TD2. Corrigé des exercices.

L1S1 Portails Math-Info & Math-Physique
Analyse 1

2020-21

Exercice 1.

a) $g : x \mapsto \dfrac{x}{x+1}$

i) Taux d'accroissement de g entre 2 et $2+h$:

$$\begin{aligned} T_g(2, 2+h) &= \frac{g(2+h)-g(2)}{h} = \frac{1}{h}\left[\frac{2+h}{2+h+1} - \frac{2}{3}\right] \\ &= \frac{1}{h}\left[\frac{2+h}{3+h} - \frac{2}{3}\right] = \frac{3(2+h)-2(3+h)}{3h(3+h)} \\ &= \frac{h}{3h(3+h)} = \frac{1}{3(3+h)} \end{aligned}$$

On trouve ainsi $\lim_{h\to 0} T_g(2, 2+h) = \frac{1}{9}$. Donc g est dérivable en 2, et $g'(2) = \frac{1}{9}$.

ii) L'équation de la tangente à $\mathcal{C}_g$ au point de coordonnées $(a, g(a))$ est

$$y = g'(a)(x-a) + g(a)\,,$$

ce qui donne ici $y = \dfrac{x-2}{9} + \dfrac{2}{3}$, c'est-à-dire : $y = \dfrac{x}{9} + \dfrac{4}{9}$.

b) $g : x \mapsto \dfrac{1}{x^2+1}$ i) Taux d'accroissement de g entre -1 et $-1+h$:

$$\begin{aligned}
T_g(-1,-1+h) &= \frac{g(-1+h)-g(-1)}{h} \\
&= \frac{1}{h}\left[\frac{1}{(-1+h)^2+1} - \frac{1}{(-1)^2+1}\right] \\
&= \frac{1}{h}\left[\frac{1}{(h-1)^2+1} - \frac{1}{2}\right] = \frac{2-((h-1)^2+1)}{2h[(h-1)^2+1]} \\
&= \frac{2-(h^2-2h+2)}{2h[(h-1)^2+1]} = \frac{-h^2+2h}{2h[(h-1)^2+1]} \\
&= \frac{-h+2}{2((h-1)^2+1)}
\end{aligned}$$

D'où $\lim\limits_{h\to 0} T_g(-1,-1+h) = \dfrac{2}{2((-1)^2+1)} = \dfrac{1}{2}$.

g est dérivable en -1 et $g'(-1) = \frac{1}{2}$.

ii) Equation de la tangente à $\mathcal{C}_g$ au point de coordonnées $(-1, g(-1)) = (-1, 1/2)$: $y = \dfrac{1}{2}(x-(-1)) + \dfrac{1}{2}$, c'est-à-dire $y = \dfrac{1}{2}x + 1$.

Exercice 2.

Un puits sec a une profondeur de 30 mètres. On lâche une pierre dans ce puits à l'instant $t = 0$. Au bout de t secondes, la distance parcourue par la pierre est donnée en mètres par $d(t) = 4,9\, t^2$.

a) La pierre touche le fond quand la distance qu'elle a parcourue atteint 30 mètres. On a donc $4,9 t_0^2 = 30$, ce qui donne $t_0^2 = \dfrac{30}{4,9} = \dfrac{300}{49}$, puis, comme $t_0 \geq 0$,

$$t_0 = \sqrt{\frac{300}{49}} = \frac{10\sqrt{3}}{7} \simeq 2,474 \quad \text{(en secondes)}\,.$$

b) Pour $t \in [0, t_0]$, la vitesse instantanée de la pierre à l'instant t (exprimée en $m.s^{-1}$) est

$$v(t) = d'(t) = 4,9 \times (2t) = 9,8t\,.$$

La vitesse instantanée de la pierre au moment où elle touche le fond est $v(t_0) = 9,8\dfrac{10\sqrt{3}}{7} = 14\sqrt{3} \simeq 24,249\ (m.s^{-1})$.

