UAPV - UFR STS
 Année 2021/2022
Portails Math-Info/Math-Physique L1 S1
 Analyse 1

TD1

Exercice 1. Déterminer (sous la forme d'intervalles ou de réunions d'intervalles) les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ définis par les conditions suivantes sur x :

$a)$ $5x + 2 \geq -3$ $\quad$ $b)$ $2x - 1 < 4x + 3 \leq -x + 6$ $\quad$ $c)$ $|x - 1| < 4$ $\quad$ $d)$ $|x - 2| \geq 3$

$e)$ $|x - 2| \leq |x|$ $\quad$ $f)$ $|x - 2| + |x + 2| > 3$ $\quad$ $g)$ $\sqrt{x + 1} < 2$ $\quad$ $h)$ $x^2 + 1 \leq 3$

$i)$ $x^2 + 3x < 4$ $\quad$ $j)$ $x^3 - 3x^2 + 2x \geq 0$ $\quad$ $k)$ $|x| + |x - 1| \leq 2$

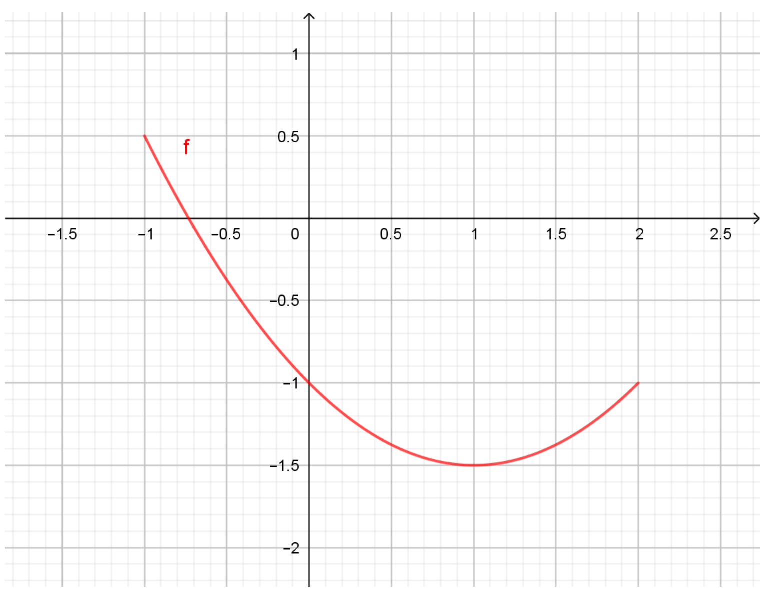
Exercice 2. Soit $f : x \mapsto ax + b$ une fonction affine. On suppose que $|f(-1)| = 3$ et $|f(2)| = 2$. Déterminer toutes les valeurs possibles du couple (a, b) et tracer les courbes représentatives correspondantes de f.

Exercice 3. a) Tracer la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto |x| + |2x - 4|$.

b) A quoi est égal l'ensemble $f(\mathbb{R})$? La fonction f est-elle minorée? Est-elle majorée?

c) Déterminer tous les antécédents par f de 3; de 1; de 2.

Exercice 4. On donne ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f d'ensemble de définition $[-1, 2]$.



a) Donner l'ensemble de définition et tracer la courbe représentative des fonctions suivantes :

$i)$ $x \mapsto -f(x)$ $\quad$ $ii)$ $x \mapsto f(-x)$ $\quad$ $iii)$ $x \mapsto f(x) + 2$ $\quad$ $iv)$ $x \mapsto f(x + 2)$

b) Sachant que f est la restriction à $[-1,2]$ d'une fonction polynomiale de degré 2, expliciter $f(x)$.

Exercice 5. Déterminer les ensembles de définition de f, g, $g\circ f$, $f\circ g$ et calculer $g\circ f(x)$ et $f\circ g(x)$ dans chacun des exemples suivants.

a) $f : x \mapsto x^2+2 \quad , \quad g : x \mapsto \dfrac{1}{x}$;

b) $f : x \mapsto \sqrt{x} \quad , \quad g : x \mapsto x^2-1$;

c) $f : x \mapsto x^2-2 \quad , \quad g : x \mapsto x^3+1$.

Exercice 6. a) Soient f, g, h, des fonctions d'ensemble de définition $\mathbb{R}$. Montrer l'égalité $(f+g)\circ h = f\circ h + g\circ h$.

b) Peut-on affirmer qu'on a aussi $h\circ(f+g) = h\circ f + h\circ g$? En cas de réponse négative, donner un contre-exemple.

Exercice 7. a) On considère une fonction paire $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une fonction impaire $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, et on pose $f = u+v$. Déterminer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, une expression de $u(x)$ et $v(x)$ en fonction de $f(x)$ et $f(-x)$.

b) Montrer que toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ peut s'écrire comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire, et que cette décomposition est unique.

c) Déterminer cette décomposition dans les cas suivants : $f(x) = 2x^5 - 3x^4 + x^2 - 2x + 4$, $f(x) = \dfrac{1}{2+\sin x}$.

Exercice 8. Donner l'ensemble de définition de la fonction $u : x \mapsto \sqrt{1-x^3}$ et déterminer (sans calculer de dérivée!) son sens de variation.

