TD2. Corrigé des exercices.

L1S1 Portails Math-Info & Math-Physique
Analyse 1

2020-21

Exercice 1.

a) $g : x \mapsto \dfrac{x}{x+1}$

i) Taux d'accroissement de g entre 2 et $2+h$:

$$\begin{aligned} T_g(2, 2+h) &= \frac{g(2+h)-g(2)}{h} = \frac{1}{h}\Big[\frac{2+h}{2+h+1} - \frac{2}{3}\Big] \\ &= \frac{1}{h}\Big[\frac{2+h}{3+h} - \frac{2}{3}\Big] = \frac{3(2+h)-2(3+h)}{3h(3+h)} \\ &= \frac{h}{3h(3+h)} = \frac{1}{3(3+h)} \end{aligned}$$

On trouve ainsi $\lim_{h\to 0} T_g(2, 2+h) = \frac{1}{9}$. Donc g est dérivable en 2, et $g'(2) = \frac{1}{9}$.

ii) L'équation de la tangente à $\mathcal{C}_g$ au point de coordonnées $(a, g(a))$ est

$$y = g'(a)(x-a) + g(a)\,,$$

ce qui donne ici $y = \dfrac{x-2}{9} + \dfrac{2}{3}$, c'est-à-dire : $y = \dfrac{x}{9} + \dfrac{4}{9}$.

b) $g : x \mapsto \dfrac{1}{x^2+1}$ i) Taux d'accroissement de g entre -1 et $-1+h$:

$$\begin{aligned}
T_g(-1,-1+h) &= \frac{g(-1+h)-g(-1)}{h}\\
&= \frac{1}{h}\left[\frac{1}{(-1+h)^2+1}-\frac{1}{(-1)^2+1}\right]\\
&= \frac{1}{h}\left[\frac{1}{(h-1)^2+1}-\frac{1}{2}\right] = \frac{2-((h-1)^2+1)}{2h[(h-1)^2+1]}\\
&= \frac{2-(h^2-2h+2)}{2h[(h-1)^2+1]} = \frac{-h^2+2h}{2h[(h-1)^2+1]}\\
&= \frac{-h+2}{2((h-1)^2+1)}
\end{aligned}$$

D'où $\lim\limits_{h\to 0} T_g(-1,-1+h) = \dfrac{2}{2((-1)^2+1)} = \dfrac{1}{2}$.

g est dérivable en -1 et $g'(-1) = \frac{1}{2}$.

ii) Equation de la tangente à $\mathcal{C}_g$ au point de coordonnées

$(-1, g(-1)) = (-1, 1/2)$: $y = \dfrac{1}{2}(x-(-1)) + \dfrac{1}{2}$, c'est-à-dire

$y = \dfrac{1}{2}x + 1$.

Exercice 2.

Un puits sec a une profondeur de 30 mètres. On lâche une pierre dans ce puits à l'instant $t = 0$. Au bout de t secondes, la distance parcourue par la pierre est donnée en mètres par $d(t) = 4,9\,t^2$.

a) La pierre touche le fond quand la distance qu'elle a parcourue atteint 30 mètres. On a donc $4,9t_0^2 = 30$, ce qui donne $t_0^2 = \dfrac{30}{4,9} = \dfrac{300}{49}$, puis, comme $t_0 \geq 0$,

$$t_0 = \sqrt{\frac{300}{49}} = \frac{10\sqrt{3}}{7} \simeq 2,474 \quad (\text{en secondes}).$$

b) Pour $t \in [0, t_0]$, la vitesse instantanée de la pierre à l'instant t (exprimée en $m.s^{-1}$) est

$$v(t) = d'(t) = 4,9 \times (2t) = 9,8t\,.$$

La vitesse instantanée de la pierre au moment où elle touche le fond est $v(t_0) = 9,8\dfrac{10\sqrt{3}}{7} = 14\sqrt{3} \simeq 24,249\ (m.s^{-1})$.

La pierre ayant parcouru 30 mètres entre les instants 0 et t_0, sa vitesse moyenne est $v_{moy} = \dfrac{30}{t_0}$. En utilisant la relation $4,9t_0^2 = 30$, on trouve

$$v_{moy} = 4,9t_0 = \frac{1}{2}v(t_0) = 7\sqrt{3} \simeq 12,124\ (m.s^{-1})\,.$$

Exercice 3.

a) On considère une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable et périodique de période T. Soit $a \in \mathbb{R}$. Peut-on dire que $f'(a+T) = f'(a)$?

La réponse est oui. En effet, en notant $T_f(x, y)$ le taux de variation de f entre x et y, on a

$$\begin{aligned} T_f(a+T, a+T+h) &= \frac{f(a+T+h) - f(a+T)}{h} \\ &= \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \qquad \text{car } f \text{ est } T\text{-périodique} \\ &= T_f(a, a+h)\,. \end{aligned}$$

Donc

$$f'(a+T) = \lim_{h\to 0} T_f(a+T, a+T+h) = \lim_{h\to 0} T_f(a, a+h) = f'(a)\,.$$

b) On considère une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable et paire. Soit $a \in \mathbb{R}$. Quelle relation a-t-on entre $g'(-a)$ et $g'(a)$? Même question si g est impaire.

i) Supposons d'abord g paire. Alors, pour tout $h \in \mathbb{R}^*$,

$$\begin{aligned}
T_g(-a,-a+h) &= \frac{g(-a+h)-g(-a)}{h} = \frac{g(-(a-h))-g(-a)}{h} \\
&= \frac{g((a-h))-g(a)}{h} \qquad \text{car } g \text{ est paire} \\
&= -\frac{g((a-h))-g(a)}{-h} = -T_g(a,a-h)\,.
\end{aligned}$$

Lorsque h tend vers 0, $-h$ tend vers 0, et donc $T_g(a,a-h)$ tend vers $g'(a)$. Ainsi

$$g'(-a) = \lim_{h\to 0} T_g(-a,-a+h) = \lim_{h\to 0}(-T_g(a,a-h)) = -g'(a)\,.$$

ii) Si g est impaire, on obtient

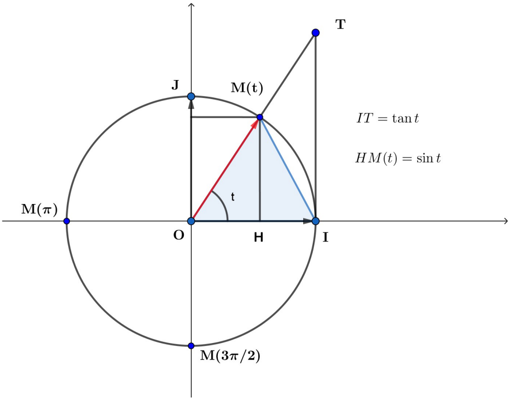
$$\forall h \in \mathbb{R}^*\,,\ T_g(-a,-a+h) = T_g(a,a-h)\,,$$

$$g'(-a) = \lim_{h\to 0} T_g(-a,-a+h) = \lim_{h\to 0} T_g(a,a-h) = g'(a)$$

Conclusion. Soit g une fonction dérivable. Si g est paire, g' est impaire; si g est impaire, g' est paire.

