nulle $(\alpha_i)_{(i\in I)}$ d'éléments de K tels que $x = \sum_I \alpha_i.x_i$.*

La somme $\sum_I \alpha_i.x_i$ est bien définie puisque la famille $(\alpha_i.x_i)_{(i\in I)}$ est presque nulle (même si $(x_i)_{(i\in I)}$ ne l'est pas). Pour une combinaison linéaire x donnée, il y a en général plusieurs familles $(\alpha_i)_{(i\in I)}$ possibles.

1.4.3. Sous-espace vectoriel engendré.

Théorème 1.10. *Soit $(E_i)_{(i\in I)}$ une famille de K-sev d'un K-ev E. Alors $\bigcap_{i\in I} E_i$ est un K-sev de E.* $\square$

En particulier, si X est une partie quelconque de E, l'intersection de tous les sev contenant X est un K-sev. Cette intersection contient X, et est contenue dans tous les sev contenant X !

Définition 1.11. *On appelle sous-espace vectoriel de E engendré par X le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant X. On le note Vect(X).*

Cette définition s'étend aux familles d'éléments de E : rappelons que par définition, une famille $\bar{x} = (x_i)_{(i\in I)}$ d'éléments de E est la donnée d'une application d'un ensemble d'indice I à valeurs dans E. On appelle sous-espace vectoriel engendré par cette famille le sev engendré par l'image de cette application. On le notera $\mathrm{Vect}(\bar{x})$.

Théorème 1.12. *L'ensemble M des combinaisons linéaires d'une famille $\bar{x}$ d'éléments d'un K-ev E est égal au sev engendré par la famille.*

Preuve : Tout sev de E contenant les éléments de la famille contient nécessairement toutes les combinaisons linéaires, donc :

$$M \subset \mathrm{Vect}(\bar{x})$$

Par ailleurs, M est non-vide (il contient 0) et est stable par les lois d'espace vectoriel : c'est donc un sev de E. Donc :

$$\mathrm{Vect}(\bar{x}) \subset M$$

Le théorème s'en déduit. $\square$

Si $\mathrm{Vect}(\bar{x})$ est E tout entier, on dit que $\bar{x}$ est une **famille génératrice de E.**

1.5. Applications linéaires

Définition 1.13. *Soient E, F deux K-espaces vectoriels. Une K-**application linéaire** (ou linéaire s'il n'y a pas d'ambigüité sur le corps K) de E dans F est une application $u : E \to F$ vérifiant :*

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \forall (\alpha,\beta) \in K^2,\ \ u(\alpha.x + \beta.y) = \alpha.u(x) + \beta.u(y)$$

Une application (K-)linéaire ***bijective*** *est appelée (K-)**isomorphisme.** Dans le cas $F = E$, une application (K-)linéaire est appelée (K-)**endomorphisme** de E. Si elle est de plus bijective, elle est appelée (K-)**automorphisme.***

Proposition 1.14 (Composition d'applications linéaires)**.** *Soient E, F, G trois K-espaces vectoriels. Si $u : E \to F$ et $v : F \to G$ sont des applications linéaires, alors $v \circ u : E \to G$ est une application linéaire.*

Si $u : E \to F$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels, alors l'application réciproque $u^{-1} : F \to E$ est elle-aussi un isomorphisme d'espaces vectoriels ; elle est en particulier linéaire.