Exercice 9. a) Pour $a \in [2,4]$, trouver un encadrement de a^2; de a^3; de $\dfrac{1}{a}$.

b) Pour $a \in [-3,2]$, que peut-on dire de a^2; de a^3; de $\dfrac{1}{a}$?

On pourra utiliser les tableaux de variations des fonctions carré, cube et inverse pour justifier les réponses.

Exercice 10. Soit $a, b \in \mathbb{R}_+$. Comparer $\sqrt{a+b}$ et $\sqrt{a}+\sqrt{b}$. Dans quels cas a-t-on égalité?

Exercice 11. Soit $T > 0$ et soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction T-périodique. On suppose de plus f croissante. Montrer qu'alors f est constante.

Exercice 12. Que peut-on dire d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui est à la fois 3-périodique et 5-périodique?

Exercice 13. Justifier que les fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$ sont périodiques et en donner une période.

i) $x \mapsto \sin(3x)$ *ii)* $x \mapsto [\cos(\pi x)]^2 \sin(\pi x/2)$ *iii)* $x \mapsto \cos(x/2)+\cos(x/3)+\cos(x/5)$

Exercice 14. Donner l'ensemble de définition des fonctions rationnelles suivantes, puis simplifier leur expression (si c'est possible).

$$a)\ x \mapsto \frac{x+x^7}{x^4-2x^5+3x^6} \qquad b)\ x \mapsto \frac{x^3-2x+1}{x^3-2x^2-x+2} \qquad c)\ x \mapsto \frac{x^3+2x}{x^4+4x^2+4}$$

Exercice 15. Déterminer tous les antécédents de $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ par la fonction cosinus.

Exercice 16. Calculer les limites suivantes.

$$a)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+2x-2}{x^3-1} \qquad b)\ \lim_{x\to 0} \frac{x^3-x^2+x}{3x^3+2x} \qquad c)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-x^2+x}{3x^3+2x}$$

$$d)\ \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2-5x+7}{3x+1} \qquad e)\ \lim_{t\to 3} \frac{t-3}{t^2-9} \qquad f)\ \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x}-x$$

$$g)\ \lim_{t\to 2} \frac{1}{t^2-2t} \qquad h)\ \lim_{x\to 1, x>1} \frac{x^2-1}{\sqrt{x-1}} \qquad i)\ \lim_{x\to 1} \frac{x^3-2x^2+x}{x^2-3x+2}$$

Exercice 17. a) On considère une fonction f dont l'ensemble de définition contient un intervalle $[a,+\infty[$. On suppose que la fonction $x \mapsto f(x)+x$ est bornée sur l'intervalle $[a,+\infty[$. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

b) Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$.

Exercice 18. a) Résoudre l'équation $x^{\frac{1}{3}} = 3x$.

b) Résoudre l'équation $\sqrt{x} - 2x^{\frac{1}{4}} = 1$

Exercice 19. 1. On rappelle que pour tous réels a, b,

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b\,.$$

a) En utilisant la formule précédente, trouver, pour $a \in \mathbb{R}$, une expression de $\cos(2a)$ en fonction de $\cos a$.

b) En déduire, pour tout $x \in [-1,1]$, une simplification de $\cos(2\arccos(x))$.

2. a) Montrer que

$$\cos(2a) = \frac{1-(\tan a)^2}{1+(\tan a)^2}\,.$$

b) En déduire une simplification de $\cos(2\arctan(x))$.

Exercice 20. Combien l'équation $\tan x = 2$ a-t-elle de solutions dans l'intervalle $[-3\pi/2, 3\pi/2]$? Exprimer ces solutions en fonction du réel $\alpha := \arctan(2)$.

Exercices complémentaires

Exercice 21. On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$.

a) Quel est l'ensemble de définition de f?

b) Quel est l'ensemble de définition de $f \circ f$? Calculer $f \circ f(x)$.

c) Quel est l'ensemble de définition de $f \circ f \circ f$? Calculer $f \circ f \circ f(x)$.

Exercice 22. a) Factoriser la fonction polynomiale $x \mapsto P(x) = x^3 - 3x^2 + x$.

b) Factoriser la fonction polynomiale $x \mapsto Q(x) = 2x^3 - x^2 - 2x + 1$.

c) Quel est l'ensemble de définition de la fonction $x \mapsto \sqrt{2x^3 - x^2 - 2x + 1}$?

Exercice 23. Déterminer $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{1-x}}{x}$.

Exercice 24. Tracer la courbe représentative de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty, 1[\,, \ f(x) = 2x + 3 \\ \forall x \in [1, 2[\,, \ f(x) = -x + 6 \\ \forall x \in [2, +\infty[\,, \ f(x) = 2\sqrt{x-1} \end{cases}$$

En quels points la fonction f est-elle continue?

Exercice 25. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \arccos(\cos(2t))$.

a) Montrer que f est paire, et périodique de période T à préciser.

b) Pour $t \in [0, \pi/2]$, simplifier $f(t)$ (justifier la réponse).

c) Tracer le graphe de f.

Indication. Utiliser b) pour tracer le graphe restreint à l'intervalle $[0, \pi/2]$. *Utiliser ensuite a) pour obtenir le graphe restreint à* $[-\pi/2, \pi/2]$, *puis le graphe entier.*

Exercice 26. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$.

a) Tracer la courbe représentative de f. Vérifier que f est continue et strictement croissante. Etudier ses limites en $+\infty$ et $-\infty$. En déduire que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

b) Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.