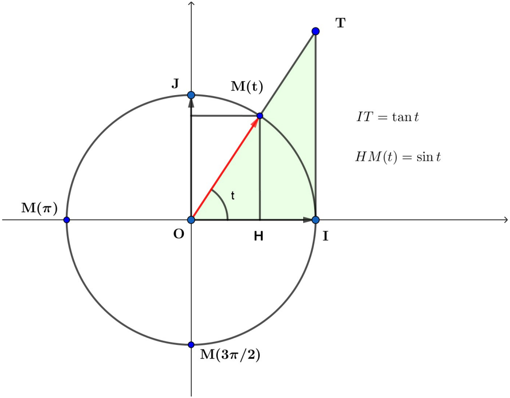
Exercice 4.

a) i) Le cercle représenté ci-dessous est de rayon 1. Aire du triangle $\mathcal{T}_1$ de sommets $O, I, M(t)$:



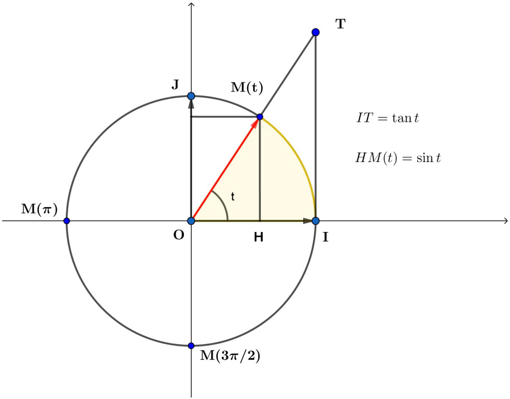
$$Aire(\mathcal{T}_1) = \frac{1}{2} \times OI \times HM(t) = \frac{1}{2} \times 1 \times \sin t = \frac{\sin t}{2}.$$

a) ii) Aire du triangle $\mathcal{T}_2$ de sommets O, I, T :



$$Aire(\mathcal{T}_2) = \frac{1}{2} \times OI \times IT = \frac{1}{2} \times 1 \times \tan t = \frac{\tan t}{2}.$$

a) iii) Aire du secteur circulaire $\mathcal{S}$ délimitée par les segments $[OI]$ et $[OM(t)]$:



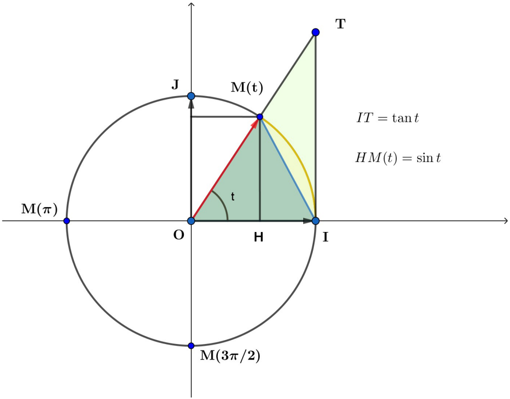
L'aire $A(\theta)$ d'un secteur circulaire d'angle $\theta \in [0, 2\pi]$ est proportionnelle à θ; $A(2\pi)$ est l'aire du disque (de rayon 1), $A(2\pi) = \pi$. On a donc

$$Aire(\mathcal{S}) = A(t) = \frac{t}{2\pi} \times \pi = \frac{t}{2}.$$

b) $\mathcal{T}_1$ est inclus dans $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}$ est inclus dans $\mathcal{T}_2$ donc

$$2Aire(\mathcal{T}_1) \leq 2Aire(\mathcal{S}) \leq 2Aire(\mathcal{T}_2)\,,$$

ce qui donne, pour tout $t \in]0, \pi/2[$, $\sin t \leq t \leq \tan t$.



c) En divisant par $t > 0$ les deux membres de la première inégalité $\sin t \leq t$ de b), on obtient

$$\forall t \in]0, \pi/2[\,, \; \frac{\sin t}{t} \leq 1\,.$$

Pour tout $t \in]0, \pi/2[$, $\cos t > 0$ et donc $\cos t/t > 0$. En multipliant par $\cos t/t$ les deux membres de la seconde inégalité $t \leq \tan t$ de b), on obtient

$$\forall t \in]0, \pi/2[\,, \; \cos t \leq \frac{\sin t}{t}\,.$$

d) On a montré en c) :

$$\forall t \in]0, \pi/2[\,, \; \cos t \leq \frac{\sin t}{t} \leq 1\,. \tag{1}$$

La fonction cosinus étant continue, $\lim_{t \to 0} \cos t = \cos 0 = 1$. Donc, d'après (1) et par le théorème des gendarmes,

$$\lim_{t \to 0, t > 0} \frac{\sin t}{t} = 1\,.$$

La fonction (d'ensemble de définition $\mathbb{R}^*$) $u : t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}$ est paire. En effet, la fonction sinus étant impaire,

$$\forall t \in \mathbb{R}^*\,,\;\; u(-t) = \frac{\sin(-t)}{-t} = \frac{-\sin t}{-t} = \frac{\sin t}{t} = u(t)$$

Donc $\lim_{t\to 0, t<0} u(t) = \lim_{t\to 0, t<0} u(-t) = \lim_{t\to 0, t>0} u(t) = 1$.

Conclusion. $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$.

e) On a $(1-\cos t)(1+\cos t) = 1 - (\cos t)^2 = (\sin t)^2$. Donc

$$\forall t \in]-\pi/2, \pi/2[\setminus\{0\}\,,\;\; \frac{1-\cos t}{t^2} = \frac{(\sin t)^2}{t^2(1+\cos t)} = \Big(\frac{\sin t}{t}\Big)^2 \frac{1}{1+\cos t}\,. \tag{2}$$

On a vu en b) que $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$. De plus $\lim_{t\to 0}(1+\cos t) = 1 + \cos 0 = 2$. Donc d'après (2), $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{1-\cos t}{t^2} = \frac{1}{2}$.
Enfin,

$$\lim_{t\to 0} \frac{1-\cos t}{t} = \lim_{t\to 0} \Big(\frac{1-\cos t}{t^2} \times t\Big) = \frac{1}{2} \times 0 = 0\,.$$

Exercice 5.