La pierre ayant parcouru 30 mètres entre les instants 0 et t_0, sa vitesse moyenne est $v_{moy} = \dfrac{30}{t_0}$. En utilisant la relation $4,9t_0^2 = 30$, on trouve

$$v_{moy} = 4,9t_0 = \frac{1}{2}v(t_0) = 7\sqrt{3} \simeq 12,124\ (m.s^{-1})\,.$$

Exercice 3.

a) On considère une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable et périodique de période T. Soit $a \in \mathbb{R}$. Peut-on dire que $f'(a+T) = f'(a)$?

La réponse est oui. En effet, en notant $T_f(x, y)$ le taux de variation de f entre x et y, on a

$$\begin{aligned} T_f(a+T, a+T+h) &= \frac{f(a+T+h) - f(a+T)}{h} \\ &= \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \qquad \text{car } f \text{ est } T\text{-périodique} \\ &= T_f(a, a+h)\,. \end{aligned}$$

Donc

$$f'(a+T) = \lim_{h \to 0} T_f(a+T, a+T+h) = \lim_{h \to 0} T_f(a, a+h) = f'(a)\,.$$

b) On considère une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable et paire. Soit $a \in \mathbb{R}$. Quelle relation a-t-on entre $g'(-a)$ et $g'(a)$? Même question si g est impaire.

i) Supposons d'abord g paire. Alors, pour tout $h \in \mathbb{R}^*$,

$$\begin{aligned} T_g(-a, -a+h) &= \frac{g(-a+h) - g(-a)}{h} = \frac{g(-(a-h)) - g(-a)}{h} \\ &= \frac{g((a-h)) - g(a)}{h} \qquad \text{car } g \text{ est paire} \\ &= -\frac{g((a-h)) - g(a)}{-h} = -T_g(a, a-h)\,. \end{aligned}$$

Lorsque h tend vers 0, $-h$ tend vers 0, et donc $T_g(a, a-h)$ tend vers $g'(a)$. Ainsi

$$g'(-a) = \lim_{h \to 0} T_g(-a, -a+h) = \lim_{h \to 0} (-T_g(a, a-h)) = -g'(a)\,.$$

ii) Si g est impaire, on obtient

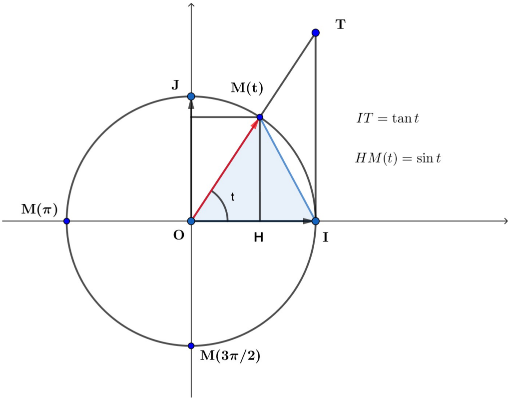
$$\forall h \in \mathbb{R}^*\,,\ T_g(-a, -a+h) = T_g(a, a-h)\,,$$

$$g'(-a) = \lim_{h \to 0} T_g(-a, -a+h) = \lim_{h \to 0} T_g(a, a-h) = g'(a)$$

Conclusion. Soit g une fonction dérivable. Si g est paire, g' est impaire; si g est impaire, g' est paire.

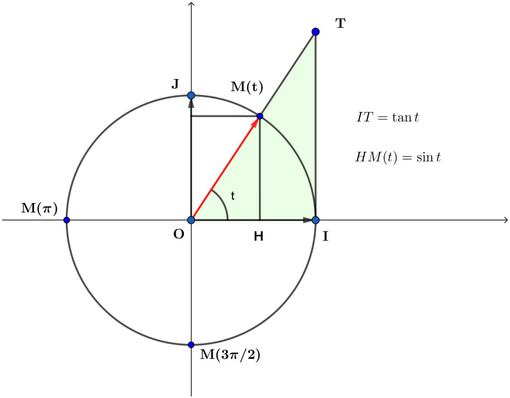
Exercice 4.

a) i) Le cercle représenté ci-dessous est de rayon 1. Aire du triangle $\mathcal{T}_1$ de sommets $O, I, M(t)$:



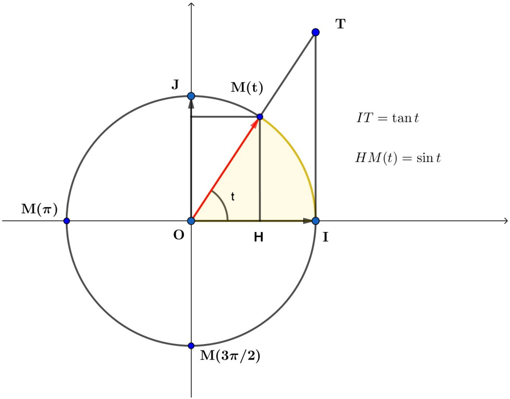
$$Aire(\mathcal{T}_1) = \frac{1}{2} \times OI \times HM(t) = \frac{1}{2} \times 1 \times \sin t = \frac{\sin t}{2}.$$

a) ii) Aire du triangle $\mathcal{T}_2$ de sommets O, I, T :



$$Aire(\mathcal{T}_2) = \frac{1}{2} \times OI \times IT = \frac{1}{2} \times 1 \times \tan t = \frac{\tan t}{2}.$$

a) iii) Aire du secteur circulaire $\mathcal{S}$ délimitée par les segments $[OI]$ et $[OM(t)]$:



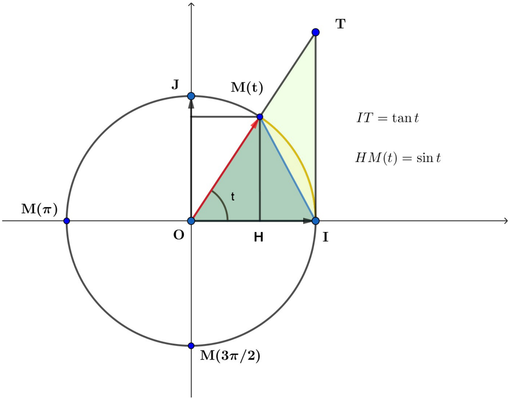
L'aire $A(\theta)$ d'un secteur circulaire d'angle $\theta \in [0, 2\pi]$ est proportionnelle à θ; $A(2\pi)$ est l'aire du disque (de rayon 1), $A(2\pi) = \pi$. On a donc

$$Aire(\mathcal{S}) = A(t) = \frac{t}{2\pi} \times \pi = \frac{t}{2}.$$

b) $\mathcal{T}_1$ est inclus dans $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}$ est inclus dans $\mathcal{T}_2$ donc

$$2Aire(\mathcal{T}_1) \leq 2Aire(\mathcal{S}) \leq 2Aire(\mathcal{T}_2)\,,$$

ce qui donne, pour tout $t \in]0, \pi/2[$, $\sin t \leq t \leq \tan t$.



c) En divisant par $t > 0$ les deux membres de la première inégalité $\sin t \leq t$ de b), on obtient

$$\forall t \in]0, \pi/2[\,, \; \frac{\sin t}{t} \leq 1\,.$$

Pour tout $t \in]0, \pi/2[$, $\cos t > 0$ et donc $\cos t/t > 0$. En multipliant par $\cos t/t$ les deux membres de la seconde inégalité $t \leq \tan t$ de b), on obtient

$$\forall t \in]0, \pi/2[\,, \; \cos t \leq \frac{\sin t}{t}\,.$$

d) On a montré en c) :

$$\forall t \in]0, \pi/2[\,, \; \cos t \leq \frac{\sin t}{t} \leq 1\,. \tag{1}$$

La fonction cosinus étant continue, $\lim_{t \to 0} \cos t = \cos 0 = 1$. Donc, d'après (1) et par le théorème des gendarmes,

$$\lim_{t \to 0, t > 0} \frac{\sin t}{t} = 1\,.$$

La fonction (d'ensemble de définition $\mathbb{R}^*$) $u : t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}$ est paire. En effet, la fonction sinus étant impaire,

$$\forall t \in \mathbb{R}^*\,,\ u(-t) = \frac{\sin(-t)}{-t} = \frac{-\sin t}{-t} = \frac{\sin t}{t} = u(t)$$

Donc $\lim_{t\to 0, t<0} u(t) = \lim_{t\to 0, t<0} u(-t) = \lim_{t\to 0, t>0} u(t) = 1$.