$\square$

Remarque 1.15. *Toute application linéaire $u : E \to F$ envoie 0_E sur 0_F. Elle envoie aussi l'opposé $-x$ d'un élément de E sur l'opposé $-u(x)$ de l'image.*

Proposition 1.16. *Soit $u : E \to F$ une application linéaire. Pour toute famille $(x_i)_{(i\in I)}$ d'éléments de E, et toute famille presque nulle $(\alpha_i)_{(i\in I)}$ d'éléments de K, la famille $(\alpha_i.x_i)_{(i\in I)}$ est presque nulle, et on a :*

$$u(\sum_I \alpha_i.x_i) = \sum_I \alpha_i.u(x_i)$$

□

Définition 1.17. *Deux K-espaces vectoriels E et F sont dits (K-)isomorphes s'il existe un (K-)isomorphisme de l'un vers l'autre.*

Notations : Soient E, F deux K-ev. On note :
- $\mathcal{L}_K(E,F)$ l'ensemble des applications (K-)linéaires de E vers F,
- $\mathcal{L}_K(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E,
- $\mathrm{Aut}_K(E)$, ou $\mathrm{GL}(E,K)$, ou $\mathrm{GL}_K(E)$, l'ensemble des automorphismes de E, qu'on appelle aussi *groupe linéaire* de E.

Lorsqu'aucune confusion n'est à craindre, on omet d'écrire K en indice.

Exercice 7. Montrer que $\mathcal{L}(E,F)$ et $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E,E)$ sont naturellement munis d'une structure de K-ev (ce sont des K-sev de F^E, E^E).

Exercice 8. Montrer que le K-ev $\mathcal{L}_K(K)$ est isomorphe à K.

Exercice 9. Vérifier que $(\mathrm{GL}(E), \circ)$, où $\circ$ est la loi de composition, est un groupe.

1.5.1. Exemples

Application identité : L'application identité de E dans E qui envoie tout x de E sur lui-même est K-linéaire. On la note Id_E.

Application nulle : L'**application nulle** de E dans F est l'application qui envoie tout x de E sur l'élément nul de F. C'est une application K-linéaire. On la note 0.

Homothétie : Pour tout scalaire α l'homothétie $h_\alpha : E \to E$ définie lors de la preuve de la Proposition 1.3 est une application linéaire [1].

1.5.2. Image directe, image réciproque par une application linéaire

Proposition 1.18. *Soient E et F deux K-ev et $u : E \to F$ une application linéaire.*
- *Si E' est un sev de E, alors l'image $u(E')$ est un sev de F',*
- *Si F' est un sev de F, alors $u^{-1}(F')$ est un sev de E'.*

□

Nota Bene : Rappelons que $u^{-1}(F')$ désigne l'ensemble des éléments de E dont l'image par u est dans F' - u n'est a priori pas injective et n'admet donc pas d'application réciproque !

Cas particuliers :

- Image de u : $\mathrm{Im}(u) := u(E)$ est un sev de F.

- Noyau de u : $\mathrm{Ker}(u) := u^{-1}(0_F)$ est un sev de E.

Pour que u soit injective, il suffit qu'elle le soit en tant que morphisme de groupes ! Donc ceci équivaut à ce que le noyau $\mathrm{Ker}(u)$ soit réduit à $\{0_E\}$.

1.6. Espaces vectoriels quotients

1.6.1. Définition

Proposition 1.19. *Soit E un K-ev et F un sev de E. Alors, la relation $\mathcal{R}$ sur E définie par :*

$$(x\mathcal{R}y) \Leftrightarrow (x - y \in F)$$

est une relation d'équivalence. □

Ceci découle immédiatement du fait que $(F,+)$ est un sous-groupe de $(E,+)$!

Définition 1.20. *L'ensemble quotient de cette relation d'équivalence est noté E/F. On note $p_F : E \to E/F$ la surjection canonique.*

La théorie des groupes nous dit déjà que la loi $+$ induit sur E/F une loi de groupe $\bar{+}$ pour laquelle p_F est un morphisme surjectif. De manière similaire :

Proposition 1.21. *Il existe une unique loi externe $* : K \times E/F \to E/F$ pour laquelle $(E/F, \bar{+}, *)$ soit un K-ev et telle que p_F soit une application linéaire.* □

---

1. Observons que l'homothétie de rapport 0 est l'application nulle, et que celle de rapport 1 n'est autre que l'application identité !