Calcul de dérivées.

a. $f(t) = t\sin t$. $D_f = \mathbb{R}$ et $D_{f'} = \mathbb{R}$ (f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est le produit fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$). On a $\sin'(t) = \cos t$. La formule de dérivation $(uv)' = u'v + uv'$ donne

$$\forall t \in \mathbb{R}\,,\ f'(t) = 1 \times \sin t + t\cos t = \sin t + t\cos t\,.$$

b. $f(t) = (t^2+1)\sqrt{t}\cos t$. $D_f = [0, +\infty[$ et $D_{f'} =]0, +\infty[$ (la fonction racine carrée est définie sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$). On a $(\sqrt{\ })'(t) = 1/(2\sqrt{t})$ et $\cos'(t) = -\sin t$. La formule de dérivation $(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$ donne

$$\forall t \in]0, +\infty[\,,\ f'(t) = 2t\sqrt{t}\cos t + \frac{t^2+1}{2\sqrt{t}}\cos t - (t^2+1)\sqrt{t}\sin t$$

c. $f(t) = (t^3+t)^4$. $D_f = D_{f'} = \mathbb{R}$. Etant donné un entier $n \geq 2$, on rappelle que si une fonction u est dérivable, alors $(u^n)' = n(u^{n-1})u'$. En posant $u(t) = t^3 + t$, et $n = 4$ on trouve

$$\forall t \in \mathbb{R}\,,\ f'(t) = 4(t^3+t)^3(3t^2+1)\,.$$

d. $f(t) = 1 + \frac{7}{t} + \frac{5}{t^2}$. $D_f = D_{f'} = \mathbb{R}^*$. On rappelle que pour un entier $n \geq 1$, la fonction $u : t \mapsto \frac{1}{t^n}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et $u'(t) = -\frac{n}{t^{n+1}}$. On a donc

$$\forall t \in \mathbb{R}^*\,,\; f'(t) = 7 \times (-\frac{1}{t^2}) + 5 \times (-\frac{2}{t^3}) = -\frac{7}{t^2} - \frac{10}{t^3}\,.$$

e. $f(x) = \frac{2x+3}{x+4}$. On a $D_f = D_{f'} = \mathbb{R}\backslash\{4\}$. En utilisant la formule de dérivation $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, on obtient

$$\forall t \in \mathbb{R}\backslash\{4\}\,,\; f'(x) = \frac{2(x+4) - (2x+3)}{(x+4)^2} = \frac{5}{(x+4)^2}\,.$$

f. $f(x) = \dfrac{(\sqrt{x}-1)^4}{x^2+2}$. On a $D_f = [0,+\infty[$ et $D_{f'} =]0,+\infty[$. $f = \dfrac{u^4}{v}$ avec $u(x) = \sqrt{x}-1$, $v(x) = x^2+4$.

On a $u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $(u^4)'(x) = 4u(x)^3u'(x) = 4\frac{(\sqrt{x}-1)^3}{2\sqrt{x}}$ et $v'(x) = 2x$.
En appliquant la formule qui donne la dérivée d'un quotient, on obtient

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{4\frac{(\sqrt{x}-1)^3}{2\sqrt{x}}(x^2+2) - (\sqrt{x}-1)^4(2x)}{(x^2+2)^2} \\ &= \frac{2(\sqrt{x}-1)^3(x^2+2) - 2(\sqrt{x}-1)^4x\sqrt{x}}{\sqrt{x}(x^2+2)^2} \\ &= \frac{2(\sqrt{x}-1)^3[x^2+2-(\sqrt{x}-1)x\sqrt{x}]}{\sqrt{x}(x^2+2)^2} = \frac{2(\sqrt{x}-1)^3(2+x\sqrt{x})}{\sqrt{x}(x^2+2)^2} \end{aligned}$$

g. $f(x) = \dfrac{1}{(\sin x)^n}$. Les zéros de la fonction sinus sont les multiples de π; $D_f = D_{f'} = \mathbb{R}\backslash\{k\pi\,;\, k\in\mathbb{Z}\}$.

On a $f = u^n$, avec $u(x) = \dfrac{1}{\sin x}$, $u'(x) = -\dfrac{\sin'(x)}{(\sin x)^2} = -\dfrac{\cos x}{(\sin x)^2}$. D'où

$$f'(x) = nu(x)^{n-1}u'(x) = n\left(\frac{1}{\sin x}\right)^{n-1}\left(\frac{-\cos x}{(\sin x)^2}\right) = -n\frac{\cos x}{(\sin x)^{n+1}}$$

Exercice 6. Calcul de dérivées.

On applique à chaque fois la formule de dérivation
$(v \circ u)'(x) = v'(u(x))u'(x)$.

a. $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \sin(\cos x)$. $f = \sin \circ \cos$.

$$f'(x) = \sin'(\cos x)\cos'(x) = \cos(\cos x)\cdot(-\sin x) = -\sin x\cos(\cos x)\,.$$

b. $g : x \in \mathbb{R} \mapsto \sin(x^4 - 3x)$. $g = \sin \circ u$, avec $u(x) = x^4 - 3x$.

$$g'(x) = \sin'(u(x))u'(x) = \cos(x^4 - 3x)\cdot(4x^3 - 3)\,.$$

c. $u : z \in \mathbb{R} \mapsto \sqrt{z^2+1}$. $u = g \circ f$ avec $f(z) = z^2 + 1$ et $g(z) = \sqrt{z}$; on obtient

$$u'(z) = g'(f(z))f'(z) = \frac{1}{2\sqrt{f(z)}}f'(z) = \frac{2z}{2\sqrt{z^2+1}} = \frac{z}{\sqrt{z^2+1}}\,.$$

d. $h : t \in]-\pi/4, \pi/4[\mapsto \tan(2t)$. $h = \tan \circ w$ avec $w(t) = 2t$; on a $\tan'(t) = \dfrac{1}{(\cos t)^2} = 1 + (\tan(t))^2$. On obtient

$$h'(t) = \tan'(w(t))w'(t) = \frac{2}{(\cos(2t))^2} = 2(1 + (\tan(2t))^2)\,.$$

e. $v : z \in]0, \pi^2/4[\mapsto \tan(\sqrt{z})$. $v = \tan \circ g$ avec $g(z) = \sqrt{z}$; on obtient

$$\begin{aligned} v'(z) &= \tan'(g(z))g'(z) = \frac{1}{(\cos(\sqrt{z}))^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{z}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{z}(\cos(\sqrt{z}))^2} = \frac{1 + (\tan(\sqrt{z}))^2}{2\sqrt{z}}\,. \end{aligned}$$

Exercice 7.

a. Tableau de variation et extrema de $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^3 - 3x + 2$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x+1)(x-1)\,.$$

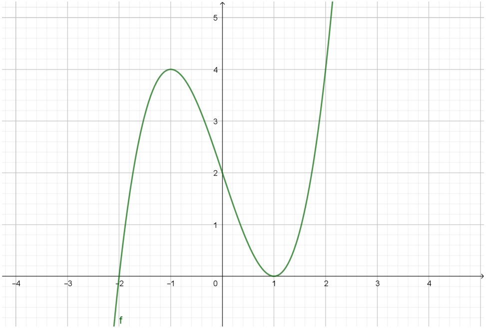
- $f'(-1) = f'(1) = 0$.
- Si $x < -1$ ou $x > 1$, $f'(x) > 0$; f est donc (strictement) croissante sur l'intervalle $]-\infty, -1]$ et sur l'intervalle $[1, +\infty[$.
- Si $-1 < x < 1$, $f'(x) < 0$; f est donc (strictement) décroissante sur l'intervalle $[-1, 1]$.