Conclusion. $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$.

e) On a $(1-\cos t)(1+\cos t) = 1-(\cos t)^2 = (\sin t)^2$. Donc

$$\forall t \in]-\pi/2, \pi/2[\setminus\{0\}\,,\ \frac{1-\cos t}{t^2} = \frac{(\sin t)^2}{t^2(1+\cos t)} = \Big(\frac{\sin t}{t}\Big)^2 \frac{1}{1+\cos t}\,. \tag{2}$$

On a vu en b) que $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$. De plus

$\lim_{t\to 0}(1+\cos t) = 1+\cos 0 = 2$. Donc d'après (2), $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{1-\cos t}{t^2} = \frac{1}{2}$.

Enfin,

$$\lim_{t\to 0} \frac{1-\cos t}{t} = \lim_{t\to 0} \left(\frac{1-\cos t}{t^2} \times t\right) = \frac{1}{2} \times 0 = 0\,.$$

Exercice 5.

Calcul de dérivées.

a. $f(t) = t\sin t$. $D_f = \mathbb{R}$ et $D_{f'} = \mathbb{R}$ (f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est le produit fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$). On a $\sin'(t) = \cos t$. La formule de dérivation $(uv)' = u'v + uv'$ donne

$$\forall t \in \mathbb{R}\,,\ f'(t) = 1 \times \sin t + t\cos t = \sin t + t\cos t\,.$$

b. $f(t) = (t^2+1)\sqrt{t}\cos t$. $D_f = [0, +\infty[$ et $D_{f'} =]0, +\infty[$ (la fonction racine carrée est définie sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$). On a $(\sqrt{\ })'(t) = 1/(2\sqrt{t})$ et $\cos'(t) = -\sin t$. La formule de dérivation $(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$ donne

$$\forall t \in]0, +\infty[\,,\ f'(t) = 2t\sqrt{t}\cos t + \frac{t^2+1}{2\sqrt{t}}\cos t - (t^2+1)\sqrt{t}\sin t$$

c. $f(t) = (t^3+t)^4$. $D_f = D_{f'} = \mathbb{R}$. Etant donné un entier $n \geq 2$, on rappelle que si une fonction u est dérivable, alors $(u^n)' = n(u^{n-1})u'$. En posant $u(t) = t^3 + t$, et $n = 4$ on trouve

$$\forall t \in \mathbb{R}\,,\ f'(t) = 4(t^3+t)^3(3t^2+1)\,.$$

d. $f(t) = 1 + \frac{7}{t} + \frac{5}{t^2}$. $D_f = D_{f'} = \mathbb{R}^*$. On rappelle que pour un entier $n \geq 1$, la fonction $u : t \mapsto \frac{1}{t^n}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et $u'(t) = -\frac{n}{t^{n+1}}$. On a donc

$$\forall t \in \mathbb{R}^*\,,\ f'(t) = 7 \times (-\frac{1}{t^2}) + 5 \times (-\frac{2}{t^3}) = -\frac{7}{t^2} - \frac{10}{t^3}\,.$$

e. $f(x) = \frac{2x+3}{x+4}$. On a $D_f = D_{f'} = \mathbb{R}\backslash\{4\}$. En utilisant la formule de dérivation $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, on obtient

$$\forall t \in \mathbb{R}\backslash\{4\}\,,\ f'(x) = \frac{2(x+4) - (2x+3)}{(x+4)^2} = \frac{5}{(x+4)^2}\,.$$

f. $f(x) = \dfrac{(\sqrt{x}-1)^4}{x^2+2}$. On a $D_f = [0, +\infty[$ et $D_{f'} =]0, +\infty[$. $f = \dfrac{u^4}{v}$ avec $u(x) = \sqrt{x} - 1$, $v(x) = x^2 + 4$.