Il s'agit bien sûr de l'application définie par $\alpha * [x] = [\alpha.x]$, où x est un représentant de la classe d'équivalence $[x]$. Comme toujours dans ce genre d'observation, le point crucial est de voir que cette application est bien définie : si y représente lui aussi la classe $[x]$, alors $x - y$ est dans F. Comme F est stable par homothéties, $\alpha.x - \alpha.y = \alpha.(x - y)$ est lui aussi dans F, et $\alpha.y$ représente donc la même classe d'équivalence que $\alpha.x$, d'où l'affirmation.

Une fois ceci bien observé, on se permet de noter désormais $+$ et $.$ les lois dans le K-ev quotient E/F au lieu de $\bar{+}$, $*$.

1.6.2. Décomposition canonique

Théorème 1.22. *Soit $f : E \to F$ une application linéaire entre K-evs, soit $p_f : E \to E/Ker(f)$ la surjection canonique. Alors, il existe une et une seule application linéaire $\bar{f} : E/Ker(f) \to F$ telle que :*

$$f = \bar{f} \circ p_f$$

Cette application est injective ; c'est un isomorphisme entre $E/Ker(f)$ et $Im(f) \subset F$.

Pour montrer ce théorème, on peut raisonner ainsi : la relation d'équivalence en jeu ne dépend que de la structure de groupes additifs de E et F. On sait donc qu'il existe un unique morphisme de groupe $p_f : E/\mathrm{Ker}(f) \to F$ tel que $f = \bar{f} \circ p_f$, et que ce morphisme est un isomorphisme (de groupes !) entre $E/\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$. Le seul point est donc de montrer que $\bar{f}$ est une application linéaire, ce qui, comme on sait déjà que c'est un morphisme de groupes pour la loi $+$, se réduit à montrer que pour tout scalaire α et toute classe $[x]$, on a $\bar{f}(\alpha.[x]) = \alpha.\bar{f}([x])$. Or, soit x un représentant de $[x]$: $\alpha.x$ représente $[\alpha.x] = \alpha.[x]$, donc $\bar{f}(\alpha.[x]) = f(\alpha.x) = \alpha.f(x) = \alpha.\bar{f}([x])$. cqfd.

2. Somme de sous-espaces vectoriels

2.1. Somme d'une famille de sous-espaces vectoriels, somme directe.

2.1.1. Somme

Définition 2.1. *Soit $(E_i)_{(i\in I)}$ une famille de sous-espaces vectoriels d'un K-espace vectoriel E. On appelle* **somme des** *E_i et on note $\sum_{i\in I} E_i$ le sous-espace vectoriel engendré par l'union des E_i.*

Proposition 2.2. *Soit $(E_i)_{(i\in I)}$ une famille de sous-espaces vectoriels d'un K-espace vectoriel E. La somme $\sum_{i\in I} E_i$ est l'ensemble des sommes $\sum_{i\in I} x_i$ où $(x_i)_{(i\in I)}$ parcourt l'ensemble des familles presque nulles d'éléments de E telles que $x_i \in E_i$ pour tout $i \in I$.*

Preuve : Comme celle du Théorème 1.12. □

Lorsque la famille est finie, ie. qu'on peut l'indexer par l'ensemble I des entiers de 1 à n, on peut noter $E_1 + ... + E_n$ au lieu de $\sum_{i\in I} E_i$.

La Proposition 2.2 signifie que tout élément de $\sum_{i\in I} E_i$ se décompose comme la somme d'éléments des E_i, mais cette décomposition n'est pas unique en général ! Nous allons à partir de maintenant voir quelles hypothèses ajouter pour assurer l'unicité d'une telle décomposition.