On a : $f(-1) = 4$, $f(1) = 0$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty}(3x^3) = +\infty$ et $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty}(3x^3) = -\infty$. En effet la limite en $+\infty$ ou en $-\infty$ d'une fonction polynomiale est égale à la limite de son terme de plus haut degré.

D'où le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

f présente en -1 un maximum local valant 4 (non global car $\lim_{+\infty} f = +\infty$) et en 1 un minimum local valant 0 (non global car $\lim_{-\infty} f = -\infty$).



b. Tableau de variation et extrema de $f : x \in [0, +\infty[\mapsto (x-3)\sqrt{x}$

f est continue sur $[0, +\infty[$ et dérivable sur $]0, +\infty[$; pour $x > 0$,

$$f'(x) = \sqrt{x} + \frac{(x-3)}{2\sqrt{x}} = \frac{2x + (x-3)}{2\sqrt{x}} = \frac{3x-3}{2\sqrt{x}}.$$

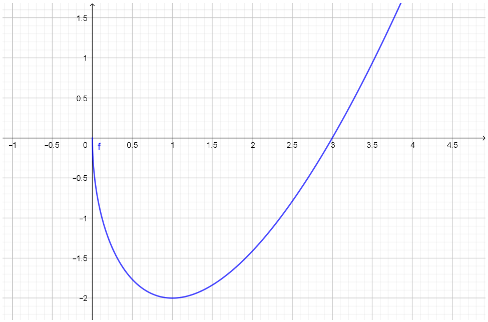
- $f'(1) = 0$.
- Si $0 < x < 1$, $f'(x) < 0$; f est donc (strictement) décroissante sur l'intervalle $[0, 1]$.
- Si $x > 1$, $f'(x) > 0$; f est donc (strictement) croissante sur l'intervalle $[1, +\infty[$.

On a : $f(0) = 0$, $f(1) = -2$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ (car $\sqrt{x}$ et $x - 3$ tendent vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$).

D'où le tableau de variation de f :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

f présente en 0 un maximum local valant 0 (non global car $\lim_{+\infty} f = +\infty$) et atteint en 1 son minimum global valant -2.



Exercice 8. Calcul de dérivées.

Rappel. Les fonctions arccos et arcsin sont définies et continues sur $[-1,1]$, dérivables sur $]-1,1[$. La fonction arctan est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. On a

$$\forall x \in]-1,1[\,,\ \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \text{et} \qquad \arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}\,,\ \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

a. $f(x) = \arccos(x^2)$. Ensemble de dérivabilité de f :
$D_{f'} = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 \in]-1,1[\} = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 - 1 < 0\} =]-1,1[$.

$$f'(x) = \arccos'(x^2) \cdot (2x) = -\frac{1}{\sqrt{1-(x^2)^2}} \cdot (2x) = -\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$$

b. $f(x) = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$. La fonction arcsin est dérivable sur $]-1,1[$. De plus pour $x \in]-1,1[$, $1-x^2 > 0$ et la fonction $u : x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$. Donc f est dérivable sur $]-1,1[$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \arcsin(x) + x \arcsin'(x) + u'(1-x^2) \cdot (-2x) \\ &= \arcsin(x) + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x) \\ &= \arcsin(x) + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x) \end{aligned}$$

Ainsi f est une primitive sur $]-1,1[$ de la fonction arcsin. On pourrait montrer que f est en fait aussi dérivable en -1 et en 1...

c. $f(x) = \arctan(2x+1)$. La fonction arctan étant dérivable sur $\mathbb{R}$, $D_{f'} = \mathbb{R}$.

$$f'(x) = \arctan'(2x+1) \cdot 2 = \frac{2}{1+(2x+1)^2} = \frac{1}{2x^2+2x+1}$$

Exercice 9.

Soit $n \geq 2$ un entier fixé. On considère la fonction $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{1+x^n}{(1+x)^n}$. .

a) f' est bien dérivable sur $[0, +\infty[$ car c'est le quotient de deux fonctions dérivables sur $[0, +\infty[$, la fonction au dénominateur ne s'annulant pas. Calculons $f'(x)$ pour $x \geq 0$.

On utilise la formule de dérivation $\dfrac{u}{v} = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$, avec $u(x) = 1 + x^n$ et $v(x) = (1+x)^n$. On a $u'(x) = nx^{n-1}$ et $v'(x) = n(1+x)^{n-1}$. On obtient

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{nx^{n-1}(1+x)^n - (1+x^n)\cdot n(1+x)^{n-1}}{(1+x)^{2n}} \\ &= \frac{(1+x)^{n-1}(nx^{n-1}(1+x) - n(1+x^n))}{(1+x)^{2n}} \\ &= \frac{n(x^{n-1}+x^n-1-x^n)}{(1+x)^{n+1}} = \frac{n(x^{n-1}-1)}{(1+x)^{n+1}} \end{aligned}$$

b) Montrons que f atteint un minimum à déterminer.

D'après le calcul précédent, pour $x \geq 0$, $f'(x)$ est du signe de $x^{n-1} - 1$ (car $n/(1+x)^{n+1} > 0$).

- $f'(1) = 0$
- Si $x \in [0, 1[$ alors $x^{n-1} < 1$ donc $f'(x) < 0$.
- Si $x \in [1, +\infty[$ alors $x^{n-1} > 1$ donc $f'(x) > 0$.

On en déduit que f est strictement décroissante sur $[0, 1]$ et strictement croissante sur $[1, +\infty[$, ce qui implique que f atteint son minimum global en 1. Ce minimum vaut $f(1) = \dfrac{2}{2^n} = \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

c) D'après b),

$$\forall x \in [0, +\infty[\,,\ \frac{1}{2^{n-1}} \leq \frac{1 + x^n}{(1+x)^n}\,.$$

En multipliant les deux membres de l'inégalité ci-dessus par $2^{n-1}(1+x)^n$ (qui est un réel strictement positif pour tout $x \geq 0$), on obtient

$$\forall x \in [0, +\infty[\,,\ (1+x)^n \leq 2^{n-1}(1 + x^n)\,.$$

d) Déduisons de c) : pour tout $x \in [0, +\infty[$ et tout $y \in [0, +\infty[$,

$$(x+y)^n \leq 2^{n-1}(x^n + y^n)\,. \tag{3}$$

Soit $x \geq 0$, $y \geq 0$.

- Premier cas : $x = y = 0$. Dans ce cas $(x+y)^n = 2^{n-1}(x^n + y^n) = 0$ donc l'inégalité (3) est évidente.
- Second cas : $x > 0$ ou $y > 0$. Supposons par exemple $x > 0$. Le réel $z = y/x$ est bien défini et est dans $\mathbb{R}_+$ donc d'après c)

  $$\left(1 + \frac{y}{x}\right)^n \leq 2^{n-1}\left(1 + \frac{y^n}{x^n}\right),$$

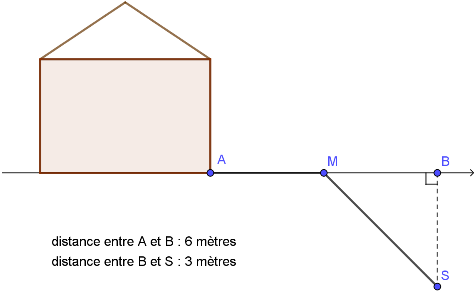
  ce qui donne

  $$\frac{(x+y)^n}{x^n} \leq 2^{n-1}\frac{x^n + y^n}{x^n}\,.$$

  En multipliant les deux membres de cette inégalité par le réel positif x^n, on obtient (3).