On a $u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $(u^4)'(x) = 4u(x)^3 u'(x) = 4\frac{(\sqrt{x}-1)^3}{2\sqrt{x}}$ et $v'(x) = 2x$.
En appliquant la formule qui donne la dérivée d'un quotient, on obtient

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{4\frac{(\sqrt{x}-1)^3}{2\sqrt{x}}(x^2+2) - (\sqrt{x}-1)^4(2x)}{(x^2+2)^2} \\ &= \frac{2(\sqrt{x}-1)^3(x^2+2) - 2(\sqrt{x}-1)^4 x\sqrt{x}}{\sqrt{x}(x^2+2)^2} \\ &= \frac{2(\sqrt{x}-1)^3[x^2+2-(\sqrt{x}-1)x\sqrt{x}]}{\sqrt{x}(x^2+2)^2} = \frac{2(\sqrt{x}-1)^3(2+x\sqrt{x})}{\sqrt{x}(x^2+2)^2} \end{aligned}$$

g. $f(x) = \dfrac{1}{(\sin x)^n}$. Les zéros de la fonction sinus sont les multiples de π; $D_f = D_{f'} = \mathbb{R} \backslash \{k\pi\,;\, k \in \mathbb{Z}\}$.

On a $f = u^n$, avec $u(x) = \dfrac{1}{\sin x}$, $u'(x) = -\dfrac{\sin'(x)}{(\sin x)^2} = -\dfrac{\cos x}{(\sin x)^2}$. D'où

$$f'(x) = nu(x)^{n-1}u'(x) = n\left(\frac{1}{\sin x}\right)^{n-1}\left(\frac{-\cos x}{(\sin x)^2}\right) = -n\frac{\cos x}{(\sin x)^{n+1}}$$

Exercice 6. Calcul de dérivées.

On applique à chaque fois la formule de dérivation $(v \circ u)'(x) = v'(u(x))u'(x)$.

a. $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \sin(\cos x)$. $f = \sin \circ \cos$.

$$f'(x) = \sin'(\cos x)\cos'(x) = \cos(\cos x) \cdot (-\sin x) = -\sin x \cos(\cos x)\,.$$

b. $g : x \in \mathbb{R} \mapsto \sin(x^4 - 3x)$. $g = \sin \circ u$, avec $u(x) = x^4 - 3x$.

$$g'(x) = \sin'(u(x))u'(x) = \cos(x^4 - 3x) \cdot (4x^3 - 3)\,.$$

c. $u : z \in \mathbb{R} \mapsto \sqrt{z^2 + 1}$. $u = g \circ f$ avec $f(z) = z^2 + 1$ et $g(z) = \sqrt{z}$; on obtient

$$u'(z) = g'(f(z))f'(z) = \frac{1}{2\sqrt{f(z)}}f'(z) = \frac{2z}{2\sqrt{z^2+1}} = \frac{z}{\sqrt{z^2+1}}\,.$$

d. $h : t \in]-\pi/4, \pi/4[\mapsto \tan(2t)$. $h = \tan \circ w$ avec $w(t) = 2t$; on a $\tan'(t) = \dfrac{1}{(\cos t)^2} = 1 + (\tan(t))^2$. On obtient

$$h'(t) = \tan'(w(t))w'(t) = \frac{2}{(\cos(2t))^2} = 2(1 + (\tan(2t))^2)\,.$$

e. $v : z \in]0, \pi^2/4[\mapsto \tan(\sqrt{z})$. $v = \tan \circ g$ avec $g(z) = \sqrt{z}$; on obtient

$$\begin{aligned} v'(z) &= \tan'(g(z))g'(z) = \frac{1}{(\cos(\sqrt{z}))^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{z}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{z}(\cos(\sqrt{z}))^2} = \frac{1 + (\tan(\sqrt{z}))^2}{2\sqrt{z}}\,. \end{aligned}$$

Exercice 7.

a. Tableau de variation et extrema de $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^3 - 3x + 2$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x+1)(x-1)\,.$$