2.1.2. Sous-espaces vectoriels supplémentaires

Théorème - Définition 2.3. *Soient F, G deux K-sev d'un K-ev E. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) *$E = F + G$ et $F \cap G = \{0\}$,*

(2) *Pour tout x dans E, il existe un* **unique** *élément (y, z) de $F \times G$ tel que $x = y + z$.*

Lorsque ces deux assertions sont vraies, on dit que F et G sont en somme directe, ou encore supplémentaires - on dit aussi que F est supplémentaire à G. On note alors :

$$E = F \oplus G$$

Preuve : Supposons (1). Soit x dans E. De l'égalité $E = F + G$ on obtient, grâce à la proposition 2.2 qu'il existe un élément y de F et un élément z de G tel que $x = y + z$. Il s'agit donc de montrer que cette décomposition est unique. Or, si $x = y' + z'$ avec $y' \in F$, $z' \in G$, alors $y + z = y' + z'$, donc $y - y' = z' - z$ appartient à la fois à F et à G. Comme l'intersection de F et de G est $\{0\}$, ceci signifie $y = y'$ et $z = z'$. cqfd : (1) $\Rightarrow$ (2).

Inversement, supposons que (2) est vrai : tout élément de E s'écrit comme la somme d'un élément de F et d'un élément de G : donc $E = F + G$. Soit x un élément de $F \cap G$: alors $0 = x + (-x)$ où x appartient à F et $-x$ à G. Par unicité de la décomposition de $0 = 0 + 0$, on obtient $x = -x = 0$. Donc (2) $\Rightarrow$ (1). □

Proposition 2.4. *Soit F un sous espace vectoriel d'un K-espace vectoriel E. Alors, tout supplémentaire à F dans E est isomorphe à E/F.*

Preuve : En effet, la restriction à un supplémentaire à F dans E de la surjection canonique p_F est injective, donc un isomorphisme. □

Attention ! Il n'est pas vrai en général que tout sev d'un ev admet un supplémentaire ; mais comme nous le verrons plus tard, celà est vrai si E est de «dimension finie».

2.1.3. Projecteurs

Théorème - Définition 2.5. *Soient F et G deux sous K-ev d'un K-ev E en somme directe : $E = F \oplus G$. Pour tout x de E, notons $(u(x), v(x))$ l'unique élément (y, z) de $F \times G$ tel que $x = y + z$. Ceci définit deux applications $u : E \to F$ et $v : E \to G$. Ces deux applications sont linéaires. Elles vérifient :*

$$u + v = Id_E \tag{5}$$
$$u \circ v = v \circ u = 0 \tag{6}$$
$$u \circ u = u \tag{7}$$
$$v \circ v = v \tag{8}$$

*En outre, le noyau de u (respectivement v) est G (respectivement F), et son image est F (respectivement G). Enfin, pour tout élément x de F on a $u(x) = x$. L'application u est appelée **projecteur sur F relativement à G** (v est donc alors le projecteur sur G relativement à F).* □

Définition 2.6. *Un K-endomorphisme $u : E \to E$ est appelé **projecteur (de E)** s'il est le projecteur d'un sev F relativement à un supplémentaire de F. Deux projecteurs u et v de E sont dits **orthogonaux** si $u \circ v = v \circ u = 0$.*

Théorème 2.7. *Un K-endomorphisme $u : E \to E$ est un projecteur si et seulement si il vérifie :*

$$u \circ u = u$$

C'est alors le projecteur sur $Im(u)$ relativement à $Ker(u)$.

Preuve : Soit $u : E \to E$ un K-endomorphisme tel que $u \circ u = u$. On note G son noyau, F son image.

Pour tout x dans E on a :

$$x = u(x) + (x - u(x))$$

Or, $u(x - u(x)) = u(x) - u(u(x)) = u(x) - u(x) = 0$, donc $x - u(x)$ appartient à G. Donc : $E = F + G$.

Soit maintenant x un élément de $F \cap G$: appartenant à l'image de u, il est de la forme $x = u(y)$ avec $y \in E$. Mais comme $u \circ u = u$, on a : $u(x) = u(u(y)) = u(y) = x$. Comme x appartient au noyau G, on a donc : $x = u(x) = 0$.