  Si on suppose $y > 0$, on obtient l'inégalité finale de manière analogue, en échangeant les rôles de x et y.

Exercice 10.



a) On note x la distance MB. M appartient au segment $[AB]$. On a donc $MB \leq AB$. Ainsi $0 \leq MB \leq 6$: x est dans l'intervalle $[0, 6]$.

Comme M appartient au segment $[AB]$, $AB = AM + MB$. Ainsi $AM = AB - MB = 6 - x$.

Le triangle MBS étant rectangle en M, le théorème de Pythagore donne $MS^2 = MB^2 + BS^2 = MB^2 + 9$. D'où $MS = \sqrt{x^2 + 9}$.

b) Expression du coût $f(x)$ du raccordement, sachant que la partie de la conduite située à la surface du sol coûte 300 euros par mètre alors que celle enfouie sous le sol coûte 750 euros par mètre.

Il y a $AM = (6-x)$ mètres de conduite à la surface et $MS = \sqrt{x^2+9}$ mètres de conduite enfouie. Le coût du raccordement (en euros) est donc

$$f(x) = 300(6-x) + 750\sqrt{x^2+9}\,. \tag{4}$$

c) Où placer le point M pour rendre le coût du raccordement minimal?

Il faut trouver où la fonction $f : [0,6] \to \mathbb{R}$ définie par (4) atteint son minimum. Pour cela, on étudie les variations de f sur l'intervalle $[0,6]$.

f est dérivable sur $[0,6]$, et

$$\begin{aligned} f'(x) &= -300 + 750\frac{2x}{2\sqrt{x^2+9}} = 750\frac{x}{\sqrt{x^2+9}} - 300 \\ &= \frac{750x - 300\sqrt{x^2+9}}{\sqrt{x^2+9}} = \frac{150(5x - 2\sqrt{x^2+9})}{\sqrt{x^2+9}}\,. \end{aligned}$$

$f'(x)$ a le même signe que $5x - 2\sqrt{x^2+9}$. On a :

$$\begin{aligned}
f'(x) = 0 \quad &\iff \quad 5x = 2\sqrt{x^2+9} \\
&\iff \quad (5x)^2 = (2\sqrt{x^2+9})^2 \\
&\iff \quad 25x^2 = 4(x^2+9) \\
&\iff \quad 21x^2 = 36 \iff x^2 = \frac{12}{7} \\
&\iff \quad x = \sqrt{\frac{12}{7}} \simeq 1,31 \quad (\text{car } x \geq 0)\,.
\end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned}
f'(x) > 0 \quad &\iff \quad 5x > 2\sqrt{x^2+9} \\
&\iff \quad (5x)^2 > (2\sqrt{x^2+9})^2 \\
&\iff \quad 25x^2 > 4(x^2+9) \\
&\iff \quad 21x^2 > 36 \iff x \in]\sqrt{12/7}, 6] \quad (\text{car } x \geq 0)\,.
\end{aligned}$$

Enfin,

$$f'(x) < 0 \iff x \in [0, \sqrt{\frac{12}{7}}[$$

Dans les suites d'équivalences précédentes, pour le passage de la première à la deuxième ligne, on a utilisé le fait que $5x \in \mathbb{R}_+$, $2\sqrt{x^2+9} \in \mathbb{R}_+$, et la croissance stricte de la fonction carré sur $\mathbb{R}_+$.

On trouve ainsi que f est strictement décroissante sur $[0, \sqrt{12/7}]$ et strictement croissante sur $[\sqrt{12/7}, 6]$. Elle atteint donc en $\sqrt{12/7}$ son minimum global.

Conclusion : il faut placer le point M à $\sqrt{12/7} \simeq 1,31$ mètres de B pour minimiser le coût. Ce coût est alors de $f(\sqrt{12/7}) \simeq 3862$ euros.

Feuille TD 2

Exercice 11. On veut étudier la fonction

$$f :]0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$

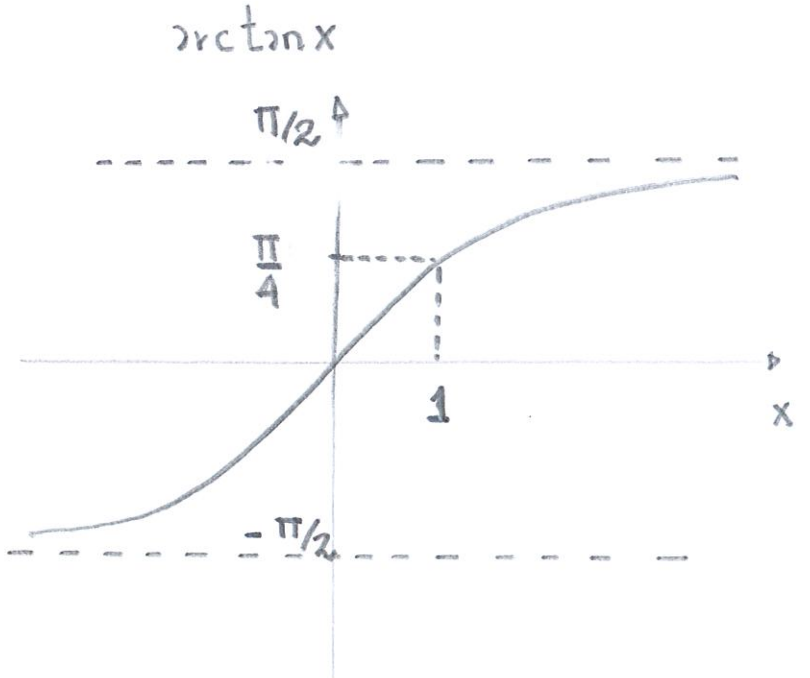
$$f(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$$

(a) Notons que

$$f(1) = \arctan(1) + \arctan\left(\frac{1}{1}\right)$$

$$= 2\arctan(1) = 2\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{f(1) = \frac{\pi}{2}}$$



(b) Dérivée de f ? On a

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left[\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right]$$

$$= \frac{d}{dx}\left[\arctan(x)\right] + \frac{d}{dx}\left[\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0$$

Bref,

$$f'(x) = 0 \qquad \forall x \in \,]0,\infty[$$

Donc f est constante sur l'intervalle $]0,\infty[$

En particulier,

$$f(x) = f(1) \qquad \forall x \in]0,\infty[$$

On obtient ainsi la formule trigonométrique

$$\boxed{\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}} \qquad \forall x \in]0,\infty[$$

(c) Que se passe t-il sur l'intervalle $]-\infty,0[$?