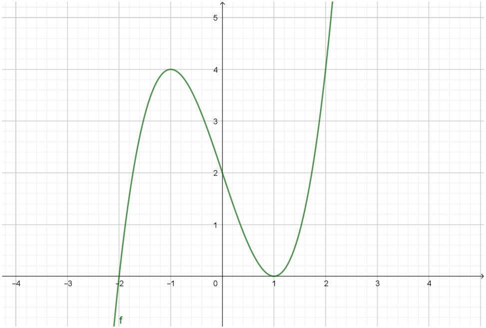
- $f'(-1) = f'(1) = 0$.
- Si $x < -1$ ou $x > 1$, $f'(x) > 0$; f est donc (strictement) croissante sur l'intervalle $]-\infty, -1]$ et sur l'intervalle $[1, +\infty[$.
- Si $-1 < x < 1$, $f'(x) < 0$; f est donc (strictement) décroissante sur l'intervalle $[-1, 1]$.

On a : $f(-1) = 4$, $f(1) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(3x^3) = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(3x^3) = -\infty$. En effet la limite en $+\infty$ ou en $-\infty$ d'une fonction polynomiale est égale à la limite de son terme de plus haut degré.

D'où le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

f présente en -1 un maximum local valant 4 (non global car $\lim_{+\infty} f = +\infty$) et en 1 un minimum local valant 0 (non global car $\lim_{-\infty} f = -\infty$).



b. Tableau de variation et extrema de $f : x \in [0, +\infty[\mapsto (x-3)\sqrt{x}$

f est continue sur $[0, +\infty[$ et dérivable sur $]0, +\infty[$; pour $x > 0$,

$$f'(x) = \sqrt{x} + \frac{(x-3)}{2\sqrt{x}} = \frac{2x + (x-3)}{2\sqrt{x}} = \frac{3x-3}{2\sqrt{x}}\,.$$

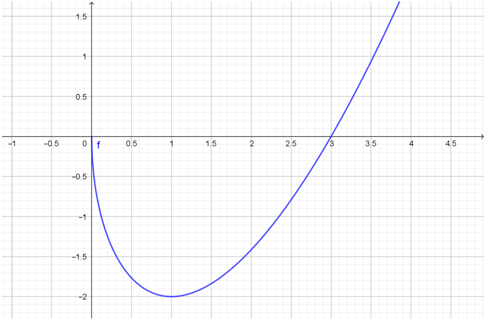
- $f'(1) = 0$.
- Si $0 < x < 1$, $f'(x) < 0$; f est donc (strictement) décroissante sur l'intervalle $[0, 1]$.
- Si $x > 1$, $f'(x) > 0$; f est donc (strictement) croissante sur l'intervalle $[1, +\infty[$.

On a : $f(0) = 0$, $f(1) = -2$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (car $\sqrt{x}$ et $x-3$ tendent vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$).

D'où le tableau de variation de f :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

f présente en 0 un maximum local valant 0 (non global car $\lim_{+\infty} f = +\infty$) et atteint en 1 son minimum global valant -2.



Exercice 8. Calcul de dérivées.

Rappel. Les fonctions arccos et arcsin sont définies et continues sur $[-1,1]$, dérivables sur $]-1,1[$. La fonction arctan est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. On a

$$\forall x \in]-1,1[\,,\ \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \text{et} \qquad \arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}\,,\ \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

a. $f(x) = \arccos(x^2)$. Ensemble de dérivabilité de f :
$D_{f'} = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 \in]-1,1[\} = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 - 1 < 0\} =]-1,1[$.

$$f'(x) = \arccos'(x^2) \cdot (2x) = -\frac{1}{\sqrt{1-(x^2)^2}} \cdot (2x) = -\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$$

b. $f(x) = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$. La fonction arcsin est dérivable sur $]-1,1[$. De plus pour $x \in]-1,1[$, $1-x^2 > 0$ et la fonction $u : x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$. Donc f est dérivable sur $]-1,1[$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \arcsin(x) + x \arcsin'(x) + u'(1-x^2)\cdot(-2x) \\ &= \arcsin(x) + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot(-2x) \\ &= \arcsin(x) + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x) \end{aligned}$$

Ainsi f est une primitive sur $]-1,1[$ de la fonction arcsin. On pourrait montrer que f est en fait aussi dérivable en -1 et en 1...

c. $f(x) = \arctan(2x+1)$. La fonction arctan étant dérivable sur $\mathbb{R}$, $D_{f'} = \mathbb{R}$.

$$f'(x) = \arctan'(2x+1)\cdot 2 = \frac{2}{1+(2x+1)^2} = \frac{1}{2x^2+2x+1}$$

Exercice 9.

