UAPV - UFR STS — Année 2020/2021

Portails Math-Info/Math-Physique L1 S1 — Analyse 1

Corrigé du CC3

Exercice 1. a) On a

$$\begin{aligned} I &= \int_0^2 \frac{(x+1)-1}{x+1}\,dx = \int_0^2 1 - \frac{1}{x+1}\,dx \\ &= \Big[x - \ln(1+x)\Big]_0^2 = (2-\ln(3)) - (0-\ln(1)) = 2 - \ln(3)\,. \end{aligned}$$

b) Lorsqu'on effectue le changement de variable $x = t^2$, dx est remplacé par $2tdt$; de plus $x = 0$ lorsque $t = 0$ et $x = 4$ lorsque $t = 2$. On obtient

$$J = \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{t^2}+1} 2t\,dt = \int_0^2 \frac{2t}{t+1}\,dt = 2I\,.$$

Donc d'après a) $J = 4 - 2\ln(3)$.

Exercice 2. On rappelle que $\sin' = \cos$ et $\cos' = -\sin$. On pose $\begin{cases} u(x) = 2x+1 \\ v'(x) = \cos x \end{cases}$, $\begin{cases} u'(x) = 2 \\ v(x) = \sin x \end{cases}$ (u et v sont de classe C^1, et on applique la formule d'intégration par parties).

$$\begin{aligned} K &= \int_0^{\pi/2} u(x)v'(x)\,dx = \Big[u(x)v(x)\Big]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} u'(x)v(x)\,dx \\ &= \Big[(2x+1)\sin x\Big]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} 2\sin x\,dx \\ &= \pi + 1 + \Big[2\cos x\Big]_0^{\pi/2} = \pi + 1 + (0-2) = \pi - 1\,. \end{aligned}$$

Exercice 3. a) Les solutions de l'équation différentielle $y' = -3y$ sont les fonctions $y : t \mapsto \lambda e^{-3t}$, où λ est une constante réelle.

b) $y' = -3y + e^{2t}$ $(*)$ est une équation différentielle linéaire du premier ordre, l'équation homogène associée est l'équation différentielle de a). Cherchons une solution particulière de $(*)$, sous la forme $y_0(t) = ce^{2t}$, où c est une constante réelle. Alors

$$y_0'(t) + 3y_0(t) = 2ce^{2t} + 3ce^{2t} = 5ce^{2t}\,,$$

donc y_0 est une solution de $(*)$ si $5c = 1$. Ainsi la fonction $t \mapsto \dfrac{e^{2t}}{5}$ est une solution particulière de $(*)$.

Remarque : on pourrait aussi appliquer la méthode de variation de la constante.

Conclusion : d'après ce qui précède et a), l'ensemble des solutions de $(*)$ est

$$S = \{y : t \mapsto \frac{e^{2t}}{5} + \lambda e^{-3t}\ ;\ \lambda \text{ constante réelle}\}$$

Exercice 4. 1. a) Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du second ordre, homogène à coefficients constants. Son polynôme caractéristique est $P(X) = X^2 + (3/2)X - 1$. On a $\Delta = (9/4) + 4 = 25/4$. Les racines de P sont $r_1 = \dfrac{-(3/2) - (5/2)}{2} = -2$ et $r_2 = \dfrac{-(3/2) + (5/2)}{2} = 1/2$. L'ensemble des solutions de (1) est donc

$$SH = \{y : t \mapsto \lambda e^{-2t} + \mu e^{t/2} \ ; \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

b) Déterminons λ et μ pour que $y : t \mapsto \lambda e^{-2t} + \mu e^{t/2}$ vérifie $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$. On a $y(0) = \lambda + \mu$, et $y'(t) = -2\lambda e^{-2t} + (1/2)\mu e^{t/2}$, $y'(0) = -2\lambda + \mu/2$. On a

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ -2\lambda + \mu/2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \mu = 4\lambda \\ \lambda + 4\lambda = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = 1/5 \\ \mu = 4/5 \end{cases}$$

La solution cherchée est la fonction $t \mapsto (1/5)e^{-2t} + (4/5)e^{t/2}$.

2. a) On cherche une solution particulière de (2) sous la forme $y_0(t) = at^2 + bt + c$, où a, b, c sont des constantes réelles. On a

$$y_0''(t) + \frac{3}{2}y_0'(t) - y_0(t) = 2a + \frac{3}{2}(2at + b) - (at^2 + bt + c) = -at^2 + (3a - b)t + (2a + \frac{3}{2}b - c)$$

Donc y_0 est une solution de (2) si et seulement si $\begin{cases} -a = 1 \\ 3a - b = -1 \\ 2a + \frac{3}{2}b - c = 0 \end{cases}$, ce qui donne $a = -1$, $b = -2$, $c = -5$. La fonction $t \mapsto -t^2 - 2t - 5$ est donc une solution particulière de (2).

b) D'après 1.a) et 2.a), l'ensemble des solutions de (2) est

$$S = \left\{y : t \mapsto -t^2 - 2t - 5 + \lambda e^{-2t} + \mu e^{t/2} \ ; \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\right\}.$$