Réponse : la même demarche montre que

$$f(x) = f(-1) \qquad \forall x \in]-\infty,0[$$

Autrement dit,

$$\boxed{\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}} \qquad \forall x \in]-\infty,0[$$

Exercice 12

Etudions les variations de la fonction

$$x \longmapsto f(x) = x^5 - 5x + 1$$

On a

$$f'(x) = 5x^4 - 5$$

Donc

$$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow 5x^4 - 5 = 0 \Longleftrightarrow x^4 = 1$$

$$\Longleftrightarrow x = -1 \text{ ou } x = 1$$

Notons que

$$\begin{cases} f'(x) > 0 & \text{si} \quad x \in]-\infty, -1[\\ f'(x) < 0 & \text{si} \quad x \in]-1, 1[\\ f'(x) > 0 & \text{si} \quad x \in]1, \infty[\end{cases}$$

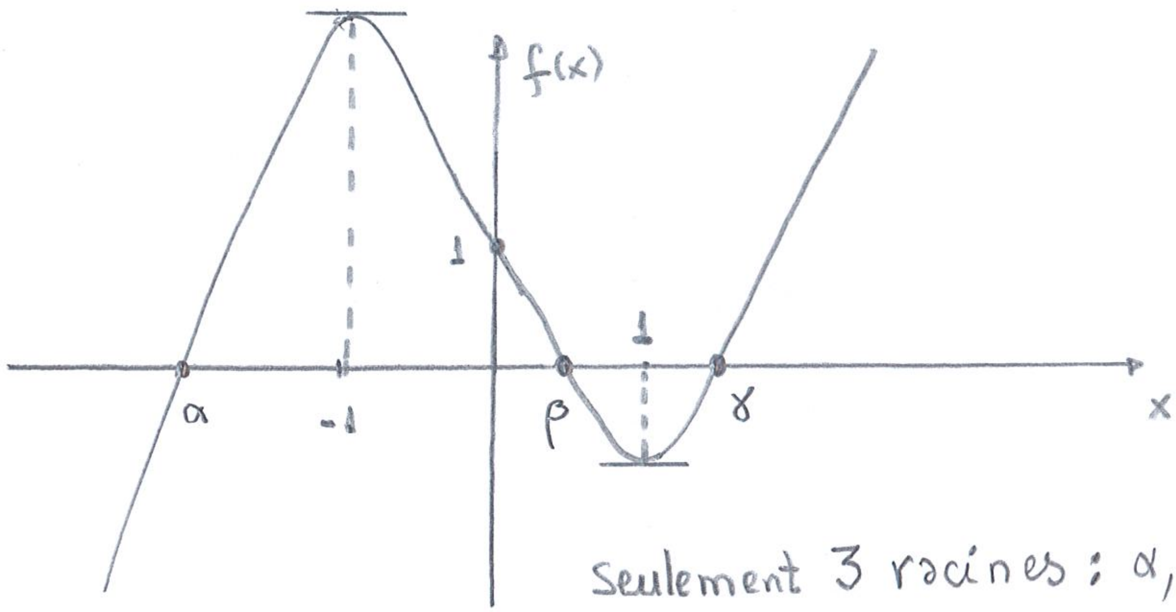
Donc

$$\begin{cases} f \text{ strictement croissant sur }]-\infty, -1[\\ f \text{ strictement decroissant sur }]-1, 1[\\ f \text{ strictement croissant sur }]1, \infty[\end{cases}$$

Notons aussi que $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -\infty$

Remarque : Le graphe de f est comme suit:



Seulement 3 racines : α, β et γ.

Exercice 13

Il s'agit de simplifier quelques expressions.

(a) $$e^{4a+1}\left(e^{-a}\right)^4 = e^{4a+1}\, e^{-4a} = e^{1} = e$$

(b) $$\frac{\left(e^{-a}\right)^2 e^{3a+2}}{e^{a+3}} = e^{-2a}\, e^{3a+2}\, e^{-(a+3)}$$

$$= e^{-2a+3a+2-a-3} = e^{-1}$$

$$= \frac{1}{e}$$

(c) $$e^{-3\ln 4} = e^{\ln\left(4^{-3}\right)} = 4^{-3}$$

$$= \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}$$

(d) $\ln(25a) - 2\ln 5 = \ln(25a) - \ln(5^2)$

$$= \ln\left(\frac{25a}{5^2}\right) = \ln a$$

(e) $\ln(\sqrt{x}\; x^3) = \ln(x^{\frac{1}{2}}\, x^3) = \ln(x^{7/2})$

$$= \frac{7}{2}\ln x$$

(f) $\ln(a^3 - a) - \ln(a-1) = \ln\left(\frac{a^3 - a}{a-1}\right)$

$$= \ln\left(\frac{a(a-1)(a+1)}{a-1}\right) = \ln(a(a+1))$$

$$= \ln(a^2 + a)$$

Exercice 14

Il s'agit de résoudre quelques équations et inéquations.

(a) $$e^{2x+3} \geqslant 7 \iff 2x+3 \geqslant \ln 7$$

$$\iff x \geqslant \frac{(\ln 7) - 3}{2}$$

$$\iff x \in \left[\frac{(\ln 7) - 3}{2}, \infty \right[$$

(b) $$20 \cdot 10^x = 35 \iff 10^x = \frac{7}{4}$$

$$\iff x \ln(10) = \ln\left(\frac{7}{4}\right)$$

$$\iff x = \frac{\ln\left(\frac{7}{4}\right)}{\ln(10)}$$

(c) $2^x = 3^{x-1} \iff 2^x = \frac{3^x}{3}$

$\iff \frac{3^x}{2^x} = 3$

$\iff \left(\frac{3}{2}\right)^x = 3$

$\iff x \ln\left(\frac{3}{2}\right) = \ln 3$

$\iff x = \dfrac{\ln 3}{\ln(3/2)}$

(d) $\dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = 2$

Posons $u = e^x$. Dans ce cas

$$\frac{u + \frac{1}{u}}{2} = 2$$

c.-à-d, $u^2 - 4u + 1 = 0$ $\begin{cases} u_1 = 2 - \sqrt{3} \\ u_2 = 2 + \sqrt{3} \end{cases}$