Soit $n \geq 2$ un entier fixé. On considère la fonction $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{1+x^n}{(1+x)^n}$. .

a) f' est bien dérivable sur $[0, +\infty[$ car c'est le quotient de deux fonctions dérivables sur $[0, +\infty[$, la fonction au dénominateur ne s'annulant pas. Calculons $f'(x)$ pour $x \geq 0$.

On utilise la formule de dérivation $\dfrac{u}{v} = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$, avec $u(x) = 1 + x^n$ et $v(x) = (1+x)^n$. On a $u'(x) = nx^{n-1}$ et $v'(x) = n(1+x)^{n-1}$. On obtient

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{nx^{n-1}(1+x)^n - (1+x^n)\cdot n(1+x)^{n-1}}{(1+x)^{2n}} \\
&= \frac{(1+x)^{n-1}(nx^{n-1}(1+x) - n(1+x^n))}{(1+x)^{2n}} \\
&= \frac{n(x^{n-1} + x^n - 1 - x^n)}{(1+x)^{n+1}} = \frac{n(x^{n-1} - 1)}{(1+x)^{n+1}}
\end{aligned}$$

b) Montrons que f atteint un minimum à déterminer.

D'après le calcul précédent, pour $x \geq 0$, $f'(x)$ est du signe de $x^{n-1} - 1$ (car $n/(1+x)^{n+1} > 0$).

- $f'(1) = 0$
- Si $x \in [0, 1[$ alors $x^{n-1} < 1$ donc $f'(x) < 0$.
- Si $x \in [1, +\infty[$ alors $x^{n-1} > 1$ donc $f'(x) > 0$.

On en déduit que f est strictement décroissante sur $[0, 1]$ et strictement croissante sur $[1, +\infty[$, ce qui implique que f atteint son minimum global en 1. Ce minimum vaut $f(1) = \dfrac{2}{2^n} = \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

c) D'après b),

$$\forall x \in [0, +\infty[\,, \ \frac{1}{2^{n-1}} \leq \frac{1+x^n}{(1+x)^n}\,.$$

En multipliant les deux membres de l'inégalité ci-dessus par $2^{n-1}(1+x)^n$ (qui est un réel strictement positif pour tout $x \geq 0$), on obtient

$$\forall x \in [0, +\infty[\,, \ (1+x)^n \leq 2^{n-1}(1+x^n)\,.$$

d) Déduisons de c) : pour tout $x \in [0, +\infty[$ et tout $y \in [0, +\infty[$,

$$(x + y)^n \leq 2^{n-1}(x^n + y^n) . \qquad (3)$$

Soit $x \geq 0$, $y \geq 0$.

- Premier cas : $x = y = 0$. Dans ce cas $(x + y)^n = 2^{n-1}(x^n + y^n) = 0$ donc l'inégalité (3) est évidente.
- Second cas : $x > 0$ ou $y > 0$. Supposons par exemple $x > 0$. Le réel $z = y/x$ est bien défini et est dans $\mathbb{R}_+$ donc d'après c)

$$\left(1 + \frac{y}{x}\right)^n \leq 2^{n-1}\left(1 + \frac{y^n}{x^n}\right) ,$$

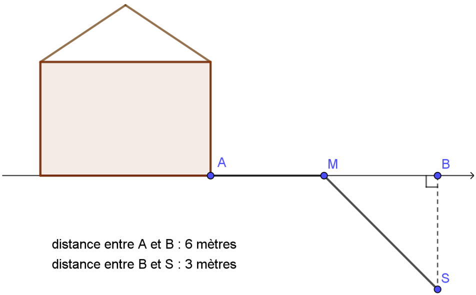
ce qui donne

$$\frac{(x + y)^n}{x^n} \leq 2^{n-1}\frac{x^n + y^n}{x^n} .$$

En multipliant les deux membres de cette inégalité par le réel positif x^n, on obtient (3).