Donc $F \cap G = \{0\}$: F et G sont en somme directe. Il est immédiat maintenant de voir que u coincide avec le projecteur sur F relativement à G. □

Exemple fondamental : Dans le K-espace vectoriel K^n, et pour tout entier i entre 1 et n, l'application p_i qui à un élément $(x_1, ..., x_n)$ associe $(0, ..., 0, x_i, 0, ..., 0)$ est un projecteur. On l'appelle **projecteur (ou projection) sur le i-ième axe de coordonnée.**

Exercice 10. Montrer que les projecteurs p_i et p_j sont orthogonaux si $i \neq j$.

2.1.4. Somme directe d'une famille finie de sous-espaces vectoriels

Théorème - Définition 2.8. *Soit $(E_i)_{(1 \leq i \leq n)}$ une famille finie de sous-espaces vectoriels d'un K-espace vectoriel E. L'application ψ du K-ev produit $\prod_{i=1}^n E_i = E_1 \times ... \times E_n$ dans E définie par $\psi(x_1, ..., x_n) = x_1 + ... + x_n$ est K-linéaire ; elle est dite **application canonique.** Elle est surjective si et seulement on a $E = E_1 + ... + E_n$.*

*Plus généralement, l'image de ψ est la somme $E_1 + ... + E_n$. Cette somme est dite **directe** si ψ est injective ; on la note alors $\oplus_{i=1}^n E_i$, ou aussi $E_1 \oplus ... \oplus E_n$. On dit alors aussi que **les E_i sont en somme directe.***

Ainsi, E est la somme directe des E_i si et seulement si ψ est un isomorphisme. Tout élément x de E s'écrit alors d'une et d'une seule manière comme une somme $x = x_1 + ... + x_n$ avec $x_i \in E_i$ pour chaque indice i. L'élément x_i est dit **composante de x dans E_i.**

Il est clair qu'on a $E = E_1 \oplus ... \oplus E_n$ si et seulement si deux choses se produisent :

– $E = E_1 + ... + E_n$ (ψ est surjective),

– Si une somme $x_1 + ... + x_n$ avec $x_i \in E_i$ est nulle, alors chaque x_i est nul (le noyau de ψ est nul).

Le théorème suivant, de preuve assez évidente, montre une méthode (par récurrence) permettant dans certains cas de montrer qu'une somme de sev est directe :

Théorème 2.9. *Soit $(E_i)_{(1\leq i\leq n)}$ $(n \geq 2)$ une famille finie de sous-espaces vectoriels d'un K-espace vectoriel E. Pour que leur somme soit directe il faut et il suffit que :*

$$\forall i \in \{2, ..., n\} \;\; E_i \cap \sum_{j=1}^{i-1} E_j = \{0\}$$

Preuve :

- **La condition est nécessaire:** Supposons que la somme est directe. Étant donné $i \in \{1, ..., n\}$, soit x un élément de $E_i \cap \sum_{j=1}^{i-1} E_j$. Alors il s'écrit sous la forme $x = x_1 + ... + x_{i-1}$, où chaque x_j est dans E_j. Donc on a :

$$0 = x_1 + ... + x_{i-1} + (-x)$$

Comme x est dans E_i et que la somme est supposée directe, ceci signifie que tous les termes, y compris x, sont nuls.

- **La condition est suffisante :** Supposons qu'elle est remplie, et considérons une décomposition $0 = x_1 + ... + x_n$ où chaque x_i est dans E_i. Il s'agit de montrer qu'ils sont tous nuls. Supposons que ce ne soit pas le cas, et soit k le plus grand indice pour lequel x_k est non-nul. Alors, $-x_k = x_1 + ... + x_{k-1}$ est dans $E_k \cap \sum_{j=1}^{k-1} E_j$, et doit donc être nul par hypothèse. Contradiction. □

2.2. Caractérisation des sommes directes par les projecteurs orthogonaux Nous avons déjà vu au Théorème 2.7 qu'une décomposition $E = F \oplus G$ se caractérise par la donnée d'un projecteur. Nous allons voir que ceci se généralise pour des sommes directes :