Donc

$$e^x = 2-\sqrt{3} \quad \text{ou} \quad e^x = 2+\sqrt{3}$$

Finalement,

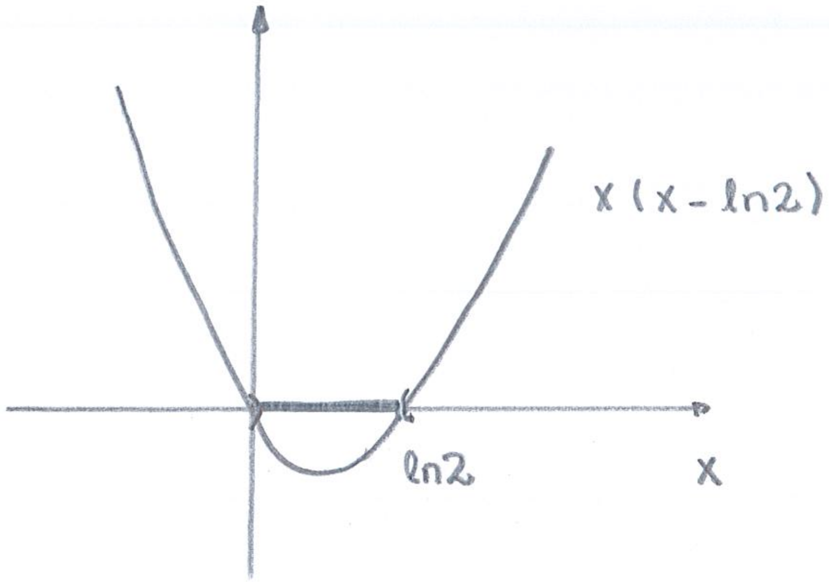
$$x = \underbrace{\ln(2-\sqrt{3})}_{\approx -1.317} \quad \text{ou} \quad x = \underbrace{\ln(2+\sqrt{3})}_{\approx 1.317}$$

(e) $\ln(2x+1) < -2 \iff 2x+1 < e^{-2}$

$$\iff x < \frac{\left(\frac{1}{e}\right)^2 - 1}{2}$$

(f) $2^x > e^{x^2} \iff x \ln 2 > x^2$

$$\iff x^2 - x\ln 2 < 0 \iff x(x-\ln 2) < 0$$



Donc

$$x \in \,]0, \ln 2[$$

(g) $\ln(x^2 - 1) = \ln(2-x) + \ln(3-x)$

$$\iff \ln(x^2-1) = \ln\left[(2-x)(3-x)\right]$$

$$\iff x^2 - 1 = (2-x)(3-x)$$

$$\iff x^2 - 1 = x^2 - 5x + 6$$

$$\iff -1 = -5x + 6$$

$$\iff x = \frac{7}{5}$$

Exercice 15

$$7^n > 10^{2019}$$

$$\Leftrightarrow \quad n \ln 7 > 2019 \ln(10)$$

$$\Leftrightarrow \quad n > \underbrace{\frac{2019 \ln(10)}{\ln 7}}_{\approx 2389.07}$$

On veut que n soit entier et le plus petit possible. Donc

$$\boxed{n = 2390}$$

Exercice 16

Il s'agit de calculer quelques dérivées

(a) $f(x) = \ln(x+4)$

$$f'(x) = \frac{1}{x+4}$$

valable si $x > -4$

(b) $$f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{1}{x}\right) x - (\ln x)\, 1}{x^2}$$

$$= \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

valable si $x > 0$

(c)

$$f(x) = \ln(\ln x)$$

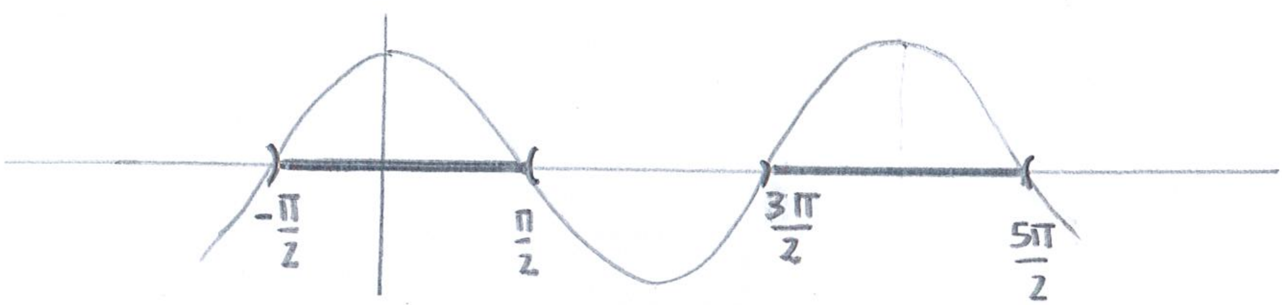
$$f'(x) = \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x}$$

valable si $x > 1$

(d) $$f(x) = \ln(\cos x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{\cos x}(-\sin x) = -\tan x$$

valable si $\cos x > 0$



(e) $f(x) = \dfrac{1}{\ln(x)}$

$$f'(x) = -\frac{1}{(\ln x)^2} \cdot \frac{1}{x}$$

valable pour $x > 0$

(f) $f(x) = e^{\sin x}$

$$\ln[f(x)] = \sin x$$

$$\frac{1}{f(x)} f'(x) = \cos x$$

$$\Longrightarrow \quad f'(x) = e^{\sin x} \cos x$$

valable pour tout $x \in \mathbb{R}$

(g) $f(x) = (\sqrt{2})^{x}$

$\longrightarrow \quad \ln[f(x)] = x \ln\sqrt{2}$

$\longrightarrow \quad \frac{1}{f(x)} f'(x) = \ln\sqrt{2}$

$\longrightarrow \quad f'(x) = (\ln\sqrt{2})\,(\sqrt{2})^{x}$

valable pour tout $x \in \mathbb{R}$

(h) $f(x) = (x^4 + 2)^{\sqrt{3}}$

$f'(x) = \sqrt{3}\,(x^4+2)^{\sqrt{3}-1}\,(4x^3)$

$= 4\sqrt{3}\,x^3\,(x^4+2)^{\sqrt{3}-1}$

valable pour tout $x \in \mathbb{R}$

Exercice 17

Application de la règle de l'Hôpital

$$\boxed{\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}}$$

(a) __question importante :__ quand est-ce que cette règle est valable ? Répondre avec précision.

(b)

- $$\lim_{x \to 0} \frac{x + x^3}{\sin(3x)} = \left.\frac{1 + 3x^2}{3\cos(3x)}\right|_{x=0} = \frac{1}{3}$$

- $$\lim_{x \to 0} \frac{e^{-x} - 1}{\ln(1+x)} = \left.\frac{-e^{-x}}{\frac{1}{1+x}}\right|_{x=0} = -\frac{1}{1} = -1$$

- $$\lim_{x \to 1} \frac{\cos(\pi x/2)}{\sqrt{x} - 1} = \left.\frac{-\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}\right|_{x=1} = \frac{-\frac{\pi}{2}\cdot 1}{\frac{1}{2}} = -\pi$$

1/7

Exercice 18

$$sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

1-a) sh est impaire : $sh(-x) = \frac{e^{-x} - e^{x}}{2} = -sh(x)$

ch est paire : $ch(-x) = \frac{e^{-x} + e^{x}}{2} = ch(x)$

1.b) $ch(x) + sh(x) = e^x$

$ch(x) - sh(x) = e^{-x}$

$$\Rightarrow \quad ch^2(x) - sh^2(x) = (ch(x) + sh(x))(ch(x) - sh(x)) = e^x . e^{-x} = 1$$

$$ch^2(x) - sh^2 x = 1$$

$$\left.\begin{array}{l} ch^2(x) = 1 + sh^2(x) \\ ch(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow ch(x) = \sqrt{1 + sh^2(x)}$$