Si on suppose $y > 0$, on obtient l'inégalité finale de manière analogue, en échangeant les rôles de x et y.

Exercice 10.



a) On note x la distance MB. M appartient au segment $[AB]$. On a donc $MB \leq AB$. Ainsi $0 \leq MB \leq 6$: x est dans l'intervalle $[0, 6]$.

Comme M appartient au segment $[AB]$, $AB = AM + MB$. Ainsi $AM = AB - MB = 6 - x$.

Le triangle MBS étant rectangle en M, le théorème de Pythagore donne $MS^2 = MB^2 + BS^2 = MB^2 + 9$. D'où $MS = \sqrt{x^2 + 9}$.

b) Expression du coût $f(x)$ du raccordement, sachant que la partie de la conduite située à la surface du sol coûte 300 euros par mètre alors que celle enfouie sous le sol coûte 750 euros par mètre.

Il y a $AM = (6 - x)$ mètres de conduite à la surface et $MS = \sqrt{x^2 + 9}$ mètres de conduite enfouie. Le coût du raccordement (en euros) est donc

$$f(x) = 300(6 - x) + 750\sqrt{x^2 + 9}. \tag{4}$$

c) Où placer le point M pour rendre le coût du raccordement minimal?

Il faut trouver où la fonction $f : [0, 6] \to \mathbb{R}$ définie par (4) atteint son minimum. Pour cela, on étudie les variations de f sur l'intervalle $[0, 6]$.

f est dérivable sur $[0, 6]$, et

$$\begin{aligned} f'(x) &= -300 + 750\frac{2x}{2\sqrt{x^2+9}} = 750\frac{x}{\sqrt{x^2+9}} - 300 \\ &= \frac{750x - 300\sqrt{x^2+9}}{\sqrt{x^2+9}} = \frac{150(5x - 2\sqrt{x^2+9})}{\sqrt{x^2+9}}. \end{aligned}$$

$f'(x)$ a le même signe que $5x - 2\sqrt{x^2+9}$. On a :

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 \quad &\iff \quad 5x = 2\sqrt{x^2+9} \\ &\iff \quad (5x)^2 = (2\sqrt{x^2+9})^2 \\ &\iff \quad 25x^2 = 4(x^2+9) \\ &\iff \quad 21x^2 = 36 \iff x^2 = \frac{12}{7} \\ &\iff \quad x = \sqrt{\frac{12}{7}} \simeq 1,31 \quad (\text{car } x \geq 0)\,. \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 \quad &\iff \quad 5x > 2\sqrt{x^2+9} \\ &\iff \quad (5x)^2 > (2\sqrt{x^2+9})^2 \\ &\iff \quad 25x^2 > 4(x^2+9) \\ &\iff \quad 21x^2 > 36 \iff x \in]\sqrt{12/7}, 6] \quad (\text{car } x \geq 0)\,. \end{aligned}$$

Enfin,

$$f'(x) < 0 \iff x \in [0, \sqrt{\frac{12}{7}}[$$

Dans les suites d'équivalences précédentes, pour le passage de la première à la deuxième ligne, on a utilisé le fait que $5x \in \mathbb{R}_+$, $2\sqrt{x^2+9} \in \mathbb{R}_+$, et la croissance stricte de la fonction carré sur $\mathbb{R}_+$.

On trouve ainsi que f est strictement décroissante sur $[0, \sqrt{12/7}]$ et strictement croissante sur $[\sqrt{12/7}, 6]$. Elle atteint donc en $\sqrt{12/7}$ son minimum global.

Conclusion : il faut placer le point M à $\sqrt{12/7} \simeq 1,31$ mètres de B pour minimiser le coût. Ce coût est alors de $f(\sqrt{12/7}) \simeq 3862$ euros.