Définition 2.10. *Une famille $(e_i)_{(i\in I)}$ de projecteurs d'un K-espace vectoriel E est dite **orthogonale** si on a $e_i \circ e_j = 0$ pour tout $i \neq j$.*

Remarque 2.11. *En d'autres termes, une famille $(e_i)_{(i\in I)}$ d'endomorphismes K-linéaires de E est une famille orthogonale de projecteurs si :*

$$\forall (i, j) \in I^2, \;\; e_i \circ e_j = \delta_{ij} e_i$$

*où δ_{ij} est le **symbole de Kronecker :** il est nul (0 de K), sauf si $i = j$ auquel cas il vaut 1 (l'unité de K).*

Théorème 2.12. *Soit E un K-ev, somme directe d'une famille **finie** de sous K-ev $(E_i)_{(1\leq i\leq n)}$. Soit $e_i : E \to E_i$ l'application qui à tout x de E associe sa composante dans E_i. Alors, $(e_i)_{(1\leq i\leq n)}$ est une famille de projecteurs orthogonaux, qui vérifient :*

$$\sum_{i=1}^{n} e_i = Id_E$$

*On l'appelle **famille des projecteurs associés à la somme directe** $E = \oplus_{i=1}^{n} E_i$.*

Preuve : Le fait que les e_i soient des projecteurs (ie. qu'ils soient linéaires et vérifient $e_i \circ e_i = e_i$) est assez clair. De même l'orthogonalité de leur famille ($e_i \circ e_j$ est nul puisque la composante dans E_i de tout élément de l'image E_j de e_j est nulle si $j \neq i$). Remarquons au passage que le noyau de e_i est la somme directe $\widehat{E_i} = E_1 \oplus ... \oplus E_{i-1} \oplus E_{i+1} \oplus ... \oplus E_n$ de tous les E_j pour $j \neq i$: e_i est le projecteur sur E_i relativement à $\widehat{E_i}$.

Évaluons l'image de $\sum_{i=1}^{n} e_i$ sur un élément x de E : comme x est la somme de ses composantes dans les E_i, on obtient que cette image est x lui-même, et donc que $\sum_{i=1}^{n} e_i = \mathrm{Id}_E$. □

Théorème 2.13 (La réciproque)**.** *Soit $(e_i)_{(1\leq i\leq n)}$ une famille orthogonale finie de projecteurs d'un K-ev E telle que :*

$$\sum_{i=1}^{n} e_i = Id_E$$

Alors E est la somme directe de la famille des images E_i des e_i, et les e_i sont les projecteurs associés à cette somme directe.

Preuve : Les images E_i forment une famille finie de K-sev. Pour tout x dans E, on a :

$$x = \mathrm{Id}_E(x) = (\sum_{i=1}^{n} e_i)(x) = \sum_{i=1}^{n} e_i(x)$$

ce qui montre $E = \sum_{i=1}^{n} E_i$. Reste à montrer que cette somme est directe.

Pour tout x dans E_i on a $e_j(x) = 0$ si $j \neq i$. En effet, on a $x = e_i(y)$ avec $y \in E$, donc $e_j(x) = e_j \circ e_i(y) = 0$ puisque la famille est orthogonale.

Considérons $x \in E_i \cap \sum_{j=1}^{i-1} E_j$ avec $2 \leq i \leq n$. Alors, x s'écrit comme une somme d'éléments dans le noyau de e_i puisque chaque $E_j \subset \mathrm{Ker}(e_i)$. Or, x est dans l'image de e_i. On en déduit que x est nul, et donc $E_i \cap \sum_{j=1}^{i-1} E_j = \{0\}$. D'après le Théorème 2.9 la somme est donc directe.

Vérifier que les e_i sont bien les projecteurs associés à cette somme directe est automatique. $\square$