1.c) $sh(a+b) = sh(a)ch(b) + ch(a).sh(b)$

$ch(a+b) = ch(a)ch(b) + sh(a)sh(b)$

Il suffit de calculer les deux membres de chaque égalité et de comparer :

$$sh(a)ch(b) + ch(a)sh(b) = \frac{e^a - e^{-a}}{2} . \frac{e^b + e^{-b}}{2} + \frac{e^a + e^{-a}}{2} . \frac{e^b - e^{-b}}{2}$$

$$= \frac{e^{a+b} - e^{-(a+b)}}{2}$$

2\. a) $\operatorname{sh}(x) = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2}$

$\operatorname{sh}'(x) = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2}$ $\quad [\, (e^{x})' = e^{x},\ (e^{-x})' = -e^{-x} \,]$

$\operatorname{ch}'(x) = \operatorname{sh}(x)$

$\operatorname{sh}'(x) > 0 \quad \forall x$

sh est strict $\nearrow$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\operatorname{sh}(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$\operatorname{ch}(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

2\. b) Sh étant strictement croissante et continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ avec $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

Alors Sh est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

$\operatorname{argsh} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction réciproque d'une fonction dérivable qui ne s'annule jamais.

$$\left\{ \begin{array}{l} y = \operatorname{sh}(x) \\ x \in \mathbb{R} \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x = \operatorname{argsh}(y) \\ y \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

$$\operatorname{argsh}'(y) = \frac{1}{\operatorname{sh}'(x)} = \frac{1}{\operatorname{ch}(x)} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2(x)}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}}$$

$$\boxed{\operatorname{argsh}'(y) = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \quad \forall y \in \mathbb{R}}$$

$ch : [0,+\infty[\longrightarrow [1,+\infty[$ est une fonction strictement croissante et continue, et $f(0)=1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, donc ch est une bijection de $[0,+\infty[$ dans $[1,+\infty[$

argch est dérivable en tout point $y = ch(x)$ avec $sh'(x) \neq 0$ c.à.d. $sh(x) \neq 0$ i.e. $x \neq 0$ et $y \neq 1$.

ou encore argch est dérivable sur $]1,+\infty[$

$$\begin{cases} y = ch(x) \\ x \in [0,+\infty[\end{cases} \iff \begin{cases} x = \operatorname{argch}(y) \\ y \in [1,+\infty[\end{cases}$$

$$\operatorname{argch}'(y) = \frac{1}{ch'(x)} = \frac{1}{sh(x)}$$

or $ch^2(x) - sh^2(x) = 1$, donc

$$sh^2(x) = ch^2(x) - 1$$

$$sh(x) = \sqrt{ch^2(x) - 1} = \sqrt{y^2 - 1}$$

$$\boxed{\operatorname{argch}'(y) = \frac{1}{\sqrt{y^2-1}} \quad \forall y \in]1, +\infty[}$$

Exercice 19

formule de Taylor - Young de $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$
avec I un voisinage de 0 :

$$\begin{cases} f(x) = f(0) + f'(0)x + \dfrac{f''(0)}{2}x^2 + \dots + \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + x^n \varepsilon(x) \\ \lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0 \end{cases}$$

valable si f est n-fois dérivable en 0.

$\underline{n=2}$
$$\begin{cases} f(x) = f(0) + f'(0)x + \dfrac{f''(0)}{2}x^2 + x^2 \varepsilon(x) \\ \lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0. \end{cases}$$

- $f(x) = e^{x/2}$, $f'(x) = \frac{1}{2}e^{x/2}$ $f''(x) = \frac{1}{4}e^{x/2}$

  $f(0) = 1$, $f'(0) = \frac{1}{2}$, $f''(0) = \frac{1}{4}$

  $e^{x/2} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 + x^2 \varepsilon(x)$

- $g(x) = (1+x)^{1/2}$ $g'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2}$ $g''(x) = -\frac{1}{4}(1+x)^{-3/2}$

  $g(0) = 1$, $g'(0) = \frac{1}{2}$ $g''(x) = -\frac{1}{4}$

$(1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + x^2 \varepsilon(x)$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{x/2} - \sqrt{1+x}}{x^2}$

D'après la question précédente :

$$\frac{e^{x/2} - \sqrt{1+x}}{x^2} = \frac{\left(1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 + x^2\varepsilon_1(x)\right) - \left(1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + x^2\varepsilon_2(x)\right)}{x^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}x^2 + x^2\left(\varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(x)\right)}{x^2}$$

$$= \frac{1}{4} + \varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(x)$$

Comme $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon_1(x) = \lim\limits_{x \to 0} \varepsilon_2(x) = 0$, on a

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{x/2} - \sqrt{1+x}}{x^2} = \frac{1}{4}$$

$\boxed{\text{Exercice 20}}$

$f(x) = \ln(1-x)$ $\quad f'(x) = -\dfrac{1}{1-x} = -(1-x)^{-1}$

$f''(x) = -(1-x)^{-2}$ $\quad f^{(3)}(x) = -2(1-x)^{-3}$

$f(0) = 0$, $\quad f'(0) = -1$, $\quad f''(0) = -1$, $\quad f^{(3)}(0) = -2$

$$f(x) = -x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}(-2) + x^3\varepsilon(x)$$

$$= -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x)$$

a) $\dfrac{2\ln(1-x) + x(x+2)}{x^3}$

$$= \frac{2\left[-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x)\right] + x^2 + 2x}{x^3}$$

$$= \frac{-\frac{2}{3}x^3 + 2x^3\varepsilon(x)}{x^3}$$

$$= -\frac{2}{3} + 2\varepsilon(x)$$

D'où $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2\ln(1-x) + x(x+2)}{x^3} = -\frac{2}{3}$

b) $g(x) = x^{2,5}$ $\quad g'(x) = 2{,}5\, x^{1,5}$

$$g''(x) = (2{,}5)\times(1{,}5)\, x^{0,5}$$

$$g(1) = 1, \quad g'(1) = 2{,}5 \quad g''(1) = 15/4$$

$$\begin{cases} g(x) = g(1) + g'(1)(x-1) + \dfrac{g''(1)}{2}(x-1)^2 + (x-1)^2\varepsilon(x) \\ \displaystyle\lim_{x\to 1} \varepsilon(x) = 0 \end{cases}$$

$$g(x) = 1 + 2{,}5(x-1) + \frac{15}{8}(x-1)^2 + (x-1)^2\varepsilon(x)$$

$$\frac{x^{2/5} + 1{,}5 - 2{,}5x}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{1 + 2{,}5(x-1) + \frac{15}{8}(x-1)^2 + (x-1)^2\varepsilon(x) + 1{,}5 - 2{,}5x}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{\frac{15}{8}(x-1)^2 + (x-1)^2\varepsilon(x)}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{15}{8} + \varepsilon(x) \qquad \left(\varepsilon(x) \underset{x\to 1}{\longrightarrow} 0\right)$$

D'où $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^{2/5} + 1{,}5 - 2{,}5x}{(x-1)^2} = \frac{15}{8}$