UAPV - UFR STS
Portails Math-Info/Math-Physique L1 S1

Année 2020/2021
Analyse 1

CC2

Documents, calculatrices et portables interdits. Les réponses doivent être accompagnées d'une justification.
Durée : 1h

Exercice 1. a) Calculer la dérivée de la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \arctan(1/x)$.

b) En déduire $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\arctan(1/x) - \frac{\pi}{4}}{x-1}$.

Exercice 2. On définit la fonction $g : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ par

$$g(x) = (x-6)\sqrt{x} - 1 = x\sqrt{x} - 6\sqrt{x} - 1 = x^{3/2} - 6x^{1/2} - 1\,.$$

On rappelle que x_0 est un point critique de g si $g'(x_0) = 0$.

a) Calculer $g'(x)$ (pour $x > 0$) et déterminer le(s) point(s) critique(s) de g.

b) Déterminer la limite de g en $+\infty$.

c) Dresser le tableau de variation de g. En déduire le nombre de solutions dans $[0,+\infty[$ de l'équation $g(x) = 0$.

Exercice 3. On considère les fonctions u et v définies sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = e^{2x}$ et $v(x) = e^{-x}$.

a) Résoudre l'équation $u(x) = 8v(x)$.

b) On définit la fonction h sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = u(x) + 2v(x) = e^{2x} + 2e^{-x}$. Calculer $h'(x)$ et $h''(x)$; on rappelle que h'' désigne la dérivée seconde de h.

c) Ecrire la formule de Taylor-Young pour la fonction h en 0 à l'ordre 2.

d) En utilisant c), trouver la limite de $\dfrac{e^{2x} + 2e^{-x} - 3}{x^2}$ lorsque x tend vers 0.

Exercice 4. Calculer les intégrales suivantes.

a) $I = \displaystyle\int_0^1 t(t^2+1)^2\,dt$ b) $J = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos(x)\sin(x)\,dx$ c) $K = \displaystyle\int_1^e \frac{1-s^2}{s}\,ds$